硕士研究生入学考试辅导与综合训练

数学分册

考研辅导教材

硕士研究生入学考试辅导与综合训练

（数学分册）

北京大学数学系　田茂英　主编

科学普及出版社
·北　京·

（京）新登字第 026 号

图书在版编目（CIP）数据

硕士研究生入学考试辅导与综合训练：数学分册/田茂英主编.
—北京：科学普及出版社，1995.6
ISBN 7—110—03998—6
Ⅰ.硕… Ⅱ.田… Ⅲ.①研究生—入学考试—教学参考资料
②数学—研究生—入学考试—教学参考资料 Ⅳ.①G643.201—42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 11623 号

科学普及出版社出版
北京海淀区白石桥路 32 号　　邮政编码：100081
新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经销
河北省香河县胶印厂印刷
※
787×1092 毫米 1/16　　印张 25.5　字数：598 千字
1995 年 6 月第 1 版　　1996 年 3 月第 2 次印刷
印数：6000—10000 册　　定价：31.00 元

内容简介

本书是硕士研究生入学考试数学复习用书。全书分为高等数学、线性代数、概率论、复变函数与经济数学四部分。本书对基本概念、基本理论、计算公式等作了简明叙述。重点精选了大量例题，并进行分析讲解，同时对解题方法和技巧作了归纳总结。这些都便于提高考生的应试能力。

本书可供工科类（数学一、二、三）、经济学类（数学四、五）及工商管理（MBA）的硕士研究生入学考试应试者选用，也可作为理工科及经济学类大专院校的学生、电大生和夜大生参考。

主　　编　田茂英

编　　写　田茂英
　　　　　张立昂

策　　划　胡东华

责任编辑　肖　叶

封面设计　胡东华

前　言

近几年来，报考硕士研究生的人数不断增加。为了帮助考生在短时间内系统地复习数学知识，掌握重点，熟悉统考命题的内容，应广大考生的要求，根据国家教委新修订的工学与经济学硕士研究生入学考试数学大纲编写了这本书。

本书对大纲所要求的概念、定理和公式进行简明、扼要地叙述，便于复习。重点是精选了各类题型的例题，并作详细的解答。每节(或章)后均附有适当数量的习题(第四篇除外)，全部习题都附有答案或提示，以便读者练习。本书的题目来源于编者多年的教学积累。以及根据编者以往研究生入学考试的命题、评卷经验编写而成。

本书对重点例题，或在解答之前作了解题方法分析，或题后有关键的注释。部分题目一题多解，这些都有利于提高考生的解题、应试能力。此外本书也介绍了考试中常见题型，并以例题形式作了重点介绍。

根据考试大纲，数学一、二包括本书第一、二两篇的全部内容。概率论、复变函数两门学科由数学一的考生任选其一。数学三包括第一篇的一、二章，第六章§1 及§2 的部分内容。数学四包括第一篇的一、二章，第三章§2、§3，第四章§1，第五章§1，§2，第六章§1及§2 的部分内容，第二(第四章§1 除外)、三两篇的全部内容，第四篇的第二章。数学五包括第一篇的一、二章，第三章§2、§3，第二篇的一、二、三章，第四章§2，第三篇的一、二两章，第四篇的第二章。MBA 数学的要求与数学五相同。除此之外，还对有些内容及题目加以＊号。凡带＊、＊＊的部分，对数学三、数学四、数学五及 MBA 数学的考生都不要求；凡带＊＊者是适当拓宽的内容，对数学一、数学二的考生，一般不要求，可根据需要由读者自行取舍。这样，更便于不同类考生选用，也有利于广大读者阅读。

本书还将近几年来的全国硕士研究生入学考试数学试题作了简单分析，放在附录中，供读者参考。读者通过对近几年考研试题中各知识点所占分数统计，可把握重点，了解考试规律和趋势。

本书不仅是研究生入学考试应试者的一本复习用书，同时我们希望对正在学习高等数学、线性代数、概率论及复变函数的理工学、经济学类院校的本科生、大专生、电大、夜大的学生，也是一本好的参考书。由于硕士研究生入学考试数学大纲比较固定，极少有变化，因此本书对近几年研究生入学考试也都有效。

本书的编写得到了郭懋正教授和黄少云教授的支持，在此表示感谢。

与这本书配合，我们另编六套模拟试题单独出版，读者可结合使用。

由于水平有限，时间仓促，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

于

目　录

常用记号

∀，表示任意一个；

∃，表示存在，有一个；

A⇒B，表示A蕴涵B，即如果A则必B；

A⇔B，表示A与B等价，即A以B为充分必要条件。

第一篇　高等数学

第一章　一元函数微分学

§1　极限与连续

一、极限的概念及运算

1. 数列的极限

(1)**定义**　设有数列$\{x_n\}$及数a，如果对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数N，当$n>N$时，有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

则称数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时以a为极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$或$x_n\to a$(当$n\to\infty$)。也称$\{x_n\}$收敛。

数列$\{x_n\}$是否收敛以及极限a均与$\{x_n\}$的前有限项无关。

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ 称无穷级数$\sum u_n$收敛

(2)若$\{x_n\}$的极限存在，则极限唯一。

2. 函数的极限

(1)**定义**　函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义(可能不包括点x_0)，A为某个确定的常数，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称函数$f(x)$当$x\to x_0$时以A为极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，或$f(x)\to A$(当$x\to x_0$)。

(2)单侧极限

左极限：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Longleftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当$x_0-\delta<x<x_0$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，亦可记作$f(x_0-0)=A$。

右极限：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Longleftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当$x_0<x<x_0+\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，亦可记为$f(x_0+0)=A$。

(3)左、右极限与极限的关系

定理1　极限存在$\Leftrightarrow$左、右极限存在且相等。此定理常用来证明分段函数在分段点处极限的存在性。

3. 极限的运算法则

若 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

(2) $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$　特别

$\lim Cf(x)=C\lim f(x)=CA$，C 为常数

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$，$(B\neq 0)$

注　1° 极限过程为 $x\to x_0$（或 $x\to x_0^+,x\to x_0^-,x\to\infty$ 等）

2°(1)，(2)可推广到有限个函数的极限。

4. 性质

(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且 $A>B$，则∃ $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>g(x)$

(2)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且存在一个 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\geqslant g(x)$，则 $A\geqslant B$

(3)**夹逼定理**：若∃ $\delta_0>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时，有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$。

5. 无穷小量与无穷大量

(1)**定义**　若函数（或数列）以零为极限，则称该函数（或数列）为无穷小量。非零无穷小量的倒数为无穷大量。

(2)无穷小量的阶

设 $\alpha(x),\beta(x)$ 都是 x 的同一极限过程的无穷小量。

1°　若　$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量，记作 $\alpha(x)=0(\beta(x))$

2°　若　$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小量

3°　若　$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等阶的无穷小量，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x))$

4°　若　$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k_{(x)}}=C\neq 0$，($k$ 为常数)，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小量。

(3)极限与无穷小量的关系

定理 2　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$

二、求极限的常用方法

1. 证明数列极限存在的常用方法：

(1)单调增（或减）且有上（或下）界的数列有极限。

(2)夹逼定理。

(3)利用函数极限与数列极限的关系。

定理 3 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ （A 为有限或∞）$\Leftrightarrow$对任何以 x_0 为极限的数列$\{x_n\}(x_n\neq x_0)$都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

该定理还常用来证明函数的极限不存在。

2.求极限是最基本的运算，也是必定考的问题。求极限的主要方法如下：

(1)利用极限的运算法则及函数的连续性；

(2)利用两个重要极限： $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

(3)利用函数的单调有界性；

(4)利用无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量；

(5)用夹逼定理；

(6)用洛必达法则；

(7)利用等价无穷小量及台劳公式；

(8)利用导数与定积分的定义；

(9)利用微分中值定理和积分中值定理。

另外，求极限还常用以下结果：

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

三、常考题型例题分析

1.用极限的定义证明极限

例 1 用“$\varepsilon-N$”的方法证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n^2-3}=0$。

分析 根据定义，$\forall\ \varepsilon>0$，要找 $N>0$，使当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{n}{n^2-3}-0\right|=\frac{n}{n^2-3}<\varepsilon$$

如何找 N？首先要从上面最后的不等式中解出 n，为便于这样做，要通过适当放大，消去分子中的 n，只让分母含有 n。

由于 $n\to\infty$，故可设 $n>3$，从而(用 n 代替分母中的 3)有

$\dfrac{n}{n^2-3}<\dfrac{n}{n^2-n}=\dfrac{1}{n-1}$，要使$\left|\dfrac{n}{n^2-3}-0\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{n-1}<\varepsilon$，即只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}+1$，这样就可

取到 N

证明 不妨设 $n>3$，$\forall\ \varepsilon>0$，取 $N\geqslant\max\{\frac{1}{\varepsilon}+1,3\}$，当 $n>N$ 时，就有

$\left|\frac{n}{n^2-3}-0\right|<\varepsilon$， 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2-3}=0$

注 要使 $\frac{1}{n-1}<\varepsilon$，只要取 $N\geqslant\frac{1}{\varepsilon}+1$ 即可，但前面已设 $n>3$，故取 $N\geqslant\max\{\frac{1}{\varepsilon}+1,3\}$

例 2 用定义证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}|q|^n=0(|q|<1)$

证法一 $\forall\ \varepsilon>0$，要使 $||q|^n-0|=|q|^n<\varepsilon$，只要 $n\ln|q|<\ln\varepsilon$，即只要 $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$（因为 $|q|<1$，故 $\ln|q|<0$），可取 $N\geqslant\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，当 $n>N$ 时，就有

$$||q|^n-0|<\varepsilon$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty}|q|^n=0$

证法二 $\because|q|<1$，故可令 $|q|=\frac{1}{1+h}(h>0)$，从而 $|q|^n=\frac{1}{(1+h)^n}$，$(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2!}h^2+\cdots+h^n>nh$，于是 $|q|^n=\frac{1}{(1+h)^n}<\frac{1}{nh}$，$\forall\ \varepsilon>0$，要使 $||q|^n-0|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{nh}<\varepsilon$，即只要 $n>\frac{1}{h\varepsilon}$，故可取 $N=[\frac{1}{h\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时，就有 $||q|^n-0|<\varepsilon$

例 3 用定义证明 $\lim\limits_{x\to3}x^2=9$

分析 由定义，$\forall\ \varepsilon>0$，要找 $\delta>0$，使当 $0<|x-3|<\delta$ 时，有 $|x^2-9|<\varepsilon$。

为找 $\delta>0$，要从最后的不等式中解出 $|x-3|$。因为 $|x^2-9|=|x+3||x-3|$，将其中的 $|x+3|$ 用数代替，为此可设 $|x-3|<1$（因为 $x\to3$），即 $-1<x-3<1$，于是 $5<x+3<7$，由此得 $|x+3|<7$，这样就容易找到 δ（在证明时，也可不写出分析）

证明 不妨设 $|x-3|<1$。因为

$$|x^2-9|=|x+3||x-3|<7|x-3|$$

$\forall\ \varepsilon>0$，要使 $|x^2-9|<\varepsilon$，只要 $7|x-3|<\varepsilon$，即只要 $|x-3|<\frac{\varepsilon}{7}$，故可取 $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{7},1\}$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，就有 $|x^2-9|<\varepsilon$，这就证明了 $\lim\limits_{x\to3}x^2=9$

2. 用单调有界性求极限

例 4 设 $a>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})(n=1,2,\cdots)$

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$。

解 (1) $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\geqslant\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}>0$，$\Rightarrow x_n\geqslant\sqrt{a}\ (n\geqslant2)$ 即 $\{x_n\}$ 有下界。

由此得 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})-x_n=\frac{a-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0$，即$\{x_n\}$单调下降。

因此$\lim\limits_{x\to+\infty}x_n$存在。

(2)设$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\beta$，由(1)$\beta\geqslant\sqrt{a}>0$。对递推公式两端取极限，得$\beta=\frac{1}{2}(\beta+\frac{a}{\beta})$，解得$\beta=\pm\sqrt{a}$(舍去负值)，$\therefore\beta=\sqrt{a}$。

注 求数列的极限分两步：1° 先用数学归纳法证明数列单调有界，从而数列有极限；2° 设$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\beta$，对给定$x_n$的递推公式两端取极限，表达式变为$\beta$的代数方程，最后解出$\beta$。

例 5 设$x_1=\sqrt{A}(A>0)$，$x_2=\sqrt{A+\sqrt{A}}$，…

$x_n=\sqrt{A+\sqrt{A+\cdots+\sqrt{A}}}(n=1,2\cdots)$，求$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$。 $\frac{A}{x_n}<\frac{A}{x_1}=\sqrt{A}$

解 (1)先证$\{x_n\}$单调增加且有上界。

$\because x_2=\sqrt{A+\sqrt{A}}=\sqrt{A+x_1}>x_1$ $x_n=\frac{A}{x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_n}<\sqrt{A}+1$ <1

假设当$n=k$ 时，有$x_k>x_{k-1}$，那么由$A+x_k>A+x_{k-1}$，知

$\sqrt{A+x_k}>\sqrt{A+x_{k-1}}$，即$x_{k+1}>x_k$，故对$n=k+1$也成立。由数学归纳原理知$\{x_n\}$单调增加。

再证数列$\{x_n\}$有界。$\because x_1=\sqrt{A}<\sqrt{A}+1$，设当$n=k$时，有$x_k<\sqrt{A}+1$，那么当$n=k+1$时

$x_{k+1}=\sqrt{A+x_k}<\sqrt{A+\sqrt{A}+1}<\sqrt{A+2\sqrt{A}+1}=\sqrt{(\sqrt{A}+1)^2}=\sqrt{A}+1$，因此$\{x_n\}$有上界。从而数列$\{x_n\}$收敛。

(2)再求$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$。设$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\alpha$。将$x_{n+1}=\sqrt{A+X_n}(n=1,2,\cdots)$两端取极限，得$\alpha=\sqrt{A+\alpha}$，解得$\alpha=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1+4A})$，由(1)知$\alpha>0$，因此

$$\alpha=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4A})。$$

3. 用夹逼定理求数列的极限

例 6 求$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$ $\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

错误做法：原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots$

$+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}=0+0\cdots+0$。因为当$n\to+\infty$时，项数无限增加，不能用极限运算法则。

正确作法：$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，根据夹逼定理知

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

例 7 证明数列

$$a_n=\frac{11\times12\times13\times\cdots\times(n+10)}{2\times5\times8\times\cdots\times(3n-1)}\quad(n=1,2,\cdots)$$

$\frac{n+10}{3n-4}$

收敛，并求其极限值

分析 $a_n=11\times\dfrac{12}{2}\times\dfrac{13}{5}\times\cdots\times\dfrac{7+10}{3\times7-4}\times\dfrac{8+10}{3\times8-4}\times\cdots\times\dfrac{n+10}{3n-4}\times\dfrac{1}{3n-1}$，注意到只要 $n>7$，就有 $3n-4>n+10$，从而有

$$\frac{8+10}{3\times8-4},\frac{9+10}{3\times9-4},\cdots,\frac{n+10}{3n-4}\quad(n\geqslant8)\text{都小于 }1$$

证明 令 $M=11\times\dfrac{12}{2}\times\dfrac{13}{5}\times\cdots\times\dfrac{7+10}{3\times7-4}$，则

$$0<a_n<M\frac{1}{3n-1}\to0(\text{当 }n\to+\infty)$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$。

完全类似可证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0(a>0)$。这只要注意到，对 $a>0$，$\exists\ N_1$，使得 $N_1\geqslant a$，当 $n>N_1$ 时，$0<\dfrac{a^n}{n!}=\dfrac{a}{1}\cdot\dfrac{a}{2}\cdots\dfrac{a}{N_1}\cdot\dfrac{a}{N_1+1}\cdots\dfrac{a}{n-1}\cdot\dfrac{a}{n}<\dfrac{a^{N_1}}{N_1!}\cdot\dfrac{a}{n}$

4. 有界变量与无穷小量的积及两个重要极限

例 8 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$

解 $\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}=-2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$，因为 $\left|-2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant2$，而 $0\leqslant\left|\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|<\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|=\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\to0$ 当$(x\to+\infty)$，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=0$，

因此，$\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})=0$

例 9 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$

解法一 因为$(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x=[(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^2]^{\frac{x}{2}}=[1+\sin\dfrac{2}{x}]^{\frac{x}{2}}$，所以

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}\right\}^{\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}=\mathrm{e}$$

解法二 用洛必达法则。

$$\text{因为}\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\xlongequal{\text{令 }x=\frac{1}{t}}\lim_{t\to0}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}$$