



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学

第二版

上册 / 南京理工大学
应用数学系 编



高等教育出版社

普通高等教育“十

高等数学

第二版 上册

南京理工大学应用数学系 编

高等教育出版社

内容简介

本书分上、下两册出版,上册主要内容包括函数、极限、函数的连续性,一元函数微分学及其应用,一元函数积分学及其应用;下册主要内容包括向量代数与空间解析几何,多元函数微分学及其应用,重积分及其应用,曲线积分与曲面积分,无穷级数,常微分方程。书末还附有数学实验、几种常用的曲线和常见曲面所围的立体图形、积分表、习题答案等。

本书旨在将基础知识的学习、数学思想的强化以及数学素质的培养融为一体,注重数学概念的几何直观表述,图文并茂、结构严谨、说理透彻、通俗易懂。书中所选例题、习题覆盖面广,具有较强的代表性。

本书可作为高等理工院校各专业本科生的教材,也可供工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/南京理工大学应用数学系编.—2版.
北京:高等教育出版社,2008.4
ISBN 978-7-04-023601-9

I. 高… II. 南… III. 高等数学-高等学校-教材
IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 029234 号

策划编辑 马 丽 责任编辑 李华英 封面设计 张申申 责任绘图 尹文军
版式设计 马敬茹 责任校对 刘 莉 责任印制 陈伟光

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 中青印刷厂

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

开 本	787×960 1/16	版 次	2004 年 8 月第 1 版 2008 年 4 月第 2 版
印 张	26.25	印 次	2008 年 4 月第 1 次印刷
字 数	480 000	定 价	31.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 23601-00

前 言

本书是在第一版的基础上,参照教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”修订而成的。本次修订突出数学知识引入的背景,强调数学的应用性和直观性,增加了数学软件和数学实验内容。本书凝结了编者多年教学实践经验和体会,同时吸收了国内外现行的有特色教材的优点。

本书旨在将基础知识的学习、数学思想的强化以及数学素质的培养融为一体,注重数学概念的几何直观表述,图文并茂、结构严谨、说理透彻、通俗易懂。书中所选例题、习题覆盖面广,具有较强的代表性。每节配备的习题在书末均附有习题答案,以便读者做题时参考。书末还附有数学实验内容,以帮助学生增强数学素养,培育创新意识,提高运用数学工具去分析和解决实际问题的能力。凡超出“工科类本科数学基础课程教学基本要求”的内容都用*标明。

本书分上、下两册,共十二章。上册主要内容包括函数、极限、函数的连续性,一元函数微分学及其应用,一元函数积分学及其应用;下册主要内容包括向量代数和空间解析几何,多元函数微分学及其应用,重积分及其应用,曲线积分,曲面积分,场论初步,无穷级数和常微分方程。

全书由杨孝平教授主持编写和审阅,参加编写工作的有许春根(第一章、附录数学实验),王为群(第二、三章),尹群(第四、五、六章),吴新民(第七、八章),刘德钦(第九、十章),俞军(第十一、十二章)。南京理工大学应用数学系的教师,对本书的编写和修订提出了许多宝贵的意见和建议,在此谨向他们致以谢意。

由于编者水平有限,书中错误与不足之处在所难免,敬请广大读者批评指正。

编 者

2007年10月

目 录

第一章 函数、极限、连续	(1)
第一节 映射与函数	(1)
一、集合和映射	(1)
二、函数概念	(8)
三、函数的几种特性	(13)
四、反函数和复合函数	(17)
五、初等函数	(21)
六、建立函数关系举例	(25)
习题 1.1	(26)
第二节 数列极限	(28)
一、数列及其简单性质	(29)
二、数列的极限	(31)
三、单调有界准则	(40)
习题 1.2	(43)
第三节 函数的极限	(44)
一、自变量趋向无穷大时函数的极限	(44)
二、自变量趋向有限值时函数的极限	(47)
三、函数极限的性质	(54)
习题 1.3	(55)
第四节 无穷小量与无穷大量	(56)
一、无穷小量	(56)
二、无穷大量	(59)
习题 1.4	(60)
第五节 函数极限的运算法则	(61)
习题 1.5	(67)
第六节 极限存在准则、两个重要极限	(68)
一、夹逼准则和重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	(68)
二、重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	(71)
习题 1.6	(73)

第七节 无穷小的比较	(74)
习题 1.7	(76)
第八节 连续函数	(77)
一、函数的连续性	(77)
二、函数的间断点	(79)
三、连续函数的运算与初等函数的连续性	(82)
* 四、一致连续性	(88)
习题 1.8	(89)
第二章 导数与微分	(92)
第一节 导数概念	(92)
一、两个实例	(92)
二、导数定义	(94)
三、右导数、左导数	(99)
四、导数的几何意义	(100)
五、函数的可导性与连续性的关系	(101)
习题 2.1	(102)
第二节 导数运算法则	(104)
一、函数的和、差、积、商的导数	(104)
二、复合函数求导法则	(108)
三、反函数求导法则	(112)
四、隐函数求导法则	(115)
五、参数方程所确定的函数的导数	(118)
六、高阶导数	(120)
七、相关变化率问题	(126)
习题 2.2	(128)
第三节 函数的微分	(131)
一、微分概念	(131)
二、微分的几何意义	(134)
三、微分的基本公式及运算法则	(135)
四、微分在近似计算中的应用	(138)
习题 2.3	(141)
第三章 中值定理与导数应用	(144)
第一节 中值定理	(144)
一、罗尔定理	(144)
二、拉格朗日中值定理	(147)
三、柯西中值定理	(151)
习题 3.1	(153)

第二节 洛必达法则	(155)
一、“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式	(155)
二、“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式	(159)
三、其他类型的未定式	(160)
习题 3.2	(163)
第三节 泰勒公式	(164)
一、泰勒公式	(164)
二、几个常用函数的麦克劳林公式	(168)
三、具有拉格朗日型余项的泰勒公式	(170)
四、泰勒公式应用举例	(174)
习题 3.3	(179)
第四节 函数的增减性与极值	(180)
一、函数单调性的判别法	(180)
二、函数的极值	(183)
三、函数的最大值、最小值及其应用问题	(188)
习题 3.4	(191)
第五节 曲线的凹凸性、拐点与函数图形的描绘	(193)
一、曲线的凹凸性及拐点	(193)
二、函数图形的描绘	(198)
习题 3.5	(203)
第六节 曲率	(203)
一、弧微分	(203)
二、曲率概念	(205)
三、曲率计算公式	(207)
四、曲率半径与曲率中心	(208)
习题 3.6	(209)
第七节 方程的近似解	(209)
一、二分法	(209)
二、切线法	(210)
习题 3.7	(212)
第四章 不定积分	(213)
第一节 原函数与不定积分的概念	(213)
一、原函数与不定积分的概念	(213)
二、不定积分的基本积分表及线性运算法则	(216)
习题 4.1	(219)
第二节 换元积分法	(220)

一、第一类换元法(凑微分法)	(221)
二、第二类换元法	(228)
习题 4.2	(234)
第三节 分部积分法	(236)
习题 4.3	(243)
第四节 几种特殊类型函数的积分	(243)
一、有理函数的积分	(244)
二、三角函数有理式的积分	(251)
三、简单无理函数的积分	(255)
习题 4.4	(260)
第五章 定积分	(263)
第一节 定积分概念	(263)
一、两个实例	(263)
二、定积分定义	(268)
三、定积分的几何意义	(270)
四、定积分的性质	(271)
习题 5.1	(277)
第二节 微积分基本定理	(278)
一、积分上限的函数及其导数	(278)
二、牛顿-莱布尼茨公式	(282)
习题 5.2	(286)
第三节 定积分换元积分法与分部积分法	(288)
一、定积分的换元积分法	(289)
二、定积分的分部积分法	(296)
习题 5.3	(299)
第四节 反常积分	(301)
一、无穷积分(无穷区间上的反常积分)	(302)
二、瑕积分(无界函数的反常积分)	(305)
习题 5.4	(309)
*第五节 反常积分收敛性判别法	(309)
一、无穷积分的审敛法	(310)
二、瑕积分的审敛法	(315)
*习题 5.5	(318)
第六节 定积分的近似计算	(319)
一、矩形公式	(319)
二、梯形公式	(320)
三、抛物线公式(辛普森公式)	(321)

习题 5.6	(325)
第六章 定积分应用	(326)
第一节 定积分的微元法	(326)
第二节 定积分在几何学上的应用	(327)
一、平面图形的面积	(327)
二、立体的体积	(333)
三、平面曲线的弧长	(338)
习题 6.2	(341)
第三节 定积分在物理学上的应用	(343)
一、水压力	(343)
二、功	(345)
三、引力	(346)
习题 6.3	(348)
第四节 函数在区间上的平均值	(349)
习题 6.4	(351)
习题答案	(352)
附录一 数学实验(上)	(375)
附录二 简单积分表	(399)
附录三 几种常用的曲线	(405)

第一章 函数、极限、连续

中学所学过的数学学习上称之为初等数学,也是人类 17 世纪以前所认知的数学,研究的数基本上是常数或常量,研究的形是孤立的、不变的规则几何形体,研究常量间的代数运算和不同几何形体内部及相互间的关系.到了 17 世纪,人们开始研究的数是变数或变量,研究的形是不规则的几何形体,而且数和形开始紧密地联系起来.这个时期,由英国科学家牛顿(Newton)和德国科学家莱布尼茨(Leibniz)各自独立地创立了微积分.微积分的创立是人类对自然界认识的一大飞跃,是数学发展中的一个转折点.微积分是高等数学课程的主要研究内容,函数是微积分的主要研究对象,极限理论是微积分的基础.本章将介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念,以及它们的一些性质.

第一节 映射与函数

一、集合和映射

1. 集合

集合是数学中的一个基本概念,一般地,所谓集合(或集)是指具有某种特定性质的事物的全体.组成这个集合的事物称为该集合的元素.

通常用大写字母 $A, B, X, Y, \dots$ 表示集合,用小写字母 $a, b, x, y, \dots$ 表示元素.若事物 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$;若事物 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$ 或 $a \in A$. 含有有限多个元素的集合称为有限集,不是有限集的集合称为无限集.

表示集合的方法通常有两种,一种是列举法.例如,若记 N 为全体自然数的集合,则 N 可以表示为

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

另一种是描述法.例如,如果集合 A 是由具有某种特性 P 的元素 x 的全体所组成的,则可表示为

$$A = \{x \mid x \text{ 具有特性 } P\}.$$

如集合 $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$, 表示方程 $x^2 - 1 = 0$ 的全体实数根所组成的集合. 本教材所用到的集合主要是数集, 即元素都是数的集合, 如果没有特别声明, 所涉及的数均是实数.

全体自然数所成的集合记为 $\mathbf{N}$; 全体整数所成的集合记作 $\mathbf{Z}$; 全体有理数所成的集合记作 $\mathbf{Q}$; 全体实数所成的集合记作 $\mathbf{R}$. $\mathbf{N}_+$ 表示全体正整数的集合, $\mathbf{R}_+$ 表示正实数集.

下面介绍关于集合的几个常用概念.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$), 读作 A 包含于 B (或 B 包含 A). 显然 $A \subseteq A$. 如果 $A \subseteq B$ 且 B 中确有不属于 A 的元素, 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$. 例如: $\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R}$.

如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 此时两集合 A, B 由相同的元素组成, 称 A 等于 B (或 B 等于 A), 记作 $A = B$ (或 $B = A$).

不含有任何元素的集合称为空集, 记作 $\emptyset$. 例如, 集合 $E = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x^2 + 1 = 0\}$ 是一个空集. 规定空集是任意集合的子集, 即对任意集合 A , 有 $\emptyset \subseteq A$.

由两个集合 A 与 B 中的所有元素 (相重的只取一次) 所组成的集合称为 A, B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$; 由两个集合 A 与 B 中的所有公共元素组成的集合称为 A, B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$. 由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的差集 (简称差), 记作 $A \setminus B$, $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$. 有时, 我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行, 所研究的其他集合 A 都是 I 的子集, 此时, 我们称 I 为全集或基本集, 称 $I \setminus A$ 为 A 的余集或补集, 记作 $\complement_I A$.

在两个集合之间还可以定义直积 (又称笛卡儿 (Descartes) 乘积). 设 A, B 是任意两个集合, 在集合 A 中任意取一个元素 x , 在集合 B 中任意取一个元素 y , 组成一个有序对 (x, y) , 把这样的有序对作为新的元素, 它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积, 记为 $A \times B$, 即

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\}.$$

例如, $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } y \in \mathbf{R}\}$, 即为平面直角坐标平面 xOy 面上全体点的集合, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

2. 实数集

实数集 $\mathbf{R}$ 是“高等数学”课程研究的基本数集. 实数的完备性是极限理论的基础, 我们仅从几何直观来简要地说明什么是实数的完备性.

有理数集是实数集的一个子集. 有理数的一个重要特性是它的稠密性, 即任

意两个不相等的有理数之间必存在一个有理数. 事实上, 设 r_1 与 r_2 是两个不同的有理数, 不难证明, $\frac{r_1 + r_2}{2}$ 就是介于 r_1 与 r_2 之间的一个有理数. 由此可见, 任意两个有理数之间必有无穷多个有理数. 在数轴上来表示, 就是任何两个有理数点之间必定含有无穷多个有理数点. 有理数点在坐标轴上的分布是处处稠密的, 但是, 数轴上的点并不都是有理数点, 还有无理数点. 例如, 在数轴上, O 为原点, A, B 为数轴上的两点 (如图 1.1). 其中 OA 的长度为单位正方形的对角线长度, OB 的长度为单位圆的周长的一半, 则 A, B 两点就不是有理数点, 而是无理数点. 有理数点并未布满整个数轴, 还有很多无理数点, 而实数布满了整个坐标轴, 也就是说, 实数集和数轴上的所有点是一一对应的. 实数的这个特性称为实数的连续性或完备性, 而有理数集不能与数轴上的所有点一一对应, 因此, 有理数是不完备的.

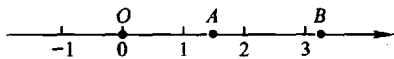


图 1.1

定义 1 设 A 为一非空数集, 若存在 $L \in \mathbb{R}$, 使得对任意 $x \in A$, 都有 $x \leq L$, 则称 A 有上界 (或上有界), 称 L 为 A 的一个上界. 若存在 $l \in \mathbb{R}$, 使得对任意 $x \in A$, 都有 $x \geq l$, 则称 A 有下界 (或下有界), 称 l 为 A 的一个下界. 若 A 既有上界又有下界, 则称 A 有界, 否则, 称 A 无界.

定义 2 设 A 为一非空数集, 若存在 A 的一个上界 s , 使得对 A 的任何上界 L , 都有 $s \leq L$, 则称 s 为 A 的上确界, 记作 $\sup A$. 若存在 A 的一个下界 i , 使得对 A 的任何下界 l , 都有 $i \geq l$, 则称 i 为 A 的下确界, 记作 $\inf A$.

由上述定义可知, 任何一个有上界 (下界) 的数集都有无穷多个上界 (下界). 上确界是所有上界中最小的, 下确界是所有下界中最大的, 我们不加证明地给出下列确界存在定理.

定理 1 任一有上 (下) 界的非空实数子集 A 必有上 (下) 确界.

常用的实数集合有区间、邻域、去心邻域. 设 a, b 是两个实数, 且 $a < b$, 满足不等式 $a < x < b$ 的全体实数 x 所组成的集合叫做以 a, b 为端点的开区间, 记作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的全体实数 x 所组成的集合称为以 a, b 为端点的闭

区间,记作 $[a, b]$,即

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

同样,数集 $\{x \mid a < x \leq b\}$ 或 $\{x \mid a \leq x < b\}$ 称为半开区间,分别记作 $(a, b]$ 或 $[a, b)$,即

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\};$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}.$$

上述各种区间是有限区间, a, b 分别称为区间的左端点、右端点;数 $b - a$ 称为区间的长度.除了上述有限区间外,常常还遇到下述的无穷区间.满足不等式 $-\infty < x < +\infty$ 的所有实数 x 的集合称为无穷区间,记作

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}.$$

类似地有下述半无穷区间:

$$(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\};$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x < +\infty\};$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\};$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leq b\}.$$

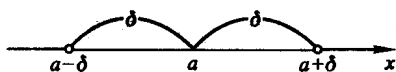


图 1.2

邻域也是一种常用的集合.设 a 是任一实数, δ 是正实数,数集 $\{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域(图 1.2),记作 $U(a, \delta)$,即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\},$$

或

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\},$$

a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径.

数集 $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $\dot{U}(a, \delta)$. 即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

这里, 不等式 $0 < |x - a|$ 表示 $x \neq a$.

3. 常量与变量

在自然现象里, 在实践活动中, 人们经常会遇到各种各样的量, 例如: 长度、面积、体积、质量、温度、压强、时间、距离等. 在某一过程中, 只取固定值的量称为常量; 可以取不同值的量称为变量. 例如, 把一个密闭容器内的气体加热时, 气体的体积和分子数保持不变, 是常量. 但气体的温度和压强可以取不同值, 它们是变量. 又如, 圆的直径可以取不同的值, 是变量. 但圆周率, 即圆周长与直径之比恒等于 π , 是常量.

一个量是变量还是常量, 不是绝对的, 需要视具体情况而定. 例如重力加速度 g 的值是随着纬度和高度的变化而变化的, 是一个变量. 但是在地球表面附近的局部地区内, 由于纬度和高度变化很小, g 的值变化不大, 可以把重力加速度 g 看作常量.

实际上, 常量也可看成一种特殊的变量, 正如把静止看成运动的特例一样, 把常量看成某一过程中始终取同一值的变量. 通常我们用字母 a, b, c 等表示常量, 用 x, y, z 等字母表示变量.

4. 映射

定义3 设 A, B 是两个非空集合, 若对每个 $x \in A$, 按照某种确定的法则 f , 有唯一确定的 $y \in B$ 与它相对应, 则称 f 为从 A 到 B 的一个映射, 记作

$$f: A \rightarrow B, \text{ 或 } f: x \mapsto y = f(x), x \in A,$$

其中 y 称为 x 在映射 f 下的像, x 称为 y 在映射 f 下的一个原像 (或逆像), A 称为映射 f 的定义域, 记作 $D(f)$ 或 D_f , A 中所有元素 x 的像 y 的全体所构成的集合, 称为 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(A)$, 即

$$R_f = f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}.$$

映射也可简单地看成如图 1.3 所示的输入、输出系统, 输入是原像 x , 输出是像 y . 应当注意, 定义中 x 的像是唯一的, 但 y 的原像不一定是唯一的, 并且值域 $f(A) \subseteq B$.

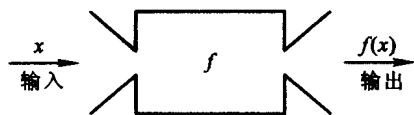


图 1.3

映射的概念中有两个基本要素,就是定义域和对应法则.若 f, g 都是从 A 到 B 的映射,并且 $\forall x \in A, f(x) = g(x)$,则称映射 f 与 g 相等,记作 $f = g$.

对应法则就是由 A 中的元 x 确定 B 中的对应元 y 的方法,是两个集合 A 与 B 间对应关系的具体表现.表示对应法则的方法很多,但不论用什么方法表示,都必须非常明确,不能模棱两可,含糊不清.

例 1 设 A 表示某校全体学生所构成的集合,用一个确定的方法给每个学生编一个学号, B 表示该校学生学号的集合, f 表示编学号的方法,于是它就确定了从 A 到 B 的一个映射 $f: A \rightarrow B$.

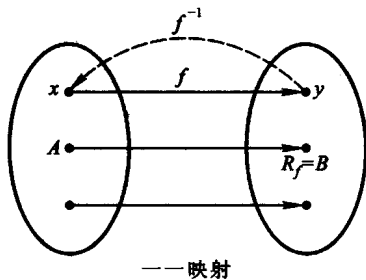
例 2 设 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 对每个 $x \in \mathbf{R}, f(x) = x^2$. 显然, f 是一个映射, f 的定义域 $D_f = \mathbf{R}$, 值域 $R_f = \{y \mid y \geq 0\}$, 它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集,即 $R_f \subsetneq \mathbf{R}$, 对于 R_f 中的元素 y , 除 $y = 0$ 外, 它的原像不是唯一的, 如 $y = 1$ 的原像有 $x = 1$ 和 $x = -1$ 两个.

例 3 设 $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow B$, 其中 B 为所有非负数构成的数集, 对每个 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, 对应一个 $z \in B$, 其中 $z = x^2 + y^2$, 该映射简记作: $z = F(x, y) = x^2 + y^2, (x, y) \in \mathbf{R}^2$.

设 f 是从集合 A 到集合 B 的映射, 若 $R_f = B$, 即 B 中任一元素 y 都是 A 中某元素的像, 则称 f 为 A 到 B 的满射; 若对 A 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$, 它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为 A 到 B 的单射; 若映射 f 既是单射, 又是满射, 则称 f 为 A 到 B 的一一映射 (或双射) (图 1.4).

上面例 1 中的映射既是单射, 又是满射, 因此是一一映射; 例 2 中的映射既不是单射, 也不是满射; 例 3 中的映射不是单射, 是满射.

映射又称为算子. 若 A, B 都是实数集, 则映射 $f: A \rightarrow B$ 就是通常的一元函数; 若 $A \subseteq \mathbf{R}^2, B \subseteq \mathbf{R}$, 则称映射 $f: A \rightarrow B$ 为二元函数; 若 $A = B$, 则 f 是从 A 到自身的映射, 通常称



一一映射

图 1.4

这样的映射为 A 上的一个变换, 把集 A 中的每个元素都映为自己的映射称为 A 上的恒等映射或单位映射, 记作 I_A 或 I , 即任给 $x \in A$, $I(x) = x$.

设 f 是 A 到 B 的一映射 (如图 1.4), 则由定义, 对每个 $y \in B$, 有唯一的 $x \in A$, 适合 $f(x) = y$, 于是, 我们可定义一个从 B 到 A 的新映射 g , 即 $g: B \rightarrow A$, 对每个 $y \in B$, 规定 $g(y) = x$, 这里的 x 满足 $f(x) = y$, 这个映射 g 称为 $f: A \rightarrow B$ 的逆映射, 记作 $f^{-1}: B \rightarrow A$, 其定义域 $D_{f^{-1}} = B$, 值域 $R_{f^{-1}} = A$. 此时, 我们称 f 是可逆映射. 由定义可知, 若 f 是可逆映射, 则 f 的逆映射 f^{-1} 也是可逆映射, 且 $(f^{-1})^{-1} = f$.

设有两个映射

$$f: A \rightarrow B, \quad g: B \rightarrow C,$$

对每个 $x \in A$, 对应唯一一个 $y = f(x) \in B$, 对这个 $y \in B$, 又对应唯一一个 $z = g(y) \in C$, 从而按上面对应法则确定了一个从 A 到 C 的映射, 这个映射称为 f 和 g 构成的复合映射 (如图 1.5), 记作 $g \circ f$, 即

$$g \circ f: A \rightarrow C,$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A.$$

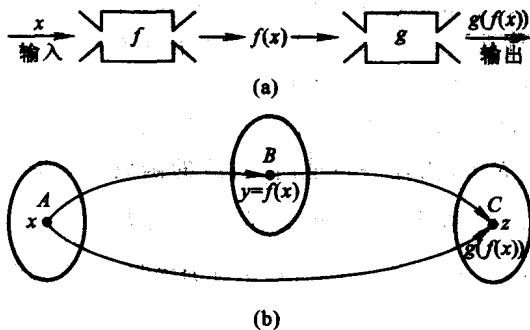


图 1.5

由定义可知, 任给两个映射 $f: A \rightarrow X$ 与 $g: B \rightarrow Y$, 当且仅当 $f(A) \subseteq B$ 时才存在复合映射 $g \circ f: A \rightarrow Y$.

例 4 设有映射 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 对每个 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 1$, 映射 $g: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$, 对每个 $u \in \mathbf{R}$, $g(u) = \sin u$, 则映射 f 和 g 构成的复合映射 $g \circ f: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$, 即: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = \sin(2x + 1)$, $x \in \mathbf{R}$.

二、函数概念

1. 函数定义

定义 4 设非空数集 $D \subseteq \mathbb{R}$, 则称映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的函数, 记作 $y = f(x)$, $x \in D$, 其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域. 记作 D_f , 即 $D_f = D$.

当自变量 x 取定某个值 $x_0 \in D$ 时, 所对应的因变量 y 的值叫做函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作 $y_0 = f(x_0)$, 或 $y_0 = y|_{x=x_0}$. 全体函数值的集合称为函数 $f(x)$ 的值域, 记作 R_f , 则 $R_f = \{y | y = f(x), x \in D\}$.

函数 $y = f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可用其他字母, 例如“ φ ”, “ F ”, “ g ”等. 此时 y 是 x 的函数就写成 $y = \varphi(x)$, $y = F(x)$, $y = g(x)$ 等. 如果同时讨论同一变元 x 的分别具有不同对应法则的几个不同的函数, 则不能用同一字母来表示.

在函数的定义中, 对每个 $x \in D$, 对应的函数值 y 总是唯一的, 这样定义的函数称为单值函数. 如果给定一个对应法则, 按这个法则, 对每个 $x \in D$, 都有确定的值 y 与之对应, 但这个值 y 不总是唯一的, 我们称这种法则确定了一个多值函数. 对于多值函数, 常常将它分成若干个单值函数, 其中每一个都称为该多值函数的单值分支. 例如, 在直角坐标系中, 中心在坐标原点, 半径为 R 的圆周上的任意一点 $M(x, y)$ 的坐标满足关系式 $x^2 + y^2 = R^2$. 该方程在闭区间 $[-R, R]$ 上确定了以 x 为自变量, y 为因变量的函数. 当 x 取 $-R$ 或 R 时, 对应的函数值都只有一个, 当 x 取 $(-R, R)$ 内任一数值时, 对应的函数值就有两个, 所以这个函数是多值函数. 它的两个单值分支是: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$ 及 $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$. 今后, 若无特别声明, 所谈到的函数都是指单值函数.

必须注意, 定义域和对应法则是确定函数的两大要素. 如果一个函数有几何或物理等实际意义, 则其定义域需按实际意义来考虑; 如果一个函数只是用解析式来表示, 且未加说明, 则它的定义域就是使这一解析式有意义的自变量所取的值的全体. 另外, 在数学中, 两个函数相同是指它们的定义域和对应法则都分别相同, 至于自变量和因变量用什么字母来表示, 则是无关紧要的. 例如, 函数 $f(x) = \ln x^2$ 与 $g(x) = 2\ln x$ 不是同一函数, 这是因为, $f(x) = \ln x^2$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; $g(x) = 2\ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 它们的定义域不相同. 而函数 $y = 3x$ 与 $s = 3t$ 表示同一函数, 因为这两个函数的定义域和对应法则都相同.