组合数学

COMBINATORICS

沙基昌 沙基清 编著

湖南教育出版社

组 合 数 学

沙基昌　沙基清 编著

责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版发行（东风路附1号）

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

850×1168毫米　32开　印张：10　字数：250,000

1994年5月第1版　1994年5月第1次印刷

ISBN 7—5355—1683—x/G・1658

定价：8.60元

前　言

组合数学是古老而又年轻的数学，它研究分析离散结构和关系，是现代数学的基础之一．说其古老是因其渊源甚久．中国古代的“河图”，即本书中提到的三阶魔术方就是一个例子．说其年轻是因其迅速发展却是近几十年的事．促进组合数学发展的一个重要原因是政治、经济、军事、生物等数学应用的非传统领域定量化研究发展的召唤．由于这些领域经常涉及离散结构，因此也就提出了大量的组合数学问题．计算机的崛起，由于其内部数据结构与运算过程的离散性，也提出了大量的组合数学问题，是组合数学发展的又一强大动力．同时，计算机的发展又为解决一些组合问题提供了有力的工具．这些组合问题并不能通过得到一个“公式”而简单地解决，而只能得到一个“算法”，并经过冗长的计算才能获得答案．在计算机出现之前，人们对这类问题只能望而生畏，认为“算法”不是解答．

组合数学问题常可用数学游戏的语言来表述，古典的组合数学问题就是这样的，因此很容易唤起人们的兴趣．同时组合数学问题往往并不要求系统的数学基础知识为前提，因此中学生都可探讨．解决组合数学问题常常需要“灵感”，巧妙的思路经常是关键．特别对于中学生来说，就训练思维能力与培养数学技巧而言，组合数学可能是唯一可与平面几何相媲美的．这就是为什么如今在国际、国内的中学生数学奥林匹克竞赛中少不了组合问题的原因．相信读者一定会感到组合数学既有趣、又有益，是对自己的知识与能力的极好挑战．

本书的安排既有经典的组合计数问题，又有一些较高深的方法和近年来的新发展，同时还包括了一些著名的组合设计问题．图

论是组合数学中最庞大的分支，因这方面的著作甚多，故本书中不包括图论.

本书的第一至第五章由沙基清执笔，第六至第十三章由沙基昌执笔.

谨将本书奉献给广大的数学爱好者.

沙基昌　沙基清

一九九三年五月

目　　录

第一章 绪 论

一、什么是组合数学

对于组合数学大家并不陌生，中学数学中的排列与组合即属于组合数学.

组合数学是研究分析离散结构和关系的数学分支，它是现代数学的基础之一.

组合数学起源于游戏和竞赛问题，这从下面几个例子可以看出：

1. 循环赛 n 个球队之间的循环赛（每两个球队之间要进行一场比赛）共要进行多少场？

2. 一笔画 给出一个图形，能否使笔尖不离开纸面而且任何一段线都不重复地描出整个图形？

3. 魔术方 如何将 1，2，…，9 等九个数字排列成 3×3 方阵，使每列数字之和，每行数字之和与两条对角线上数字之和均相等？

4. 桥牌 你同时能拿到四个 A 的可能性多大？

其中第一个是计数问题，第二个是欧拉路线问题，第三个与组合设计有关，第四个是古典概率问题，这些问题都属于组合数学范畴.

虽然组合数学渊源甚久，但其迅速发展却是近几十年的事，与计算机的发展密切相关. 一方面它是计算机科学的基础，计算机的发展，由于其数据内部结构的离散性，提出了大量的组合数学

问题；另一方面，计算机的发展又为解决运算量甚大的组合问题提供了工具.

组合数学膨胀的另一个原因是它不仅可以用于数学应用的传统领域——物理科学，而且可广泛应用于社会科学和生物学. 它还可用于训练数学基础甚少的人，包括中学生.

二、组合数学研究的内容及其方法

组合数学关心以一定方式“配置”一组事物，这里经常考虑的有以下几类问题：

1. 存在性 满足一定条件的一组事物的配置是否存在？若并不总是存在的，那么在什么情况下这样的配置才存在？

2. 计数和分类 如果满足一定条件的一组配置存在，那么紧接着的问题常是：这样的配置有多少种可能性？它们能分成几种类型？

3. 设计和优化 如果满足一定条件的配置是存在的，那么如何将它具体地构造出来？例如组合设计和组合优化问题都属于这一类型.

4. 研究已知配置的性质 这与第 3 个问题有关. 对于给出的配置进一步研究其性质和结构. 这对解决第二类问题也常有帮助.

研究计数问题的分支通常称为组合分析，研究关系的分支是图论，研究设计和优化的分支则称为组合设计和组合优化. 组合数学包含的内容很广，以上只是组合数学中一些基本分支. 图论是组合数学中最大的分支之一，关于它的书籍较多. 因此本书中不专门研究图论，而仅涉及组合数学的其它各个分支.

研究组合数学有一系列基本方法，数学归纳法就是组合数学证明的基本工具之一. 尽管如此，解决组合数学问题往往需要“对症下药”的方法. 一成不变，包治百病的处方是没有的，机械套用现成的公式原理往往不能解决问题. 这一学习数学的经验对于学习组合数学尤其如此. 这就需要我们去洞察问题，运用自己

的聪明才智来解决问题. 从这个意义上讲，解决组合数学问题的经验是极其必要的.

三、若干例子

这一段中我们举几个组合数学的例子.

1. 棋盘的完全覆盖

考虑一个通常的国际象棋盘，它被分成 $8\times8=64$ 个小方格，现有一批长方形骨牌，每个骨牌恰好覆盖两个相邻的小方格，今问：

(1) 是否能在棋盘上放置 32 个骨牌使之完全覆盖该棋盘?

使任意两个骨牌互不重叠的覆盖称为骨牌对棋盘的“完全覆盖”.

(2) 若存在，则有多少种不同的完全覆盖?

问题 (1) 的答案是肯定的，相当容易，问题 (2) 的答案甚难得到. 1961 年 M. E. Fischer 发现该数为 $12,988,816=2^4\cdot901^2$.

对于 $m\times n$ 棋盘可证当且仅当 m、n 为偶数时，问题 (1) 的答案才是肯定的.

现考虑一个 8×8 棋盘，剪去对角上两个小方格，问这样裁过的棋盘是否仍有完全覆盖? 答案是否定的.

考虑棋盘上方格以黑白相间着色，如同通常的国际象棋盘那样. 则对角上两块小方格的颜色相同. 为确定起见，不妨设裁去的两块均为黑色，则这样裁过的棋盘上共有 32 个白格和 30 个黑格，显然每个骨牌一定覆盖一个黑格和一个白格，因此这样裁过的棋盘没有完全覆盖.

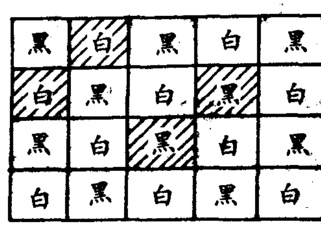

图 1.1

更一般地，取一个 $m\times n$ 棋盘，任意裁去一些方格后留下一个裁过的棋盘. 在什么条件下，这样裁过

的棋盘具有完全覆盖？

将其方格交替着黑白二色，为使完全覆盖存在，剩下的黑格与白格数相等是必要的，但并不充分．这由图 1.1 可知，这个问题的圆满解决与相异代表系的理论有关．

2．魔术方

一个 n 阶魔术方就是由 1，2，3，…，n^2 排列成的一个 $n\times n$ 方阵，使得每行，每列及每条对角线上各数字之和均相等，这个和 s 称为魔术方的魔和．

魔术方是最著名的古老的数学游戏之一，最早的三阶魔术方发现于中国，称为“纵横图”：

8	1	6
3	5	7
4	9	2

图 1.2

其魔和为 15．

显然 n 阶魔术方的魔和为

$$s = n^2(n^2+1)/2/n = n(n^2+1)/2.$$

关于魔术方的组合问题有

（1）对于哪些 n，n 阶魔术方是存在的？

（2）如何构造这些魔术方？

（3）n 阶不同魔术方的总数为多少？

不难证明没有二阶魔术方，可以证明对于所有其它的 n，n 阶魔术方都是存在的．

有关魔术方的一些构造方法见习题一的第 8 题至第 17 题．

3．36 军官问题

今有 36 名军官来自六个不同的团，具有六种不同的军阶，而且每个团每种军阶的军官各有一名，能否把他们排成一个 6×6 方阵，使得对每一个团与每一种军阶，在每一行或每一列都有一位军官来自这个团，也都有一位军官有此军阶？

若每一个军官用一个有序对 (i, j) 来表示，其中 i 表示它的军阶类别（$i=1, 2, \cdots, 6$），而 j 表示他所在的团（$j=1, 2, \cdots, 6$），于是问题即要求将有序对 (i, j)（$i=1, 2, \cdots, 6$；$j=1, 2, \cdots, 6$）排成一个 6×6 数组，使得每一行或每一列中整数 $1, 2, \cdots, 6$ 中任一数以某种次序出现于有序对的第一位置，又以另一种次序（不一定不同）出现于有序对的第二位置.

我们也可换一种方式来考虑问题. 分别考虑军阶方阵与团队方阵，于是问题就是是否存在两个 6×6 数组满足：(1) 每个数组中每一行或每一列中整数 $1, 2, \cdots, 6$ 以某种次序出现；(2) 当两个数组并置时，所有的 36 个有序对 (i, j)（$i=1, 2, \cdots, 6$；$j=1, 2, \cdots, 6$）都将出现.

满足第一个条件的每个方阵称为拉丁方，满足第二个条件的两个拉丁方称为互相正交，即正交拉丁方.

对于只有 9 个军官的类似问题有解：

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}(1, 1)&(2, 2)&(3, 3)\\(3, 2)&(1, 3)&(2, 1)\\(2, 3)&(3, 1)&(1, 2)\end{pmatrix}$$

36 军官问题即是否存在六阶正交拉丁方.

容易证明没有二阶正交拉丁方，Euler 给出了构造一对 n 阶正交拉丁方的办法，其中 n 为奇数或者 4 的倍数. 他反复尝试，断定（但没有证明）不存在正交的 6 阶拉丁方，且对于 $n=4k+2$ 这样的整数，n 阶拉丁方都不存在. 1901 年 Tarry 证明了 $n=6$ 时 Euler 猜想是正确的. 1960 年前后，R. C Bose，E. T. Parker 和 S. S. shrikhande 相继证明了对于 $n>6$，Euler 猜想是错误的，他们给出了如何构造一对正交的 n 阶拉丁方的方法，其中 $n=4k+2$，$k=2, 3, 4, \cdots$.

4. 四色问题

考虑平面上或球面上地图的着色问题，其中每个国家都是连通的区域，为便于区分不同国家，要使有公共边界的两个国家着

不同的颜色．问最少色数 k 为多少才能保证任一这样的地图都可以如此着色？

显然有些地图四色是必须的．不难证明对于任何这样的地图，五色是足够的．于是问题便是 $k=4$ 还是 5？经验告诉我们还未遇到过一幅地图 4 色还不够用．

这个问题提法如此简单，然而难度却如此之大，以至从 1850 年左右，Francis Cuthrie 提出后一百多年来未得到解决，直到 1976 年，才有两位数学家 K. Appel 和 W. Haker 声称他们用了大约 1200 小时的计算机计算证明了 $k=4$，其中包含约 100 亿个独立的逻辑判断．他们的工作是了不起的，但是并不能使人们满足．是否存在一个简单的，毋须借助计算机的证明仍是人们试探的课题．

5．更列问题

n 个同学之间交换他们的小说，每个人都提供一本与众不同的小说，问有多少种不同的方法重新分配这些小说，使得每个人都获得由别人提供的一本？

记这样的方法数为 D_n．n 本小说的重新分配共有 $n!$ 种方法．但根据问题的要求，必须在这 $n!$ 种方法中扣除使第一个同学获得他自己的书的那些分配方法，扣除使第二个人获得自己的书的那些分配法，…，扣除使第 n 个人获得他自己的书的那些分配法．

然而，这样一来，使第一个人与第二个人都获得他们自己的书的那些分配法被扣除了二次，从而必须将这些方法再补回一次．类似地，必须补回使任何两位同学都能获得他们自己的书的方法数．

但如此一来，使第一，第二，第三个同学都获得他们自己的书的那些分配法共被扣除了三次，又被补回了三次，因此仍应再扣去一次．如此等等．

这类问题称为“更列”问题．D_n 称为更列数．它有许多有趣的性质．更列问题的圆满解决要用到容斥原理．容斥原理有广泛

的应用，将在第五章中详细介绍.

6. 正整数的剖分

设 a_1，a_2，…，a_k 是正整数，且 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$，则

$$a_1+a_2+\cdots+a_k$$

称为其和的一个剖分，而 a_1，a_2，…，a_k 称为这个剖分的分部量.

例如，$n=5$ 有七个剖分如下：

5；	4+1；	3+2；
3+1+1；		2+2+1；
2+1+1+1；		1+1+1+1+1+1.

计算一个正整数的剖分数在许多问题中非常有用．而正整数的剖分数或其在某些限制条件下的剖分数有许多极其有趣的性质．例如，从 $n=5$ 的所有剖分中，我们可以发现各分部量不同的剖分共有三个，而各分部量全为奇数的剖分也有三个，二者的数目相等．事实上，这个结论具有普遍性，第八章中我们还将详细讨论.

7. 正方体各面的着色

一个正方体的各面用 1，2，3，4，5，6 等数字来表示，如图 1.3.

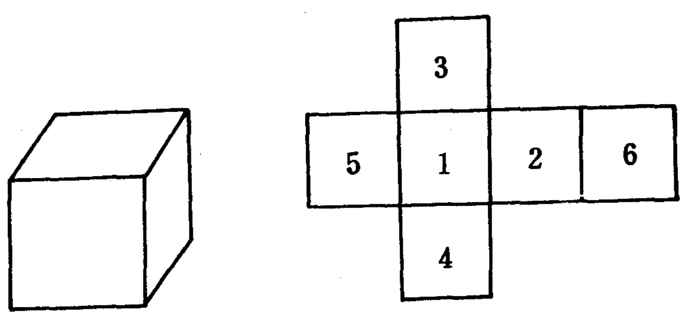

图 1.3　正方体与其六个面的展开图

现在要将这个正方体的各个面着红蓝两色，问有多少种不同的着色方法？

因正方体共有六个面，每个面都可着红蓝两色，故似乎应有 $2^6=64$ 种着色法．但 64 种着色法中有一些将被认为是相同的．

例如，1、2 两面着红色，其它着蓝色的着法与 4、5 两面着红色，其它着蓝色的着色法被认为是相同的．这是因为通过正方体的旋转可以使人们无法区别这二种着色方法．

所求的着色法总数可以按红色面的数量来分类．显然有零个红色面的着色方法只有唯一的一种．只有一个红色面的着色法有六种，但它们都可通过正方体的旋转而互易．因此“本质上”只有一种仅有一个红色面的着色法．有两个红色面的着色法本质上不同的有两种：这两个面相邻（如面 1 与面 2)，或者相对（如面 1 与面 6)．有三个红色面的着色法本质上不同的也有两种．一种是这三个面两两相邻（如面 1，面 2 与面 3)，而另一种是这三个面中有两个面相对（如面 1，面 2 与面 6)．有四个红色面的着色法，就是有两个蓝色面的着色法．因此，本质上不同的着色法也有两种．类似地，有五个红色面的着色法本质上只有一种．有六个红色面的着色法也只有一种．

归纳上述结果，有

红色面数量	0	1	2	3	4	5	6
着色法数目	1	1	2	2	2	1	1

因此，各种不同着色法的数目总和为 10.

同正方体各面的着色法类似，一些计数问题与一组变换有关．通常，这组变换形成一个群．在其中某个变换下，二者可以互换的情形将被认为是同一种情形．例如，上面的两种着色法被认为是相同的那样．这样的计算问题在实际中也是经常遇到的．对于它们有一些特殊的解决方法，这些将在本书最后一章中详细介绍．

四、组合数学的地位

组合数学在现代数学中占据越来越重要的地位：组合数学的大厦也越来越高，越来越庞大. 在理论方向的发展已使其成为现代数学的重要基础之一，它与数论有着密切的内在联系. 从应用方面的发展则几乎是无孔不入. 它是运筹学的基础与重要分支. 在代数编码，试验设计等领域都有应用. 尤其在计算机科学中的应用成果更是源源不断地涌现. 甚至在军事、经济与社会科学领域中也大有用武之地.

习 题 一

1. 证明当且仅当 mn 是偶数时，$m\times n$ 棋盘有完全覆盖.
2. 考虑一个 $m\times n$ 棋盘，其中 m，n 为奇数，其方格交替着黑白两色. 假定左上角方格为白色，证明任意裁去棋盘上一个白格，裁过的棋盘有完全覆盖.
3. 设 mn 为偶数，$m>1$，$n>1$. 考虑一个 $m\times n$ 棋盘，其方格交替着黑白两色. 证明在棋盘上任意裁去一个黑格和一个白格后，裁过的棋盘有完全覆盖.
4. 设想有一个由 64 个室构成的监狱，配置成如同 8×8 棋盘上的方格那样. 任何两个相邻的室间都有门可通，角上某室的一个囚犯被告知，如果他能够走到对面的室里，且经过其它每一室恰好一次的话，他将会被释放. 试问这位囚犯有机会获得自由吗？
5. 令 $f(n)$ 为 $2\times n$ 棋盘的不同完全覆盖数，计算 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$ 和 $f(5)$，寻找并证明一个计算 f 的简单关系式，并用此关系式计算 $f(12)$.
6. 求出 3×4 棋盘的不同完全覆盖数.

7. * 一个 6×6 棋盘被 18 块骨牌完全覆盖，证明总能水平地或者垂直地将它切割成两个非空块，且不切断任一骨牌.

8. 证明没有二阶魔术方.

9. 构造一个四阶魔术方.

10. 构造一个八阶魔术方.

11. 17 世纪 De La Loubere 发现如下的构造 n 阶魔术方的方法，其中 n 是奇数：

首先置 1 于第一行中间的方格，以下用递归方法构造.

当数值 m（$<n^2$）置于第 i 行第 j 列时，数值 $m+1$ 将置于第 i' 行第 j' 列，其中当 $m\not\equiv0 \pmod n$ 时，$i'\equiv i-1$，$j'\equiv j+1 \pmod n$，当 $m\equiv0 \pmod n$ 时，$i'\equiv i+1$，$j'\equiv j \pmod n$.

用 Loubere 方法构造一个五阶、一个七阶和一个九阶魔术方.

证明 Loubere 方法的正确性.

12. * 寻找并证明一个构造 $2m$ 阶魔术方的一般方法，其中 m 是大于 1 的奇数，并用此方法构造一个 6 阶魔术方.

13. * 已知一个 p 阶魔术方 P 和一个 q 阶魔术方 Q，寻找并证明一个由 P 与 Q 构造 pq 阶魔术方的一般方法. 取 P 与 Q 为三阶魔术方，用此法构造一个九阶魔术方.

14. 在第 9 题至第 13 题的基础上，归纳构造 n 阶魔术方的一般方法，其中 n 为大于 2 的整数.

15. 证明一个三阶魔术方中，5 必位于中间位置，由此推出恰有 8 个三阶魔术方.

16. 下示部分方阵能否补足为一个四阶魔术方：

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & & \\ 4 & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

注："*"表示题目更具有挑战性.