21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

高等数学

第六版

全程导学及习题全解

下册

主编 王进良
编委 周 珑 张广丽
审核 冯广庆

◆知识归纳 梳理主线重点难点
◆习题详解 精确解答教材习题
◆提高练习 巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

高等数学

第六版

全程导学及习题全解

下册

主编　王进良
编委　周　珑　张广丽
审核　冯广庆

◆知识归纳　梳理主线重点难点
◆习题详解　精确解答教材习题
◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程导学及习题全解．下册／王进良主编．
—北京：中国时代经济出版社，2007.9
(21世纪高等院校经典教材同步辅导)
ISBN 978-7-80221-392-0

Ⅰ.高... Ⅱ.王... Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第104010号

高等数学全程导学及习题全解(下册)

王进良 主编

出版者	**中国时代经济出版社**
地　址	北京东城区东四十条24号 青蓝大厦11层东办公区
邮　编	100007
电　话	(010)68320825（发行部） (010)88361317（邮购）
传　真	(010)68320634
发　行	各地新华书店
印　刷	北京鑫海达印刷有限公司
开　本	880×1230　1/32
版　次	2007年9月第1版
印　次	2007年9月第1次印刷
印　张	10.75
字　数	290千字
印　数	1～5000册
定　价	10.00元
书　号	ISBN 978-7-80221-392-0

内容简介

本书是根据由高等教育出版社出版，同济大学应用数学系主编的《高等数学》(第六版)(上、下)，而编写的一本配套学习辅导和习题解答教材。全书紧扣教材内容，将各章节全部习题给出详细解答，思路清晰，逻辑缜密，循序渐进的帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。本书对各章的知识点进行了归纳和提炼，帮助读者梳理各章脉络，统揽全局。在对《高等数学》（上、下）教材全部习题进行分析与讲解的基础上，根据每章的知识重点，还精选了一些具有代表性的典型例题，方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书可作为本科阶段学生和自考生学习“高等数学”课程的学习辅导材料和复习参考用书，以及工科考研强化复习的指导书，也可以作为教授“高等数学”课程教师的教学参考用书。

前 言

“高等数学”是解决理工科数学问题和工程实际问题的重要理论基础和实用工具，也是理工科各专业研究生入学考试的内容。为了帮助广大学生更好的学习和掌握“高等数学”课程的理论精髓和解题方法，我们根据同济大学应用数学系编写的《高等数学》(第六版)教材，编写了这本辅导资料。本辅导教材根据《高等数学》(第六版)教材中每一章的内容，编写了以下几方面的内容：

本章重点内容导学：精练了各章中的主要知识点，理清各知识点之间的脉络联系，囊括了主要定理及相关推论和重要公式等，帮助读者迅速了解本章重要知识点，系统理解各章的体系结构，奠定扎实的理论基础。

典型例题讲解：精选具有代表性的重点题型进行讲解，分析问题的突破点，指引解决问题的思路，旨在帮助读者学会独立思考的方式和分析问题的办法。 习题全解：依据教材各章节的习题，进行详尽的解答。考虑到不同层次读者的需求，在解答过程中，对于重点习题进行了分析和讲解，归纳解题技巧。

同步自测题及解析：根据教学大纲要求及教学重点，编写了一套难易适中的自测题，并对自测题进行了详细的解答。

本书由王进良、周珑、冯广庆、孟慧、杨春等同志编写，全书由张广丽审核。本书编写过程中得到杜心康、宁建建等同志的大力协助，并得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑的大力支持，为此表示忠心的感谢！对《高等数学》(第六版)教材的作者——同济大学应用数学系的老师们，表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，加之时间仓促，本书难免有缺点和疏漏，存在一些不妥之处，敬请各位专家及广大读者批评指正。

编 者

2007年8月

目　　录

第八章　空间解析几何与向量代数

本章重点内容导学

一、向量及其运算

1. 向量的一些基本概念

2. 向量的线性运算及乘法运算

二、曲面和空间曲线的方程

1. 旋转曲面与柱面方程

2. 二次曲面及其方程

3. 曲面、曲线在坐标面上的投影

三、平面和直线的方程

1. 平面及其方程

2. 两平面之间的关系及向量表示

3. 直线及其方程

4. 两直线之间的关系及向量表示

5. 直线和平面之间的关系及向量表示

6. 点与平面、直线之间的关系及向量表示

7. 平面束的定义及其方程

典型例题讲解

例 1　设空间两点 $P_1(3,5,-1)$，$P_2(-3,1,2)$，

求：(1) 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在三个坐标轴上的投影；

(2) 向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的模;

(3) 向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向余弦;

(4) 与向量$\overrightarrow{P_1P_2}$方向一致的单位向量;

(5) 向量$\overrightarrow{P_1P_2}$在向量$\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,1,2\}$上的投影;

(6) 向量$\overrightarrow{P_1P_2}$在向量$\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,1,2\}$上的投影向量.

解　向量$\overrightarrow{P_1P_2}=\{-6,-4,3\}$

(1) $\overrightarrow{P_1P_2}$在x,y,z轴上的投影分别为$-6,-4,3$.

(2) $|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(-6)^2+(-4)^2+3^2}=\sqrt{36+16+9}=\sqrt{61}$.

(3) 向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{-6}{\sqrt{61}},\cos\beta=\frac{-4}{\sqrt{61}},\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{61}}.$$

(4) $$\overrightarrow{P_1P_2}^0=\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}=-\frac{6}{\sqrt{61}}\boldsymbol{i}-\frac{4}{\sqrt{61}}\boldsymbol{j}+\frac{3}{\sqrt{61}}\boldsymbol{k}.$$

(5) $$P_{rj\overrightarrow{M_1M_2}}\overrightarrow{P_1P_2}=\frac{\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=-\frac{10}{3}.$$

(6) 设$\overrightarrow{P_1P_2}$在向量$\overrightarrow{M_1M_2}$上投影向量为$\boldsymbol{r}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=P_{rj\overrightarrow{M_1M_2}}\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}^0\\&=-\frac{10}{3}\times\frac{2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}}{3}\\&=-\frac{20}{9}\boldsymbol{i}-\frac{10}{9}\boldsymbol{j}-\frac{20}{9}\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

例 2　已知$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{b}|=3$,$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=45^\circ$,求$\left|\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\right|$.

解
$$\begin{aligned}\left|\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\right|^2&=\left|\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}\right|^2\\&=\frac{1}{9}|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2\\&=\frac{1}{9}\left[|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2+4|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\right]\\&=\frac{1}{9}\left[\sqrt{2}^2+4\cdot3^2+4\cdot\sqrt{2}\cdot3\cdot\cos45^\circ\right]\\&=\frac{50}{9}\end{aligned}$$

$$\therefore\left|\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\right|=\frac{5}{3}\sqrt{2}$$

例 3　证明三角形的三条高交于一点.

证明　如图 8－1 所示，作 $\triangle ABC$，并分别作 BC，AC 边上的高 AD 和 BN，设相交于 H，连接 CH 并延长，交 AB 于 M.

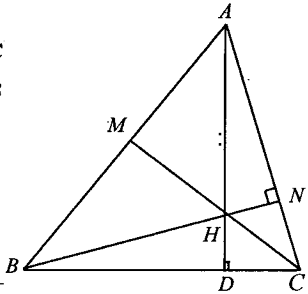

图 8－1

由于 $AD \perp BC$，故 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$；

同理，$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$\begin{aligned}
\text{于是} \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \\
&= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB} \\
&= \overrightarrow{AH}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \\
&= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0
\end{aligned}$$

所以 $CH \perp AB$.

例 4　设 $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{B} = k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$，其中 $|\boldsymbol{a}| = 2$，$|\boldsymbol{b}| = 3$，且 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$. 问：(1) k 为何值时，$\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B}$？

(2) k 为何值时，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形的面积为 12？

解　(1) 当
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= (3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) \cdot (k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \\ &= 3k|\boldsymbol{a}|^2 + (3 + 2k)\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + 2|\boldsymbol{b}|^2\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$

所以 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$

故 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 3k|\boldsymbol{a}|^2 + 2|\boldsymbol{b}|^2 = 3k \times 2^2 + 2 \times 3^2 = 12k + 18$.

当 $\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B}$ 时，有 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$，

此时有 $12k + 18 = 0$，得 $k = -\dfrac{3}{2}$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形的面积为 S，

$$\begin{aligned}
\text{则 } S = |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| &= |(3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) \times (k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})| \\
&= |3\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + 2k\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}| \\
&= |(3 - 2k)\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|
\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$，可得 $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| = 6$，

故 $S = |3 - 2k| \times 6$.

当 $S = 12$ 时，有 $|3 - 2k| = 2$，

得 $k = \dfrac{1}{2}$ 或 $k = \dfrac{5}{2}$.

例 5　设 $\boldsymbol{a} = \{2, 3, -1\}$，$\boldsymbol{b} = \{-1, 1, Z\}$，问当 Z 为何值时，$(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$ 最小？并求此最小值.

解　$\widehat{(a,b)} = \arccos\left(\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}\right)$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 2\times(-1)+3\times1+(-1)\times Z = 1-Z$

$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{14},\ |\boldsymbol{b}| = \sqrt{Z^2+2}$

$\widehat{(a,b)} = \arccos\dfrac{1-Z}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{Z^2+2}}$

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{(a,b)}}{\mathrm{d}Z} = -\frac{\left(\dfrac{1-Z}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{Z^2+2}}\right)'}{\sqrt{1-\dfrac{(1-Z)^2}{14\cdot(Z^2+2)}}}$$

$$= \frac{\dfrac{2+Z}{\sqrt{14}(Z^2+2)\sqrt{Z^2+2}}}{\dfrac{\sqrt{14(Z^2+2)-(1-Z)^2}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{Z^2+2}}}$$

$$= \frac{2+Z}{(Z^2+2)\sqrt{14(Z^2+2)-(1-Z)^2}}$$

令$\dfrac{\mathrm{d}\widehat{(a,b)}}{\mathrm{d}Z} = 0$,得 $Z=-2$(惟一驻点)

$\widehat{(a,b)}$ 在 $Z=-2$ 处取得最小值 $\theta_{\min}$,且

$$\theta_{\min} = \arccos\frac{1-(-2)}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{(-2)^2+2}} = \arccos\frac{\sqrt{21}}{14}.$$

例 6　求空间曲线$\begin{cases}4x-3y-z+10=0\\2x+y+2z+4=0\end{cases}$在三个坐标面上的投影方程.

解　在 xOy 平面上,消 z 得投影柱面 $10x-5y+24=0$,故投影曲线方程为

$$\begin{cases}10x-5y+24=0\\z=0\end{cases}$$

在 xOz 平面上,消 y 得投影柱面 $10x+5z+22=0$,故投影曲线方程为

$$\begin{cases}10x+5z+22=0\\y=0\end{cases}$$

在 yOz 平面上,消 x 得投影柱面 $5y+5z-2=0$,故投影曲线方程为

$$\begin{cases}5y+5z-2=0\\x=0\end{cases}$$

例 7　求通过点$(2,4,0)$且平行于平面 $x-3y+2z-8=0$,又与直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程.

解　记点 A 为 $(2,4,0)$，平面 $\pi: x-3y+2z-8=0$，直线 $L: \frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{2}$ 过点 $p(1,-3,0)$

过点 A 作平面 π_1 平行于平面 π，则 π_1 的方程为

$(x-2)-3(y-4)+2z-8=0$，即 $x-3y+2z+2=0$.

直线 L 的参数方程为

$x=t+1, y=3t-3, z=2t$

代入平面 π_1 的方程得

$(t+1)-3(3t-3)+2\times 2t+2=0$.

由此可解得 $t=3$，所以直线 L 与平面 π_1 的交点为 $Q(4,6,6)$.

向量 $\overrightarrow{AQ}=\{2,2,6\}$ 即为所求直线 L_1 的方向向量，于是所求直线方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z}{6}.$$

例 8　求直线 $L: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 绕 z 轴旋转所得旋转曲面的方程，并求此旋转曲面与 $z=0, z=2$ 所围立体的体积.

解　把直线 L 写成参数方程

$x=t+2, y=2t+1, z=-t(-\infty<t<+\infty)$

固定一个 t，即得 L 上一点 $M(t+2,2t+1,-t)$，点 M 到 z 轴的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(t+2)^2+(2t+1)^2}=\sqrt{5t^2+8t+5}$$

点 M 绕 z 轴旋转得一空间圆周 $\begin{cases} x^2+y^2=5t^2+8t+5 \\ z=-t \end{cases}$

令 t 在 $(-\infty,+\infty)$ 内变化，即知上式就是所求旋转曲面的参数方程.

从上列方程中消去 t，即得它的一般方程

$x^2+y^2-5z^2+8z=5$，此即所求旋转曲面的方程.

点 M 到 z 轴的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5z^2-8z+5}$$

由平行截面面积为已知的立体体积公式得

$$V=\pi\int_0^2 d^2\,dz=\pi\int_0^2(5z^2-8z+5)\,dz$$

$$=\pi\left(\frac{5}{3}z^3-\frac{8}{2}z^2+5z\right)\Big|_0^2=\frac{22}{3}\pi.$$

例 9　求过直线 $L_1: \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}$，且平行于直线 $L_2: \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=$

$\frac{z-1}{2}$ 的平面方程.

解　直线 $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}$ 的方向向量为 $s_1=(1,-1,1)$,

直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{2}$ 的方向向量为 $s_2=(1,2,2)$,从而平面的法向量为

$$n=s_1\times s_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=(-4,-1,3).$$

又因平面过直线 L_1,从而所求平面过直线 L_1 上的点$(-2,3,-1)$,

所求平面方程为 $-4(x+2)-1(y-3)+3(z+1)=0$,

即 $4x+y-3z+2=0$.

例 10　求抛物面 $z=x^2+y^2$ 的切平面,使切平面平行于 $2x-y-2z=0$.

解　设切点坐标为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$,则

$F'_x=2x, F'_y=2y, F'_z=-1$.

因此切平面的法矢量 $n=\{2x_0,2y_0,-1\}$,其与已知平面 $2x-y-2z=0$ 平行,

有 $\frac{2x_0}{2}=\frac{2y_0}{-1}=\frac{-1}{-2}$,

所以 $x_0=\frac{1}{2}, y_0=-\frac{1}{4}, z_0=x_0^2+y_0^2=\frac{5}{16}$,

故所求切平面方程为 $2\left(x-\frac{1}{2}\right)-\left(y+\frac{1}{4}\right)-2\left(z-\frac{5}{16}\right)=0$

即 $2x-y-2z-\frac{5}{8}=0$.

例 11　设有一条入射光线的途径为直线

$L:\begin{cases} x+y-3=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$,求该光线在平面 $x+y+z+1=0$ 上的反射光线方程.

解　直线 $L:\begin{cases} x+y-3=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$ 可表示为

$$\begin{cases} x=t \\ y=3-t \\ z=1-t \end{cases}$$

代入平面 $\pi: x+y+z+1=0$,可得

$t+(3-t)+(1-t)+1=0$,得 $t=5$

故入射光线 L 与平面 π 的交点为$(5,-2,-4)$.

在入射线 L 上找一点 $P(1,2,0)$，

点 P 垂直于平面 π 的直线为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$ 或$\begin{cases}x=t+1\\y=t+2\\z=t\end{cases}$

代入平面方程得$(t+1)+(t+2)+t+1=0$，

化简后得到 $3t=-4, t=-\dfrac{4}{3}$，

所以点$(1,2,0)$ 在平面 π 的投影点为$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$.

又由中点公式

$\dfrac{1+x'}{2}=-\dfrac{1}{3},\dfrac{2+y'}{2}=\dfrac{2}{3},\dfrac{z'}{2}=-\dfrac{4}{3}$

得到 $x'=-\dfrac{5}{3},y'=-\dfrac{2}{3},z'=-\dfrac{8}{3}$

故点 P 关于平面 π 的对称点为$\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{8}{3}\right)$.

根据两点式方程$\dfrac{x-5}{-\frac{5}{3}-5}=\dfrac{y+2}{-\frac{2}{3}+2}=\dfrac{z+4}{-\frac{8}{3}+4}$，

化简得$\dfrac{x-5}{-5}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+4}{1}$，即为所求直线方程.

习题全解

习题 8－1

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c},\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

证明　如图 8－2 所示，O 为 AC、BD 中点.

$\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DC}$

$\therefore AB \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} DC$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

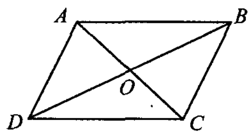

图 8－2

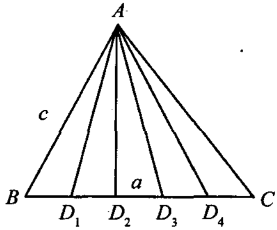

图 8－3

3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分,设分点依次为 D_1、D_2、D_3、D_4,再把各分点与点 A 连接.试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$、$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$、$\overrightarrow{D_2A}$、$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

解 如图 8－3 所示.

$$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{D_1D_2}=\overrightarrow{D_2D_3}=\overrightarrow{D_3D_4}=\overrightarrow{D_4C}=\frac{\boldsymbol{a}}{5};$$

$$\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{\boldsymbol{a}}{5}-\boldsymbol{c};$$

$$\overrightarrow{D_2A}=\overrightarrow{D_2B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{2\boldsymbol{a}}{5}-\boldsymbol{c};$$

$$\overrightarrow{D_3A}=\overrightarrow{D_3B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c};$$

$$\overrightarrow{D_4A}=\overrightarrow{D_4B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

4. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$.试用坐标表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-0,-1-1,0-2\}=\{1,-2,-2\}$;

$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2\{1,-2,-2\}=\{-2,4,4\}$.

5. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

解 $|a|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$,

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|a|}=\left\{\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11}\right\}.$$

平行于 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\boldsymbol{a}^0$ 或 $-\boldsymbol{a}^0$,

即 $\left\{\pm\frac{6}{11},\pm\frac{7}{11},\mp\frac{6}{11}\right\}$.

6. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?

$$A(1,-2,3);B(2,3,-4);C(2,-3,-4);D(-2,-3,1).$$

解 依次在第 Ⅳ,Ⅴ,Ⅷ,Ⅲ 卦限.

7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征?指出下列各点的位置:

$A(3,4,0)$；$B(0,4,3)$；$C(3,0,0)$；$D(0,-1,0)$.

解　在坐标面上的点的坐标中有一个为 0，xOy 面上 $z=0$，yOz 面上 $x=0$，zOx 面上 $y=0$；在坐标轴上的点的坐标中有两个为 0，x 轴上 $y=z=0$，y 轴上 $x=z=0$，z 轴上 $x=y=0$. 上述四点依次在 xOy 面，yOz 面，x 轴和 y 轴上.

8. 求点 (a,b,c) 关于(1) 各坐标面；(2) 各坐标轴；(3) 坐标原点的对称点的坐标.

解　(1) 点 (a,b,c) 关于 xOy,yOz,zOx 面的对称点坐标依次为 $(a,b,-c)$，$(-a,b,c)$，$(a,-b,c)$.

(2) 点 (a,b,c) 关于 x,y,z 轴的对称点的坐标依次为 $(a,-b,-c)$，$(-a,b,-c)$，$(-a,-b,c)$.

(3) 点 (a,b,c) 关于原点的对称点的坐标为 $(-a,-b,-c)$.

9. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.

解　自点 P_0 引 xOy,yOz,zOx 面垂线的垂足坐标依次为

$$(x_0,y_0,0),(0,y_0,z_0),(x_0,0,z_0);$$

自点 P_0 引 x,y,z 轴垂线的垂足坐标依次为

$$(x_0,0,0),(0,y_0,0),(0,0,z_0).$$

10. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

解　过点 P_0 而平行于 z 轴的直线，其上的坐标为 (x_0,y_0,z)，前两个坐标不变，而第三个坐标在 $z\in\mathbf{R}$ 变化；过点 P_0 而平行于 xOy 面，其上点的坐标为 (x,y,z_0)，第三个坐标不变，而前两个坐标分别在 $x\in\mathbf{R}$，$y\in\mathbf{R}$ 变化.

11. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求它各顶点的坐标.

解　如图 8－4 所示，各顶点的坐标依次为

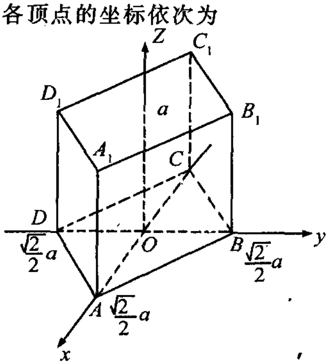

图 8－4