"十一五"国家重点图书出版规划项目

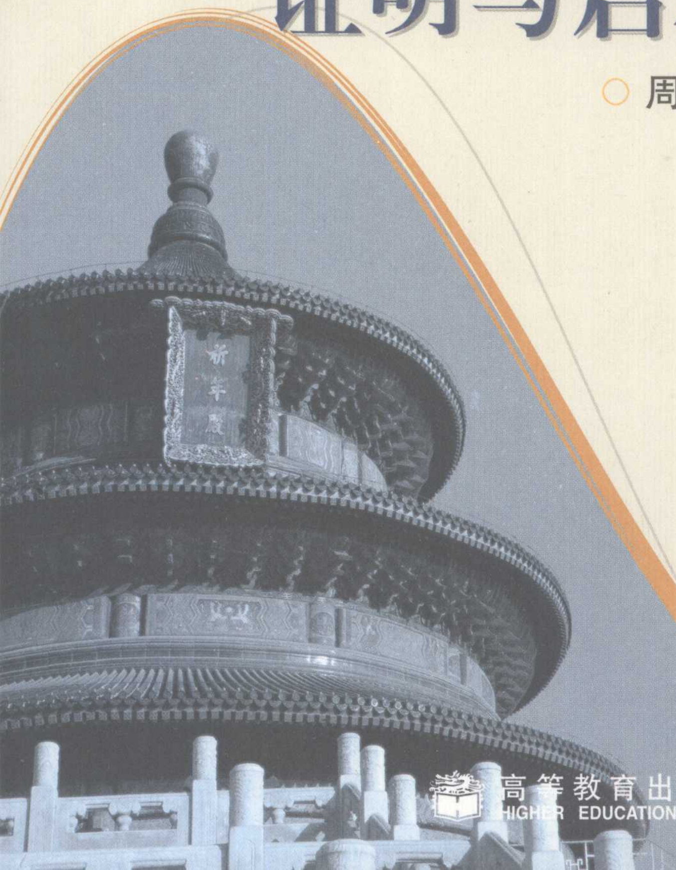
7

数学文化小丛书

李大潜 主编

费马大定理的证明与启示

周明儒



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

"十一五"国家重点图书出版规划项目

数学文化小丛书

李大潜　主编

费马大定理的证明与启示

周明儒

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

费马大定理的证明与启示/周明儒．—北京：高等教育出版社，2007.12

（数学文化小丛书/李大潜主编）

ISBN 978-7-04-022368-2

Ⅰ．费… Ⅱ．周… Ⅲ．费马最后定理－定理证明－普及读物 Ⅳ．O156-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 159495 号

策划编辑	李　蕊	**责任编辑**	崔梅萍
封面设计	王凌波	**责任绘图**	杜晓丹
版式设计	王艳红	**责任校对**	杨雪莲
责任印制	韩　刚		

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
总　　机	010－58581000	**网上订购**	http://www.landraco.com http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
印　　刷	北京鑫丰华彩印有限公司		

开　　本	787×960　1/32	**版　次**	2007 年 12 月第 1 版
印　　张	3.25	**印　次**	2007 年 12 月第 1 次印刷
字　　数	56 000	**定　价**	10.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　22368－00

数学文化小丛书编委会

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多，更远未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有专长的学者执笔，抓住主要的线索和本质的内容，由

浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长，并相对独立，以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则，有的专题单独成册，有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书，走近数学、品味数学和理解数学，充分感受数学文化的魅力和作用，进一步打开视野，启迪心智，在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005年12月

目　录

如果有人要问, 20 世纪, 在数学界里影响最大、最为轰动的事件是什么?在数学科学取得的众多新的重大成果中,最具标志性的成果是什么?数学家们会普遍地认为是**费马大定理**的证明, 而且非它莫属!

为什么费马大定理的证明会有如此大的影响?要回答这个问题,只需简要地回顾一下这个长达 358 年艰难的攀登过程, 从中我们也会得到宝贵的教益.

一、一个众所皆知的定理

在人类认识世界的历史进程中, 最早知道的几何学定理, 大概要数**勾股定理**: 直角三角形两个直角边的平方和等于其斜边的平方. 这个定理在成书不晚于公元前2世纪的西汉时期的中国古代数学著作《**周髀算经**》中已有记载. 古希腊学者**毕达哥拉斯**(Pythagoras, 约公元前580—约前500)也已发现.

勾股定理用方程式表示, 就是:

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{1}$$

满足这个方程的正整数有无穷多个. 例如

$$x = 3, y = 4, z = 5;$$

$$x=5, y=12, z=13;$$

$$x=3n, y=4n, z=5n (\text{其中}n\text{为正整数})$$

等, 都是它的解.

方程(1)的每一个正整数解(x, y, z)称为一组**勾股数**. 上面给出的这些解都是勾股数, 可见, 勾股数有无穷多组. 其实, 如果我们注意到

$$(n+1)^2-n^2=2n+1,$$

只要选取n使得$2n+1$成为一个正整数m的平方, 那么m, n和$n+1$就是一组勾股数. 例如取$n=12$, 就得到一组勾股数: 5, 12, 13.

容易验证, 毕达哥拉斯三元数组

$$\frac{m^2-1}{2}, m, \frac{m^2+1}{2} (m\text{为奇整数})$$

是勾股数. 此外, 若设m, n是正整数,$m>n$, 则

$$m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2$$

也是勾股数.

因为方程(1)的解不是唯一确定的, 所以这样的方程叫做**不定方程**.

以寻求整数解问题而著名的希腊数学家丢番图(Diophantus, 约246—330), 把自己研究过的问题汇集成一本书, 名为《算术》, 全书共13卷, 但只有6卷逃过了欧洲中世纪的战乱和破坏而幸存下来. 1621年, 法国学者巴歇(C. G.Bachet)将丢番图的《算术》翻译成拉丁文, 从而此书在欧洲得到流传.

二、费马给世人留下了一个不解之谜

大约1637年左右，法国学者费马在研究丢番图《算术》一书的第2卷时，被毕达哥拉斯三元数组的种类和数量之多吸引住了. 他进一步考虑: 如果方程(1)中未知数的幂次不是2而是3，这时方程还有正整数解吗?如果未知数的幂次都是4呢?一般地，不定方程

$$x^n + y^n = z^n (n > 2) \tag{2}$$

有没有正整数解呢?

经过深入的思考之后，他在《算术》这本书靠近问题8的页边处，写了下面一段话:

“一个立方数不能分拆为两个立方数，一个四次方数不能分拆为两个四次方数，一般说来，除平方之外，任何次幂都不能分拆为两个同次幂. 我已找到了一个奇妙的证明，但书边空白太窄，写不下.”

也就是说，**方程(2)在$n > 2$时没有正整数解.**

这就是困惑了世间数学家们长达358年之久的著名的**费马大定理**.

1665年费马去世，他的长子塞缪尔(C. Samuel)花了5年时间收集他父亲的注记和信件，1670年他出版了《附有费马评注的丢番图的算术》(Diophantus' Arithmetica Containing Observations by P.de Fermat). 书中包含了原版希腊文, 巴歇的拉丁文译文以及费马的48个评注.

从此, 费马的上述论断被广为传知, 并在三百多年里使一代代数学家们为了寻求它的证明而伤透了脑筋.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
TOLOSAE,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

图1　1670年出版的《附有费马评注的丢番图的算术》一书的扉页

三、“业余数学家之王”——费马

图2　费马

皮埃尔·德·费马(Pierre de Fermat,1601—1665)1601年8月20日出生于法国西南部罗马涅镇一个富有的皮革商家庭，早年在修道院受教育，后在图卢兹大学工作. 1631年获奥尔良大学民法学士学位，后被任命为图卢兹议会顾问，任务是与国王联络并保证国王的命令在本地区得以执行. 因鼠疫的流行，作为幸存者的费马很快晋升为图卢兹议会最高法庭的大法官. 费马没有政治野心，尽力避开议会中的混战,

而把公务以外的时间和精力都用到了他所钟爱的数学上，并在数学的众多领域取得了杰出的成就，被世人誉为"业余数学家之王".

他和笛卡儿(R. Descartes, 1596—1650)齐名，是**解析几何的创立者之一**. 他在1629年写的《论平面和立体的轨迹引论》一书中，清晰地阐述了解析几何的思想.

他是**微分学的先驱者之一**. 在1637年的一份手稿中，他给出的求函数的极值的方法几乎相当于现今微分学中所用的方法. 他还用自己的方法来求曲线的切线.

他是**近代数论的开拓者**. 他提出了不少关于整数性质的定理，或者说是猜想，因为他只对其中个别命题留下了自己的证明. 但这些猜想绝大多数已经被后人所证实. 例如：

1640年提出的**费马小定理**：对任意的整数a和任意的素数p, $a^p - a$可以被p整除. 这个命题于1736年被欧拉(Euler)所证明.

平方和问题：1. 将一个正整数表示成两个整数的平方和，对于每个形如$4n+1$的素数及其平方，都只有一种方式；而对每个形如$4n+1$的素数的三次方和四次方，都可以有两种方式；对其五次方和六次方都可以有三种方式，如此等等，以至无穷. 例如当$n=1$时，

$$5 = 2^2 + 1^2,$$

$$5^2 = 3^2 + 4^2,$$

$$5^3 = 2^2 + 11^2 = 5^2 + 10^2,$$

等等. 2. 每个正整数可表示成四个或少于四个平方数之和. 上述两个命题, 分别被欧拉于1754年和拉格朗日(Lagrange)于1770年所证明.

费马的众多猜想中也有个别是不对的. 例如1640年他在给梅森(Mersenne)的一封信中断言: 形如$2^{2^n}+1(n=0,1,2,\cdots)$的数永远是素数. 这种数被称作**费马数**, 记为F_n. 当$n=0,1,2,3,4$时F_n的确是素数, 但在1732年, 欧拉指出$F_5 = 641 \times 6700417$并非素数, 而且后来人们发现, 从5到16的所有n, F_n都不是素数. 这个猜想是完全错了.

费马还是**概率论的先驱者之一**. 1654年左右, 他与帕斯卡(B.Pascal, 1623—1662)在一系列通信中讨论了"如果赌博中途结束, 如何分配赌金才合理"等概率问题, 并用组合方法给出了正确的解答.

费马是一个隐身独处而无意名利的天才, 他认为公开发表和被人们承认对他来说没有任何意义, 他因自己能够发现新的未被他人所知的定理带来的快乐而心满意足. 虽然他也在给一些数学家的信中叙述自己的最新发现, 但不提供相应的证明. 这种"恶作剧"除了使自己有一种让同行们烦恼而带来的满足外, 也可以使自己无需承受别人的挑剔的折磨, 并且无需花时间去完善自己的证法. 这位缄默的天才放弃了成名的机会, 同时也避免了被别人质疑带来的分心.

四、漫长探索之路的三个阶段

费马关于不定方程(2)没有正整数解的论断，究竟是不是如他所说“已找到了一个奇妙的证明”，这已成为数学史上的一个千古之谜.

但从这一论断在1670年公诸于世起，一代代的数学家，包括像瑞士数学家欧拉、德国数学家高斯、法国数学家柯西、勒贝格这样一些各领风骚上百年的数学大师在内，以各种不同的方法尝试证明费马大定理，但都没有成功.

这个难题，一直到1994年，才被一位英国的青年数学家安德鲁·怀尔斯彻底解决.

从费马发现这个定理到怀尔斯给出严格的证明，前前后后一共358年，其间大致可以分为三个阶段:

第一阶段，1637—1840年间对一些n逐个地研究;

第二阶段，1840—1982年间取得了第一次重大突破但长期停滞不前;

第三阶段，1983—1994年间取得第二次重大突破和问题得到彻底解决.

五、二百年里只前进了四小步

在1637—1840年间，人们所掌握的数学知识还只能够对这个问题进行逐个的、具体的研究. 但问题是如此艰难，二百年里，人们只证明了当n为3, 4, 5, 7这些值时费马大定理成立，在那无尽头的正整数的长河中只前进了小小的四步.

费马用"无限下降法"证明了$n = 4$的情形

1637年，费马本人用他创造的"无限下降法"证明了当$n = 4$ 时方程(2)没有正整数解. 无限下降法的大意是：为了证明当$n = 4$ 时方程(2)没有正整数解，用反证法. 假设有解(x_1, y_1, z_1)，则可证明必有一个"小一些"的解(x_2, y_2, z_2)，其中z_2是比z_1小的正整数;继而又可证明存在一个"更小"的解(x_3, y_3, z_3)，z_3是比z_2 小的正整数，如此可以一直推下去，但是，z_1, $z_2, z_3, \cdots$ 必须是正整数，因此这一过程不可能永远进行下去，所以，当$n = 4$ 时方程(2) 不可能有正整数解.