

硕士研究生入学考试辅导与综合训练

数学分册



考研辅导教材

硕士研究生入学考试辅导与综合训练

(数 学 分 册)

北京大学数学系 田茂英 主编

科学普及出版社

· 北 京 ·

(京)新登字第 026 号

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试辅导与综合训练:数学分册/田茂英主编.

—北京:科学普及出版社,1995.6

ISBN 7-110-03998-6

I. 硕… II. 田… III. ①研究生—入学考试—教学参考资料
②数学—研究生—入学考试—教学参考资料 IV. 1.G643.2.01-42

中国版本图书馆(CIP)数据核字(95)第11623号

科学普及出版社出版

北京海淀区白石桥路32号 邮政编码:100081

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经销

河北省香河县胶印厂印刷

※

787×1092毫米 1/16

印张 25.5 字数:598千字

95年6月第1版

1996年3月第2次印刷

印数:6000—10000册

定价:31.00元

内 容 简 介

本书是硕士研究生入学考试数学复习用书。全书分为高等数学、线性代数、概率论、复变函数与经济数学四部分。本书对基本概念、基本理论、计算公式等作了简明叙述。重点精选了大量例题,并进行分析讲解,同时对解题方法和技巧作了归纳总结。这些都便于是高考生的应试能力。

本书可供工科类(数学一、二、三)、经济学类(数学四、五)及工商管理(MBA)的硕士研究生入学考试应试者选用,也可作为理工科及经济学类大专院校的学生、电大生和夜大生参考。

主 编 田茂英

编 写 田茂英
张立昂

策 划 胡东华

责任编辑 肖 叶

封面设计 胡东华

前 言

近几年来,报考硕士研究生的人数不断增加。为了帮助考生在短时间内系统地复习数学知识,掌握重点,熟悉统考命题的内容,应广大考生的要求,根据国家教委新修订的工学与经济学硕士研究生入学考试数学大纲编写了这本书。

本书对大纲所要求的概念、定理和公式进行简明、扼要地叙述,便于复习。重点是精选了各类题型的例题,并作详细的解答。每节(或章)后均附有适当数量的习题(第四篇除外),全部习题都附有答案或提示,以便读者练习。本书的题目来源于编者多年的教学积累。以及根据编者以往研究生入学考试的命题、评卷经验编写而成。

本书对重点例题,或在解答之前作了解题方法分析,或题后有关键的注释。部分题目一题多解,这些都有利于提高考生的解题、应试能力。此外本书也介绍了考试中常见题型,并以例题形式作了重点介绍。

根据考试大纲,数学一、二包括本书第一、二两篇的全部内容。概率论、复变函数两门学科由数学一的考生任选其一。数学三包括第一篇的一、二章,第六章§1及§2的部分内容。数学四包括第一篇的一、二章,第三章§2、§3,第四章§1,第五章§1、§2,第六章§1及§2的部分内容,第二(第四章§1除外)、三两篇的全部内容,第四篇的第二章。数学五包括第一篇的一、二章,第三章§2、§3,第二篇的一、二、三章,第四章§2,第三篇的一、二两章,第四篇的第二章。MBA 数学的要求与数学五相同。除此之外,还对有些内容及题目加以*号。凡带*、**的部分,对数学三、数学四、数学五及MBA 数学的考生都不要求;凡带**者是适当拓宽的内容,对数学一、数学二的考生,一般不要求,可根据需要由读者自行取舍。这样,更便于不同类考生选用,也有利于广大读者阅读。

本书还将近年来的全国硕士研究生入学考试数学试题作了简单分析,放在附录中,供读者参考。读者通过对近几年考研试题中各知识点所占分数统计,可把握重点,了解考试规律和趋势。

本书不仅是研究生入学考试应试者的一本复习用书,同时我们对正在学习高等数学、线性代数、概率论及复变函数的理工学、经济学类院校的本科生、大专生、电大、夜大的学生,也是一本好的参考书。由于硕士研究生入学考试数学大纲比较固定,极少有变化,因此本书对近几年研究生入学考试也都有效。

本书的编写得到了郭懋正教授和黄少云教授的支持,在此表示感谢。

与这本书配合,我们另编六套模拟试题单独出版,读者可结合使用。

由于水平有限,时间仓促,书中难免有不妥之处,欢迎读者批评指正。

目 录

第一篇 高等数学.....	(1)
---------------	-----

第一章 一元函数微分学.....	(1)
------------------	-----

△ § 1 极限与连续	(1)
习题一	(13)
答案与提示	(14)
§ 2 导数 微分及其运算.....	(15)
习题二	(26)
答案与提示	(28)
§ 3 微分学中值定理及微分学的应用.....	(29)
习题三	(42)
答案与提示	(44)

第二章 一元函数积分学	(45)
-------------------	------

△ § 1 不定积分.....	(45)
习题一	(54)
答案与提示	(55)
§ 2 定积分.....	(56)
习题二	(69)
答案与提示	(71)
§ 3 广义积分与定积分的应用.....	(72)
习题三	(84)
答案与提示	(85)

第三章 空间解析几何与多元函数微分学	(87)
--------------------------	------

§ 1 空间解析几何与向量代数.....	(87)
习题一	88
答案与提示	
△ § 2 多元函数 极限 偏导数与全微分.....	

习题二.....	(108)
答案与提示.....	(110)
§3 多元函数微分学的应用	(112)
习题三.....	(120)
答案与提示.....	(121)

第四章 多元函数积分学..... (122)

§1 重积分	(122)
习题一.....	(138)
答案与提示.....	(139)
§2 曲线积分与曲面积分	(140)
习题二.....	(157)
答案与提示.....	(158)

第五章 级数..... (160)

§1 常数项级数	(160)
习题一.....	(169)
答案与提示.....	(171)
§2 函数项级数与幂级数	(171)
习题二.....	(183)
答案与提示.....	(185)
§3 富氏级数	(186)
习题三.....	(191)
答案与提示.....	(192)

第六章 常微分方程..... (193)

§1 基本概念 一阶微分方程	(193)
习题一.....	(200)
答案与提示.....	(201)
§2 高阶微分方程	(202)
习题二.....	(214)
答案与提示.....	(215)

线性代数..... (217)

第一章 行列式	(217)
✓ § 1 n 阶行列式的概念与性质	(217)
§ 2 应用	(223)
习题一	(227)
答案与提示	(228)
第二章 线性方程组	(230)
✓ § 1 矩阵消元法	(230)
§ 2 n 维向量	(235)
习题二	(240)
答案与提示	(242)
§ 3 矩阵的秩	(243)
§ 4 线性方程组解的结构	(245)
习题三	(249)
答案与提示	(251)
第三章 矩阵代数	(252)
✓ § 1 矩阵的运算	(252)
§ 2 逆矩阵	(258)
习题四	(263)
答案与提示	(265)
第四章 线性空间 特征值与特征向量	(267)
✓ § 1 线性空间	(267)
§ 2 矩阵的特征值与特征向量	(271)
习题五	(278)
答案与提示	(281)
第五章 二次型	(283)
§ 1 二次型和它的标准形	(283)
§ 2 正定二次型	(291)
§ 3 正交变换与正交矩阵	
习题六	

答案与提示	(300)
第三篇 概率论	(302)
第一章 随机事件和概率	(302)
§ 1 随机事件和样本空间	(302)
§ 2 事件之间的关系与运算	(302)
§ 3 概率的定义及基本性质	(304)
§ 4 概率的计算公式	(305)
§ 5 例题	(306)
习题一	(308)
答案与提示	(310)
第二章 随机变量及其概率分布	(311)
§ 1 随机变量及其概率分布	(311)
§ 2 数学期望的方差	(313)
§ 3 常见分布	(315)
§ 4 例题	(318)
习题二	(321)
答案与提示	(323)
第三章 二维随机变量及其概率分布	(325)
§ 1 二维随机变量及其概率分布	(325)
§ 2 随机变量的独立性	(327)
§ 3 二元随机变量函数的分布	(327)
§ 4 协方差和相关系数	(328)
§ 5 常见二维分布	(329)
§ 6 例题	(329)
习题三	(332)
答案与提示	(334)
第四章 大数定律和中心极限定理	(336)
习题四	(338)
答案与提示	(338)

第五章 数理统计初步.....	(339)
-----------------	-------

§ 1 样本与统计量	(339)
§ 2 参数估计	(340)
§ 3 假设检验	(343)
§ 4 例题	(345)
习题五.....	(347)
答案与提示.....	(348)

第四篇 复变函数与经济数学	(349)
---------------------	-------

第一章 复变函数.....	(349)
---------------	-------

§ 1 解析函数	(349)
§ 2 复变函数的积分	(352)
§ 3 罗朗级数	(358)
§ 4 留数	(361)
§ 5 共形映射	(370)

第二章 Δ 经济数学.....	(376)
------------------------	-------

附录 1 试题分析及启示	(382)
--------------------	-------

附录 2 数学一至五级 MBA 数学适用专业及考试说明	(392)
-----------------------------------	-------

常用记号

$\forall$, 表示任意一个;

$\exists$, 表示存在, 有一个;

$A \Rightarrow B$, 表示 A 蕴涵 B, 即如果 A 则必 B;

$A \Leftrightarrow B$, 表示 A 与 B 等价, 即 A 以 B 为充分必要条件。

第一篇 高等数学

第一章 一元函数微分学

§1 极限与连续

一、极限的概念及运算

1. 数列的极限

(1) 定义 设有数列 $\{x_n\}$ 及数 a , 如果对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \epsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时以 a 为极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 或 $x_n \rightarrow a$ (当 $n \rightarrow \infty$)。也称 $\{x_n\}$ 收敛。

数列 $\{x_n\}$ 是否收敛以及极限 a 均与 $\{x_n\}$ 的前有限项无关。

lim $x_n = a$ 称为无穷级数收敛

(2) 若 $\{x_n\}$ 的极限存在, 则极限唯一。

2. 函数的极限

(1) 定义 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义 (可能不包括点 x_0), A 为某个确定的常数, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时以 A 为极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A$ (当 $x \rightarrow x_0$)。

(2) 单侧极限

左极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 亦可记作 $f(x_0 - 0) = A$ 。

右极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 亦可记为 $f(x_0 + 0) = A$ 。

(3) 左、右极限与极限的关系

定理 1 极限存在 $\Leftrightarrow$ 左、右极限存在且相等。此定理常用来证明分段函数在分段点处极限的存在性。

3. 极限的运算法则

若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$$

$$(2) \lim f(x) \cdot g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB \quad \text{特别}$$

$$\lim C f(x) = C \lim f(x) = CA, C \text{ 为常数}$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}, (B \neq 0)$$

注 1° 极限过程为 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow \infty$ 等)

2° (1), (2) 可推广到有限个函数的极限。

4. 性质

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 且 $A > B$, 则 $\exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

有 $f(x) > g(x)$

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 且存在一个 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) \geq g(x)$, 则 $A \geq B$

(3) 夹逼定理: 若 $\exists \delta_0 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_0$ 时, 有 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$.

5. 无穷小量与无穷大量

(1) 定义 若函数(或数列)以零为极限, 则称该函数(或数列)为无穷小量。非零无穷小量的倒数为无穷大量。

(2) 无穷小量的阶

设 $\alpha(x), \beta(x)$ 都是 x 的同一极限过程的无穷小量。

1° 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量, 记作 $\alpha(x) = o(\beta(x))$

2° 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小量

3° 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等阶的无穷小量, 记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

4° 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)^k} = C \neq 0, (k \text{ 为常数})$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小量。

(3) 极限与无穷小量的关系

定理 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$

二、求极限的常用方法

1. 证明数列极限存在的常用方法:

(1) 单调增(或减)且有上(或下)界的数列有极限。

(2) 夹逼定理。

(3) 利用函数极限与数列极限的关系。

定理 3 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ (A 为有限或 ∞) $\Leftrightarrow$ 对任何以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$ ($x_n \neq x_0$)

都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

该定理还常用来证明函数的极限不存在。

2. 求极限是最基本的运算,也是必定考的问题。求极限的主要方法如下:

(1) 利用极限的运算法则及函数的连续性;

(2) 利用两个重要极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

(3) 利用函数的单调有界性;

(4) 利用无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量;

(5) 用夹逼定理;

(6) 用洛必达法则;

(7) 利用等价无穷小量及台劳公式;

(8) 利用导数与定积分的定义;

(9) 利用微分中值定理和积分中值定理。

另外,求极限还常用以下结果:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0); \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

三、常考题型例题分析

1. 用极限的定义证明极限

例 1 用“ $\epsilon-N$ ”的方法证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2-3} = 0$ 。

分析 根据定义, $\forall \epsilon > 0$, 要找 $N > 0$, 使当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{n}{n^2-3} - 0 \right| = \frac{n}{n^2-3} < \epsilon$$

如何找 N ? 首先要从上面最后的不等式中解出 n , 为便于这样做, 要通过适当放大, 消去分子中的 n , 只让分母含有 n 。

由于 $n \rightarrow \infty$, 故可设 $n > 3$, 从而(用 n 代替分母中的 3)有

$$\frac{n}{n^2-3} < \frac{n}{n^2-n} = \frac{1}{n-1}, \text{要使 } \left| \frac{n}{n^2-3} - 0 \right| < \epsilon, \text{只要 } \frac{1}{n-1} < \epsilon, \text{即只要 } n > \frac{1}{\epsilon} + 1, \text{这样就可}$$

取到 N

证明 不妨设 $n > 3, \forall \epsilon > 0$, 取 $N \geq \max\{\frac{1}{\epsilon} + 1, 3\}$, 当 $n > N$ 时, 就有

$$\left| \frac{n}{n^2-3} - 0 \right| < \epsilon, \text{ 这就证明了 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2-3} = 0$$

注 要使 $\frac{1}{n-1} < \epsilon$, 只要取 $N \geq \frac{1}{\epsilon} + 1$ 即可, 但前面已设 $n > 3$, 故取 $N \geq \max\{\frac{1}{\epsilon} + 1,$

3)

例 2 用定义证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0 (|q| < 1)$

证法一 $\forall \epsilon > 0$, 要使 $||q|^n - 0| = |q|^n < \epsilon$, 只要 $n \ln |q| < \ln \epsilon$, 即只要 $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |q|}$ (因为 $|q| < 1$, 故 $\ln |q| < 0$), 可取 $N \geq \frac{\ln \epsilon}{\ln |q|}$, 当 $n > N$ 时, 就有

$$||q|^n - 0| < \epsilon$$

这就证明了 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0$

证法二 $\because |q| < 1$, 故可令 $|q| = \frac{1}{1+h} (h > 0)$, 从而 $|q|^n = \frac{1}{(1+h)^n}$, $(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \dots + h^n > nh$, 于是 $|q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{nh}$, $\forall \epsilon > 0$, 要使 $||q|^n - 0| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{nh} < \epsilon$, 即只要 $n > \frac{1}{h\epsilon}$, 故可取 $N = [\frac{1}{h\epsilon}]$, 当 $n > N$ 时, 就有 $||q|^n - 0| < \epsilon$

例 3 用定义证明 $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$

分析 由定义, $\forall \epsilon > 0$, 要找 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x-3| < \delta$ 时, 有 $|x^2-9| < \epsilon$ 。

为找 $\delta > 0$, 要从最后的不等式中解出 $|x-3|$ 。因为 $|x^2-9| = |x+3||x-3|$, 将其中的 $|x+3|$ 用数代替, 为此可设 $|x-3| < 1$ (因为 $x \rightarrow 3$), 即 $-1 < x-3 < 1$, 于是 $5 < x+3 < 7$, 由此得 $|x+3| < 7$, 这样就容易找到 δ (在证明时, 也可不写出分析)

证明 不妨设 $|x-3| < 1$ 。因为

$$|x^2-9| = |x+3||x-3| < 7|x-3|$$

$\forall \epsilon > 0$, 要使 $|x^2-9| < \epsilon$, 只要 $7|x-3| < \epsilon$, 即只要 $|x-3| < \frac{\epsilon}{7}$, 故可取 $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{7}, 1\}$, 当 $0 < |x-3| < \delta$ 时, 就有 $|x^2-9| < \epsilon$, 这就证明了 $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$

2. 用单调有界性求极限

例 4 设 $a > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) (n=1, 2, \dots)$

(1) 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在;

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 。

解 (1) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a} > 0, \Rightarrow x_n \geq \sqrt{a} (n \geq 2)$ 即 $\{x_n\}$ 有下界。

由此得 $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0$, 即 $\{x_n\}$ 单调下降。

因此 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在。

(2) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \beta$, 由 (1) $\beta \geq \sqrt{a} > 0$ 。对递推公式两端取极限, 得 $\beta = \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{a}{\beta} \right)$, 解得 $\beta = \pm \sqrt{a}$ (舍去负值), $\therefore \beta = \sqrt{a}$ 。

注 求数列的极限分两步: 1° 先用数学归纳法证明数列单调有界, 从而数列有极限; 2° 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \beta$, 对给定 x_n 的递推公式两端取极限, 表达式变为 β 的代数方程, 最后解出 β 。

例 5 设 $x_1 = \sqrt{A} (A > 0)$, $x_2 = \sqrt{A + \sqrt{A}}$, ...

$x_n = \sqrt{A + \sqrt{A + \cdots + \sqrt{A}}} (n = 1, 2, \dots)$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 。

解 (1) 先证 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界。

$$\because x_2 = \sqrt{A + \sqrt{A}} = \sqrt{A + x_1} > x_1$$

假设当 $n = k$ 时, 有 $x_k > x_{k-1}$, 那么由 $A + x_k > A + x_{k-1}$, 知

$\sqrt{A + x_k} > \sqrt{A + x_{k-1}}$, 即 $x_{k+1} > x_k$, 故对 $n = k + 1$ 也成立。由数学归纳原理知 $\{x_n\}$ 单调增加。

再证数列 $\{x_n\}$ 有界。 $\because x_1 = \sqrt{A} < \sqrt{A} + 1$, 设当 $n = k$ 时, 有 $x_k < \sqrt{A} + 1$, 那么当 $n = k + 1$ 时

$x_{k+1} = \sqrt{A + x_k} < \sqrt{A + \sqrt{A} + 1} < \sqrt{A + 2\sqrt{A} + 1} = \sqrt{(\sqrt{A} + 1)^2} = \sqrt{A} + 1$, 因此 $\{x_n\}$ 有上界。从而数列 $\{x_n\}$ 收敛。

(2) 再求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 。设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$ 。将 $x_{n+1} = \sqrt{A + x_n} (n = 1, 2, \dots)$ 两端取极限, 得 $\alpha = \sqrt{A + \alpha}$, 解得 $\alpha = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{1 + 4A})$, 由 (1) 知 $\alpha > 0$, 因此

$$\alpha = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + 4A})。$$

3. 用夹逼定理求数列的极限

例 6 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

错误做法! 原式 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots$

$+ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} = 0 + 0 + \cdots + 0$ 。因为当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 项数无限增加, 不能用极限运算法则。

正确作法: $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, 根据夹逼定理知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$$

例7 证明数列

$$a_n = \frac{11 \times 12 \times 13 \times \cdots \times (n+10)}{2 \times 5 \times 8 \times \cdots \times (3n-1)} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

收敛, 并求其极限值

分析 $a_n = 11 \times \frac{12}{2} \times \frac{13}{5} \times \cdots \times \frac{7+10}{3 \times 7-4} \times \frac{8+10}{3 \times 8-4} \times \cdots \times \frac{n+10}{3n-4} \times \frac{1}{3n-1}$, 注意到只要 $n > 7$, 就有 $3n-4 > n+10$, 从而有

$$\frac{8+10}{3 \times 8-4}, \frac{9+10}{3 \times 9-4}, \cdots, \frac{n+10}{3n-4} \quad (n \geq 8) \text{ 都小于 } 1$$

证明 令 $M = 11 \times \frac{12}{2} \times \frac{13}{5} \times \cdots \times \frac{7+10}{3 \times 7-4}$, 则

$$0 < a_n < M \frac{1}{3n-1} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow +\infty)$$

因此 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

完全类似可证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^n}{n!} = 0 \quad (a > 0)$. 这只要注意到, 对 $a > 0, \exists N_1$, 使得 $N_1 \geq a$, 当 $n >$

$$N_1 \text{ 时, } 0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{N_1} \cdot \frac{a}{N_1+1} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n} < \frac{a^{N_1}}{N_1!} \cdot \frac{a}{n}$$

4. 有界变量与无穷小量的积及两个重要极限

例8 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x})$

解 $\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x} = -2 \sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \cdot \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}$, 因为

$$\left| -2 \sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right| \leq 2, \text{ 而 } 0 \leq \left| \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right| < \left| \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right| =$$

$$\frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \rightarrow 0 \text{ 当 } (x \rightarrow +\infty), \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} = 0,$$

因此, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x}) = 0$

例9 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$

解法一 因为 $\left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = \left[\left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^2 \right]^{\frac{x}{2}} = \left[1 + \sin \frac{2}{x} \right]^{\frac{x}{2}}$, 所以

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \left(1 + \sin \frac{2}{x} \right)^{\frac{1}{\sin \frac{2}{x}}} \right\}^{\frac{\sin \frac{2}{x}}{2} \cdot x} = e$$

解法二 用洛必达法则。

因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right) \stackrel{\text{令 } x = \frac{1}{t}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin t + \cos t)}{t}$