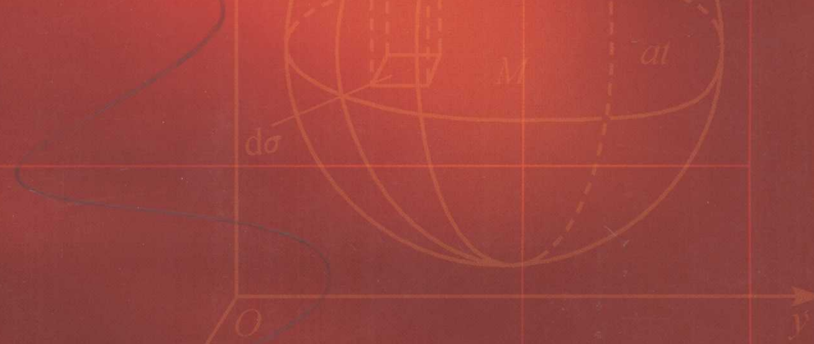
21世纪高等院校教材

数学物理方程及其应用

吴小庆　编著



科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

数学物理方程及其应用

吴小庆　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书主要内容包括:数学模型——定解问题,分离变量法,特征值问题,贝塞尔函数,勒让德多项式,积分变换法,波动方程的达朗贝尔法,格林函数法,算子级数法和数学物理方程在工程技术中的应用.全书以解题方法为主线编排章节,在建立三类典型方程的各种定解问题的基础上,对各类定解问题的求解方法作了详细系统的介绍,各章具有一定的独立性.本书所讲述的算子级数法是作者在教学实践中的探索,该法使定解问题的求解过程简化,具有解题的技巧性和灵活性.

本书可作为工科院校有关专业研究生的教材,选学本书的某些章节也可作为高年级本科生教材.本书也可供工程技术人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程及其应用/吴小庆编著.—北京:科学出版社,2008

ISBN 978-7-03-022430-9

Ⅰ.数… Ⅱ.吴… Ⅲ.数学物理方程 Ⅳ.O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 099011 号

责任编辑:胡华强 李晓鹏 / 责任校对:包志虹
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 7 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2008 年 7 月第一次印刷 印张:16 3/4
印数:1—4 000 字数:316 000

定价:28.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　　言

“数学物理方程”是工科院校相关专业硕士研究生的一门学位课程，也是高年级本科生的必修或选修课程.本教材乘教学改革、教材建设之东风，在校内使用多届的自编教材《数学物理方程》的基础上修改、完善而成.教材的出版得到了西南石油大学研究生部、教务处的大力支持和帮助.

数学物理方程的研究对象是自然科学和工程技术各门分支中出现的一些偏微分方程，它涉及自然科学和工程技术的各个领域.工程技术如试井分析、石油勘探、节约能源、大型建筑等方面，都为数学物理方程提出了崭新的研究课题.半个多世纪以来，偏微分方程的理论有了重大的发展，同时也使人们对一些传统的经典方法和理论有了新的认识，从而为我们更新教材提供了重要的前提和必要的线索.我们在教学改革、教学实践中进行探索，在借鉴经典方法和理论的基础上，提出了求解偏微分方程定解问题的新途径——算子级数法[7],[8],[13],[14].该科研成果成为教材完整独立的一章.该章考虑某类方程的柯西问题，引入强解析、拟解析等概念，将解析解表为变量 t 的幂级数(而不是 Cauchy-Ковалевская 定理证明中将解析解表为所有变元的幂级数)，从而获得了简洁的解析解表达式，并获得了强解析解在有界区域或无穷区域存在唯一的充要条件，为柯西问题的局部解析解与整体解析解提供了简捷的求解方法.传统方法中对热传导方程、波动方程的柯西问题采用泊松公式计算，往往需要计算多重无穷限积分或曲面积分等.即使初值函数是十分简单的解析函数，计算过程也相当复杂.应用解析解公式却能很容易地得到热传导方程、波动方程等更广泛一类方程的柯西问题的解析解，迎刃而解那些采用传统方法计算时所出现的难题.强解析解公式也提供了求泊松方程特解的新方法.在该章，我们又应用强解析解公式，简捷地导出了求柯西问题的基本解、一般解的新途径；导出了求解半无界问题、混合问题的新途径，称之为算子级数法.算子级数法使定解问题的求解过程简化，使初学者较容易地掌握各类定解问题的求解方法和技巧，并将算子级数公式应用于含参变量无穷限积分、球面积分等的计算.算子级数法是本教材的特色之一，它得到了有关专家的肯定，在教学中深受学生的好评，取得了一定的教学效果.

积分变换法在工程技术中具有广泛的应用.在国家“八五”科技攻关项目中，我们针对所需解决问题的特点与特性，提出了行之有效的正交变换法[21],[29],[30]，该法成为项目的创新点.我们及时将该科研成果引入教材“积分变换法”这一章.该章强调了如何针对具体的定解问题引入相应的正交变换，如何确定变换与逆变换，揭

示了积分变换的变换核、逆变换核与特征函数系的关系. 这是本教材的特色之二. 数学物理方程在自然科学和工程技术各个领域中具有广泛的应用,在教材最后一章介绍了作者在解决工程实际问题的一些应用实践.

此外,本教材以解题方法为主线编排章节,在建立三类典型方程的各种定解问题的基础上,对各类定解问题的求解方法作了详细的介绍,各章具有有机的联系和相对的独立性. 本教材注意引入现代数学的思想,在突出基本概念、基本理论和基本技能的基础上,着重处理好重点、难点. 本教材严格遵循由浅入深,由直观到抽象的讲解方式,通俗易懂,循序渐进,概念清楚,论证严谨,便于教学.

任重而道远,我们将在今后的教学实践中不断完善教材,把教材建设工作搞得更好.

吴小庆
西南石油大学
2008 年 4 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第 1 章　数学模型——定解问题

为研究物理、力学和工程技术中的有关问题，要根据反映某种规律的物理模型，建立起相应的数学模型，然后运用数学理论和方法求解这个数学模型，从而掌握有关物理量的变化规律. 这反映了数理方程研究问题的全过程.

1.1　偏微分方程的一般概念

1.1.1　基本概念

偏微分方程是含有未知多元函数及其偏导数的关系式.

例如，

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0, \tag{1.1.1}$$

其中 $u=u(x,y)$ 为未知函数，a,b,c 为已知函数.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.1.2}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u, \tag{1.1.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1.1.4}$$

$$uu_{xy} + u_x = u \tag{1.1.5}$$

都是偏微分方程.

一个偏微分方程所含有的未知函数的最高阶导数的阶数称为偏微分方程的**阶**. 如方程(1.1.2)、方程(1.1.4)、方程(1.1.5)都是二阶偏微分方程，方程(1.1.1)、方程(1.1.3)都是一阶偏微分方程.

若偏微分方程中各项关于未知函数及其各阶偏导数都是一次的，则称这个方程为**线性方程**，否则称其为**非线性方程**. 例如，方程(1.1.1)、方程(1.1.2)、方程(1.1.4)都是线性方程，而方程(1.1.3)、方程(1.1.5)是非线性方程. 若非线性方程中，关于未知函数的所有最高阶偏导数都是线性的，称其为**拟线性方程**. 例如，方程(1.1.5)为拟线性方程.

在线性方程中，称方程中不含有未知函数及其偏导数的项为**自由项**. 若方程的自由项恒为零，称方程是**齐次方程**，否则称为**非齐次方程**. 例如，方程(1.1.1)、方程

(1.1.2)是齐次方程,方程(1.1.4)是非齐次方程.

若某函数在指定的区域内连续,具有方程中所出现的一切偏导数,且将其代入方程使方程成为恒等式,则称此函数为该区域内**方程的解**.

本书主要研究二阶线性偏微分方程,因为它在数学、物理中经常出现.最一般的 m 个自变量的二阶线性偏微分方程的形式为

$$\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Fu = G, \tag{1.1.6}$$

其中不失一般性,可假设 $A_{ij}=A_{ji}$,且可假设 A_{ij},B_i,F 和 G 都是 m 个自变量 x_i 的函数.

我们知道,n 阶常微分方程的通解是依赖于 n 个任意常数的一族函数.就偏微分方程来说,它的通解将依赖于任意函数而不是任意常数.为了说明这件事,考察二阶方程

$$u_{xy} = 0, \tag{1.1.7}$$

如果把这个方程对 y 积分,而对 x 认为是固定的,就得到

$$u_x(x,y) = f(x), \tag{1.1.8}$$

再对 y 认为是固定的,对 x 求第二次积分,得

$$u(x,y) = g(x) + h(y), \tag{1.1.9}$$

其中 $g(x)$ 和 $h(y)$ 都是任意可微函数.

假定 u 是三个自变量 x,y 和 z 的函数,那么对于方程

$$u_{yy} = 2 \tag{1.1.10}$$

可以得到通解

$$u(x,y,z) = y^2 + y f(x,z) + g(x,z), \tag{1.1.11}$$

其中 f 和 g 都是两个自变量 x 与 z 的任意函数.

在常微分方程情况下,首要的任务是确定一个通解,然后根据给定的条件求出任意常数的值来确定特解.但是,对偏微分方程来说,从偏微分方程的通解中选出满足附加条件的一个特解,一般来说是十分困难的,甚至是不可能的.这是因为在偏微分方程的通解中含有任意函数,我们要从通解中确定满足附加条件的特解,不是仅仅要确定任意常数,而是要确定这些任意函数.

对于 n 阶线性齐次常微分方程来说,n 个线性无关的解的线性组合仍是一个解.但是,就偏微分方程来说,这样的结论一般是不成立的.这是由于每个线性齐次偏微分方程的解空间是无限维的函数空间.例如,偏微分方程

$$u_x - u_y = 0, \tag{1.1.12}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

它的通解是

$$u(x,y) = f(x+y), \tag{1.1.13}$$

其中 f 是处处可微的任意函数. 由此可见下列函数:

$$(x+y)^k,\quad \sin k(x+y),\quad \cos k(x+y),\quad \exp k(x+y),\quad k=1,2,3,\cdots$$

中的每一个函数都是方程(1.1.12)的一个解,而且这些函数显然是线性无关的. 像方程(1.1.12)这样一个简单的方程就有无限多个解,它们的线性组合是否为解要进一步加以讨论. 因此在研究偏微分方程时,必须克服这种困难. 于是,我们一般宁愿直接来确定满足给定的附加条件的特解.

1.1.2 线性算子

本节将简单地讨论在偏微分方程的理论中经常遇到的线性算子.

算子是一种数学法则,把它作用在一个函数上时,便产生另外一个函数. 例如,在下列表达式中:

$$L[u] = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3},$$

$$M[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} \text{ 与 } M = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

都称为微分算子. 也有一些其他类型的算子,如

$$P[u] = \int_a^b u(x,\tau)F(\tau,y)\mathrm{d}\tau, \quad a、b \text{ 都是常数},$$

$$Q[u] = u(x,c) + u_x(x,c), \quad c \text{ 是常数},$$

其中算子 P 是一个积分算子,而算子 Q 是一个把两个自变量 x 和 y 的函数 u 变为一个自变量 x 的函数 $Q[u]$的算子.

两个微分算子 A 和 B 称为**等价的**,是把这两个算子作用在充分光滑的任意函数 u 上时,会产生同样的结果,记为 $A=B$. 此时对函数 u 有

$$A[u] = B[u], \tag{1.1.14}$$

其中 u 是充分光滑的任意函数.

两个微分算子的**和**定义为

$$(A+B)[u] = A[u] + B[u], \tag{1.1.15}$$

其中 u 为充分光滑的任意函数.

两个微分算子的积定义为

$$AB[u] = A[B[u]]. \tag{1.1.16}$$

微分算子满足下列定律：

(1) 加法交换律

$$A+B = B+A; \tag{1.1.17}$$

(2) 加法结合律

$$(A+B)+C = A+(B+C); \tag{1.1.18}$$

(3) 乘法结合律

$$(AB)C = A(BC); \tag{1.1.19}$$

(4) 乘法对加法的分配律

$$A(B+C) = AB+AC. \tag{1.1.20}$$

此外，对常系数微分算子成立；

(5) 乘法交换律

$$AB = BA, \tag{1.1.21}$$

但乘法交换律对变系数微分算子有可能不成立.

例 1.1.1　设

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial y},\quad B = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - y\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\begin{aligned}
B[u] &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial u}{\partial y},\\
AB[u] &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} - y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} + x\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\frac{\partial u}{\partial y},\\
BA[u] &= \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial x^2} + x\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - y\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

于是，当 $x\neq 0$ 时，$AB[u]\neq BA[u]$，即 $AB\neq BA$.

定义具有下列性质的算子为**线性算子**：

(1) 常数 c 可以从算子中提取出来

$$L[cu] = cL[u]; \tag{1.1.22}$$

(2) 算子作用于两个函数之和所得的结果等于算子分别作用于这两个函数上

所得结果之和

$$L[u+v]=L[u]+L[v]. \tag{1.1.23}$$

性质(1)与(2)可以组合起来表示为

$$L[au+bv]=aL[u]+bL[v], \tag{1.1.24}$$

其中 a 与 b 都是常数.

现在来考察二阶线性偏微分方程.就两个自变量来说,这种方程的形式为

$$A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_x+E(x,y)u_y+F(x,y)u = G(x,y), \tag{1.1.25}$$

其中系数 A,B,C,D,E,F 和自由项 G 都是 x 和 y 的函数.

如果取线性微分算子 L 为

$$L=A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}+D\frac{\partial}{\partial x}+E\frac{\partial}{\partial y}+F, \tag{1.1.26}$$

那么偏微分方程(1.1.25)可以写成

$$L[u]=G, \tag{1.1.27}$$

略去方括号,把上式写成

$$Lu=G.$$

1.1.3 叠加原理

对于线性偏微分方程的解,叠加原理成立.

叠加原理Ⅰ 设 u_i 满足线性方程

$$Lu_i=f_i,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则它们的线性组合

$$u=\sum_{i=1}^{n}C_iu_i$$

必满足方程

$$Lu=\sum_{i=1}^{n}C_if_i.$$

特别地,当 u_i 皆满足齐次方程时,u 也满足该齐次方程.

后面的讨论中将多次利用叠加原理,把一些复杂的问题化为若干简单的问题来解决.

在实际应用中,不仅用有限个特解叠加来作出问题的解,更多的情况是用无限个特解来叠加,这时就得到用级数或积分来表示的解.自然在后一情况,还必须证

明这些级数或积分是收敛的，而且的确是问题的解. 这样，上面的叠加原理常拓广成下面的形式.

叠加原理Ⅱ　设 u_i 满足线性方程

$$Lu_i = f_i,\quad i = 1,2,\cdots,$$

又假设它们的线性组合

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$$

在求解域上一致收敛，且满足算子 L 运算与该求和运算可交换的条件(即算子 L 中出现的各阶偏导与该级数的求和运算都可交换运算次序)，则 u 满足方程

$$Lu = \sum_{i=1}^{\infty} C_i f_i.$$

特别地，当 u_i 皆满足齐次方程时，u 也满足该齐次方程.

叠加原理Ⅲ　设含连续参变量 M_0 的解族 $u(M,M_0)$ 满足线性非齐次方程

$$Lu = f(M,M_0),$$

又假设积分

$$U(M) = \int u(M,M_0)\,\mathrm{d}M_0$$

存在，且满足算子 L 运算与该积分运算可交换的条件，则 U 满足方程

$$LU = \int f(M,M_0)\,\mathrm{d}M_0.$$

特别地，当 u 满足齐次方程时，U 也满足该齐次方程.

这些叠加原理虽然是十分明显的，但它却是线性方程许多重要解法的基础. 必须同时指出，对于非线性方程，叠加原理不成立.

1.2　三类典型方程的建立

二阶线性偏微分方程可分为三大类，即双曲型方程、抛物型方程和椭圆型方程. 它们的典型代表分别是

波动方程：

$$U_{tt} - a^2 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j{}^2} = f(x_1, x_2, \cdots, x_m, t).$$

热传导方程：

$$U_t - a^2\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j{}^2} = f(x_1, x_2, \cdots, x_m, t).$$

拉普拉斯方程：

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j{}^2} = 0.$$

许多数学物理问题都可归结为解偏微分方程的问题，特别是可归结为解三类典型方程的问题. 下面将开始研究这些方程，首先仔细地考虑表示这些物理问题的数学模型.

1.2.1　弦振动方程

一长为 l 的柔软、均匀细弦，拉紧以后，让它离开平衡位置在垂直于弦线的外力作用下作微小横振动(即弦的运动发生在同一平面内，且弦上各点的位移与平衡位置垂直). 如图 1.1 所示，试建立弦振动方程.

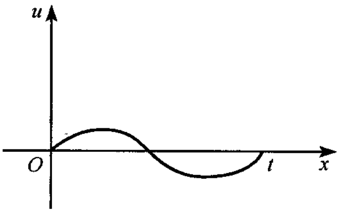


图 1.1

首先建立坐标系，取弦的平衡位置为 x 轴. 在弦线运动的平面内，垂直于弦线的平衡位置的直线为 u 轴，这样，在任意时刻 t，弦线上点 x 处的位移为

$$u = u(x, t).$$

先作一些简化假设：

(1) 弦柔软，且有弹性(即它不抵抗弯曲)；

(2) 弦的重量与张力相比很小，可忽略不计；

(3) 弦作微小的横振动. 因此，弦的偏移与弦长相比很小，斜率的绝对值与 1 相比很小.

考虑弦上一微小元素，即区间 $[x, x+\Delta x]$ 上的部分. 它的弦长为

$$\Delta S = \int_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}x. \tag{1.2.1}$$

由于“弦的偏移与弦长相比很小，斜率与 1 相比很小”，于是

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \ll 1,$$

即

$$1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx 1,$$

从而

$$\Delta S \approx \int_x^{x+\Delta x} 1\,\mathrm{d}x = \Delta x.$$

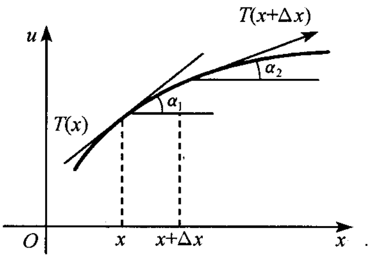


图 1.2

这样,可以认为区间$[x,x+\Delta x]$上的这段弦在振动过程中并未伸长,因此由胡克(Hooke)定律知道,弦上每一点所受张力在运动过程中保持不变,即张力与时间无关.点 x 处的张力记为 $T(x)$.又由于假设"弦柔软,且有弹性",所以张力 $T(x)$的方向总是沿着弦在点 x 处的切线方向.

如图 1.2 所示,在点 x 处的张力 $T(x)$在 x,u 两个方向上的分力分别为

$$-T(x)\cos\alpha_1,\quad -T(x)\sin\alpha_1,$$

其中 α_1 是点 x 处的切线方向与 x 轴正向的夹角,负号表示力的方向取与坐标轴相反的方向.在弦段的另一端 $x+\Delta x$ 处的张力 $T(x+\Delta x)$在 x,u 两个方向的分力分别为

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha_2,\quad T(x+\Delta x)\sin\alpha_2$$

其中 α_2 是点 $x+\Delta x$ 处的切线与 x 轴正向的夹角.

设弦的线密度为 ρ,弦段$[x,x+\Delta x]$在质心 $\bar{x}$ 处的位移为 $u(\bar{x},t)$,则这小弦段的质量和加速度的乘积为

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}.$$

当弦段不受外力作用时,根据牛顿第二定律有

$$T(x+\Delta x)\sin\alpha_2-T(x)\sin\alpha_1=\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2},\tag{1.2.2}$$

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha_2-T(x)\cos\alpha_1=0.\tag{1.2.3}$$

由于$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\ll 1$,所以

$$\cos\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha_1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]^2}}\approx 1,\tag{1.2.4}$$

$$\cos\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}\right]^2}}\approx 1,\tag{1.2.5}$$

$$\sin\alpha_1\approx\tan\alpha_1=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\tag{1.2.6}$$

$$\sin\alpha_2\approx\tan\alpha_2=\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}.\tag{1.2.7}$$

于是,式(1.2.3)变为

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com