物理学习题辅导与解答

经典 Classics

经典教材辅导用书 ▌物理系列

知识要点

重点与难点

解题技巧

习题解答

▌高教版《物理学》(第5版)(东南大学等七所工科院校编 马文蔚改编)

周逊选 编

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

04/4=6C1
2008

经典教材辅导用书·物理系列丛书

物理学习题辅导与解答

高教版《物理学》(第5版)
(东南大学等七所工科院校编,马文蔚改编)

周逊选 编

安徽大学图书馆
藏书
www.lib.ahu.edu.cn

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

物理学习题辅导与解答/周逊选　编.—武汉:华中科技大学出版社,2008年2月
ISBN 978-7-5609-4369-5

Ⅰ.物…　Ⅱ.周…　Ⅲ.物理学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第201253号

物理学习题辅导与解答　　周逊选　编

策划编辑:周芬娜
责任编辑:周芬娜　李　成　　封面设计:潘　群
责任校对:朱　霞　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司
印　刷:湖北恒泰印务有限公司

开本:710mm×1000mm　1/16　印张:13.5　字数:260 000
版次:2008年2月第1版　印次:2008年2月第1次印刷　定价:20.00元
ISBN 978-7-5609-4369-5/O·432

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书是根据高等教育出版社出版、东南大学等七所工科院校编、马文蔚改编的《物理学》(第5版)的内容和系统编写的,对其中全部习题逐一进行了解答。全书共十五章,每章分为“内容提要”和“习题解答”两部分。对于比较复杂的习题,指出了解题思路,或进行了必要的讨论。

本书可作为普通高校、电视大学、成人高等教育中各工科专业物理课程的辅助教材。

前　　言

在学习大学物理学的各个环节中,解答习题无疑是一个重要环节,它有助于我们牢固掌握物理学的基本理论,培养独立思考的习惯,训练解决问题的能力,同时,它也是检验学习成绩的一种主要方式。本书的编写,希望能为读者在解答习题过程中提供一种参考,对读者学习大学物理学能有所裨益。

由高等教育出版社出版、东南大学等七所工科院校编、马文蔚改编的《物理学》(第5版)是我国高等院校工科专业广泛使用的一种物理教材,其中所选习题与基本理论配合紧密,内容丰富,难易适度。本书按照该教材的编写顺序,对全部习题逐一进行了解答。为了读者学习方便,本书所采用的符号均与该书一致。本书每一章分为“内容提要”和“习题解答”两部分。在“内容提要”中,提供了与解答该章习题相关的基本概念、公式,以便查找;在有些章的“内容提要”中,还介绍了相关的解题方法。在“习题解答”中,对较为复杂的习题,在解题前作了必要的分析,或在解题后进行了简要的讨论。每道习题的解答力求思路明晰,论述有据。为了使解题过程不至于烦琐,本书省略了数据运算和在初等数学基础上可以完成的推导过程。

由于编者水平有限,书中难免有疏漏甚至错误之处,敬请读者不吝指正。

编　者

2007年10月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　录

第 1 章　质点运动学

内容提要

1. 参考系和坐标系

描述物体运动时用作参考的其他物体称为参考系。为了定量地说明物体对参考系的位置，需要在该参考系建立固定的坐标系。

2. 位置矢量和位移

位置矢量：在参考系上选一点 O 向质点所在位置 P 所引的有向线段 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP})$ 称为质点对点 O 的位置矢量，简称位矢。

运动方程：表示质点位置随时间变化的函数式称为运动方程，可以写作

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

在直角坐标系中，
$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

位移矢量：
$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$$

一般情况下，
$$|\Delta\boldsymbol{r}|\neq|\Delta r|$$

3. 速度和加速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t},\quad \boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

在直角坐标系中，
$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

在自然坐标系中，
$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_\mathrm{n}+\boldsymbol{a}_\mathrm{t}=\frac{v^2}{r}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$$

(1) 匀加速运动：

$$\boldsymbol{a}=\text{常矢量},\quad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{a}t,\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{v}_0t+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

(2) 抛体运动

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g},\quad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{g}t,\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}_0t+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$$

在直角坐标系中，
$$a_x=0,\quad a_y=-g$$
$$v_x=v_0\cos\theta,\quad v_y=v_0\sin\theta-gt$$
$$x=v_0\cos\theta\cdot t,\quad y=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$$

(3) 圆周运动：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_\mathrm{n}+\boldsymbol{a}_\mathrm{t},\quad a_\mathrm{n}=\frac{v^2}{r}=r\omega^2,\quad a_\mathrm{t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\alpha$$

匀速圆周运动：
$$\boldsymbol{a}=-\omega^2\boldsymbol{r}$$

(4) 角量描述：

$$\text{角速度 }\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},\quad \text{角加速度 }\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

4. 相对运动

伽利略速度变换
$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{AK}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{AK'}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{K'K}}$$

习题解答

【1-1】 质点作曲线运动,在时刻 t 质点的位矢为 $\boldsymbol{r}$,速度为 $\boldsymbol{v}$,速率为 v,t 至 $(t+\Delta t)$ 时间内的位移为 $\Delta \boldsymbol{r}$,路程为 Δs,位矢大小的变化量为 Δr(或称 $\Delta|\boldsymbol{r}|$),平均速度为 $\bar{\boldsymbol{v}}$,平均速率为 $\bar{v}$。

(1) 根据上述情况,则必有( )。

(A) $|\Delta \boldsymbol{r}|=\Delta s=\Delta r$　　(B) $|\Delta \boldsymbol{r}|\neq\Delta s\neq\Delta r$,当 $\Delta t\to 0$ 时有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s\neq\mathrm{d}r$

(C) $|\Delta \boldsymbol{r}|\neq\Delta r\neq\Delta s$,当 $\Delta t\to 0$ 时有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}r\neq\mathrm{d}s$

(D) $|\Delta \boldsymbol{r}|\neq\Delta s\neq\Delta r$,当 $\Delta t\to 0$ 时有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}r=\mathrm{d}s$

(2) 根据上述情况,则必有( )。

(A) $|\boldsymbol{v}|=v,|\bar{\boldsymbol{v}}|=\bar{v}$　(B) $|\boldsymbol{v}|\neq v,|\bar{\boldsymbol{v}}|\neq\bar{v}$　(C) $|\boldsymbol{v}|=v,|\bar{\boldsymbol{v}}|\neq\bar{v}$　(D) $|\boldsymbol{v}|\neq v,|\bar{\boldsymbol{v}}|=\bar{v}$

解 (1) 根据题意可作图,如图 1-1 所示。在图中,$|\Delta \boldsymbol{r}|=AB$,$\Delta s=\overset{\frown}{AB}$,$\Delta r=CB$。因此,$|\Delta \boldsymbol{r}|\neq\Delta s\neq\Delta r$;直线 AB 和曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 具有相同的起点和终点,因此 $\Delta t\to 0$ 时,它们有相同的极限,即 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$,$CB$ 只和 $\overset{\frown}{AB}$(或 AB)有相同的终点,$\Delta t\to 0$ 时,它们的极限不同,即 $\mathrm{d}s\neq\mathrm{d}r$。答案(B)是正确的。

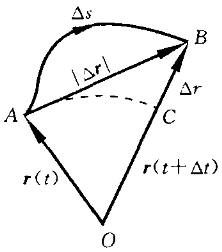


图 1-1

(2) 根据以上讨论可得 $|\boldsymbol{v}|=\dfrac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$,因为 $|\bar{\boldsymbol{v}}|=\dfrac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t}$,$\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$,而 $|\Delta \boldsymbol{r}|\neq\Delta s$,所以 $|\bar{\boldsymbol{v}}|\neq\bar{v}$。答案(C)是正确的。

【1-2】 一运动质点在某瞬时位于位矢 $\boldsymbol{r}(x,y)$ 的端点处,对其速度的大小有四种意见,即

(1) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$;　(2) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$;　(3) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$;　(4) $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$。

下述判断正确的是( )。

(A) 只有(1)、(2)正确　(B) 只有(2)正确　(C) 只有(2)、(3)正确　(D) 只有(3)、(4)正确

解 根据定义,速度的大小为 $v=\dfrac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}$。$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 是标量,而 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是矢量,$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\neq\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,因此(2)是不正确的,本题答案是(D)。答案(D)的正确性可进一步说明如下。

根据上题的讨论,$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s\neq\mathrm{d}r$,因此(1)是不正确的,(3)是正确的。在平面直角坐标系中,速度的两个分量的大小分别为 $v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,$v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$。因此,速度的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

【1-3】 质点作曲线运动,$\boldsymbol{r}$ 表示位置矢量,$\boldsymbol{v}$ 表示速度,$\boldsymbol{a}$ 表示加速度,s 表示路程,a_t 表示切向加速度。对下列表达式,即

(1) $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=a$;　(2) $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=v$;　(3) $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t=v$;　(4) $|\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t|=a_t$。

下述判断正确的是( )。

(A) 只有(1)、(4)是对的　(B) 只有(2)、(4)是对的　(C) 只有(2)是对的　(D) 只有(3)是对的

解 在上一题(题 1-2)中,已经说明(2)是不对的,(3)是对的,而 $a=\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|$,$a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,因此(1)和(4)是不对的,本题答案是(D)。

【1-4】 一个质点在作圆周运动时,有( )。

(A) 切向加速度一定改变,法向加速度也改变　(B) 切向加速度可能不变,法向加速度一定改变

(C) 切向加速度可能不变,法向加速度不变　(D) 切向加速度一定改变,法向加速度不变

解 质点做圆周运动时,其切向加速度不一定改变。例如,作匀速率圆周运动时,其切向加速

度始终为零。质点的切向加速度不变时，其法向加速度的大小可能不变（在作匀速率圆周运动时即是如此），但其方向总是变化的，因此法向加速度是一定改变的。本题答案应为(B)。

【1-5】 如图1-2(a)所示，湖中有一小船，有人用绳绕过岸上一定高度处的定滑轮拉湖中的船向岸边运动。设此人以匀速率 v_0 收绳，绳不伸长且湖水静止，小船的速率为 v，则小船作（　）。

(A) 匀加速运动，$v=\dfrac{v_0}{\cos\theta}$　(B) 匀减速运动，$v=v_0\cos\theta$　(C) 变加速运动，$v=\dfrac{v_0}{\cos\theta}$

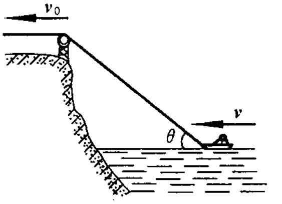
(D) 变减速运动，$v=v_0\cos\theta$　(E) 匀速直线运动，$v=v_0$

解　从滑轮处（A 点）向水平面作一垂线，垂足为 O，从 O 点向小船所在处（B 点）作一直线，此直线作为 x 轴，O 为原点（图1-2(b)）。设时刻 t 小船位于 B，坐标为 x，小船至滑轮的绳长为 l。显然，人拉绳的速率就是绳长减小的速率，因此，速度 $\boldsymbol{v}_0$ 可表示为

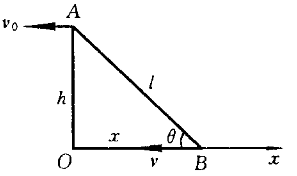
$$\boldsymbol{v}_0=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} \qquad ①$$

因为 $\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}<0$，所以 $\boldsymbol{v}_0$ 的方向是与 x 轴方向相反的。船运动的速度可表示为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} \qquad ②$$



(a)



(b)

图1-2

以 h 表示滑轮对水面的高度，则由图1-2(b)可知，

$$l^2=x^2+h^2 \qquad ③$$

将方程③等号两边分别对 t 求导数得到

$$l\,\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=x\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

考虑到①、②两式，即可得

$$v=\frac{l}{x}v_0=\frac{v_0}{\cos\theta}$$

式中，θ 是随着时间增大的，因此 v 也随着时间而增大，小船作加速运动。小船的加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{v_0\tan\theta}{\cos\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

仍然随着时间而变化，因此它作变加速运动。此题答案应选(C)。

【1-6】 已知质点沿 x 轴作直线运动，其运动方程为 $x=2+6t^2-t^3$，式中，x 的单位为 m，t 的单位为 s。求：(1)质点在运动开始后 4.0 s 内的位移的大小；(2)质点在该时间内所通过的路程；(3) $t=4$ s 时质点的速度和加速度。

解　(1) 质点在运动开始时 $t_1=0$，其坐标为

$$x_1=2+6t_1^2-t_1^3=2\ \text{m}$$

质点在运动开始后 4.0 s 的时刻（$t_2=4.0$ s），其坐标为

$$x_2=2+6t_2^2-t_2^3=34\ \text{m}$$

质点在 $t_1\to t_2$ 这段时间内的位移的大小为

$$\Delta x=x_2-x_1=32\ \text{m}$$

(2) 在质点的直线运动中，若不存在反向运动，则质点的运动路程与其位移的大小相等；若存在反向运动，则存在重复的运动路段，路程将大于位移的大小。质点运动反向时，其速度必为零（质点速度为零时，不一定说明它会反向运动），这是我们判断质点直线运动中是否存在反向运动的一个依据。

根据质点的运动方程，可以得到它的速度方程为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=12t-3t^2$$

令 $v=0$，可解得 $t_1=0$，$t_2=4.0\ \mathrm{s}$。可见在 $t_1\to t_2$ 这段时间内，质点没有反向运动，它所通过的路程等于位移的大小，即 32 m。

（3）质点的加速度方程为 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=12-6t$，已知 $t_2=4.0\ \mathrm{s}$ 时，$v_2=0$。将 $t_2=4.0\ \mathrm{s}$ 代入加速度方程，可得此时质点的加速度为

$$a_2=12-6t_2=-12\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

式中，负号表示质点将要反向运动。

【1-7】 一质点沿 x 轴方向作直线运动，其速度与时间的关系如图 1-3(a)所示。设 $t=0$ 时，$x=0$。试根据已知的 v-t 图，画出 a-t 图以及 x-t 图。

解　由图 1-3(a)可知，质点速度与时间的关系由三段直线表示。根据图中所列数据，可得出这三段直线的方程（即质点的速度方程）为

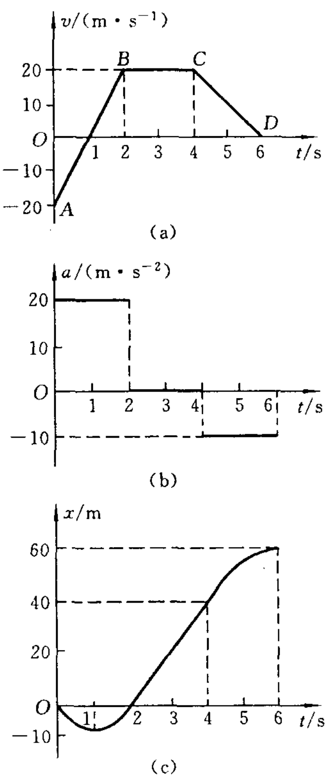


图 1-3

AB 段：　$v=-20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}+(20\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t$

BC 段：　$v=20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

CD 段：　$v=60\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}-(10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t$

由质点的速度方程可得到它的加速度方程为

$$AB\text{ 段：}\quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=20\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \qquad ①$$

$$BC\text{ 段：}\quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0 \qquad ②$$

$$CD\text{ 段：}\quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \qquad ③$$

于是可绘出质点运动的 a-t 图，如图 1-3(b)所示。

由①～③式可看出，与 v-t 图上 AB 段和 CD 段相对应的路段上，质点作匀变速直线运动；与 BC 段对应的路段上，质点作匀速直线运动。质点作匀变速直线运动时，其运动方程为

$$x=x_0+v_0(t-t_0)+\frac{1}{2}a(t-t_0)^2 \qquad ④$$

相应于 AB 段和 CD 段，t_0、x_0、v_0 和 a 有不同的数值。质点作匀速直线运动时，其运动方程为

$$x=x_0+v_0(t-t_0) \qquad ⑤$$

以下根据④式和⑤式，分别求出各段路程上的质点运动方程。

AB 段：$t_0=0$，$x_0=0$，由 v-t 图可知，$v_0=-20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，由①式，$a=20\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$。代入④式，可得质点在 AB 段上的运动方程为

$$x=(-20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})t+(10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})t^2 \qquad ⑥$$

BC 段：BC 段的起点即 AB 段的终点，因此，将 $t_0=2\ \mathrm{s}$ 代入⑥式，可得 BC 段起点坐标为 $x_0=0$，由 v-t 图可知，$v=20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。代入⑤式，可得质点在 BC 段上的运动方程为

$$x=(20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})(t-2\ \mathrm{s}) \qquad ⑦$$

CD 段：将 $t_0=4\ \mathrm{s}$ 代入⑦式，得到 BC 段终点坐标为 $x_0=40\ \mathrm{m}$，这也就是 CD 段的起点坐标，由 v-t 图可知，$v_0=20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，由③式可知，$a=-10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$。代入④式，可得质点在 CD 段上的运动方程为

$$x=40\ \mathrm{m}+(20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})(t-4\ \mathrm{s})-(5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(t-4\ \mathrm{s})^2 \qquad ⑧$$

根据方程⑥～⑧，即可绘出质点运动的 x-t 图，如图 1-3(c)所示。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

【1-8】 已知质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(2-t^2)\boldsymbol{j}$，式中 r 的单位为 m，t 的单位为 s。求：(1) 质点的轨迹；(2) $t=0$ 及 $t=2$ s 时，质点的位矢；(3) 由 $t=0$ 到 $t=2$ s 内质点的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和径向增量 Δr；* (4) 2 s 内质点所走过的路程 s。

解 (1) 质点运动方程的分量式为 $x=2t, y=2-t^2$。从此二式中消去 t，即得质点的轨迹方程为 $y=2-\dfrac{x^2}{4}$。

(2) 将 $t=0$ 及 $t=2$ s 分别代入质点的运动方程，即得此二时刻质点的位矢分别为

$$\boldsymbol{r}_1=2\text{m}\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{r}_2=4\text{m}\boldsymbol{i}-2\text{m}\boldsymbol{j}$$

(3) 由 $t=0$ 到 $t=2$ s 内质点的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=4\text{m}\boldsymbol{i}-4\text{m}\boldsymbol{j}$$

$\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 的大小分别为 $r_1=y_1=2$ m，$r_2=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=4.47$ m，质点在此二时刻的径向增量为

$$\Delta r=r_2-r_1=2.47\ \text{m}$$

(4) 由质点的运动方程可得其速度方程为 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\text{d}\boldsymbol{r}}{\text{d}t}=2\boldsymbol{i}-2t\boldsymbol{j}$，由此得到速率方程为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{2^2+(2t)^2}$$

在 $t=0$ 到 $t=2$ s 内质点运动的路程为

$$s=\int_0^2 v\text{d}t=\int_0^2\sqrt{2^2+(2t)^2}\text{d}t=5.91\ \text{m}$$

计算中用到积分公式 $$\int\sqrt{u^2+a^2}\text{d}u=\frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(u+\sqrt{u^2+a^2})+C$$

【1-9】 质点的运动方程为 $x=-10t+30t^2$ 和 $y=15t-20t^2$，式中 x, y 的单位为 m，t 的单位为 s。试求：(1) 初速度的大小和方向；(2) 加速度的大小和方向。

解 (1) 质点的速度的 x 分量为 $v_x=\dfrac{\text{d}x}{\text{d}t}=-10+60t$，$y$ 分量为 $v_y=\dfrac{\text{d}y}{\text{d}t}=15-40t$。$t=0$ 时，

$$v_{0x}=-10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1},\quad v_{0y}=15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

因此，初速度的大小为 $$v_0=\sqrt{v_{0x}^2+v_{0y}^2}=18.0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

初速度的方向与 x 轴的夹角 α 满足 $$\tan\alpha=\frac{v_{0y}}{v_{0x}}=-1.5$$

因为 $v_{0x}<0, v_{0y}>0$，所以 α 在第二象限，其值为

$$\alpha=123°41'$$

(2) 质点加速度的 x 分量为 $$a_x=\frac{\text{d}v_x}{\text{d}t}=60\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

y 分量为 $$a_y=\frac{\text{d}v_y}{\text{d}t}=-40\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

可见加速度是恒量，其大小为 $$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=72.1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

其方向与 x 轴的夹角 β 满足 $$\tan\beta=\frac{a_y}{a_x}=-\frac{2}{3}$$

因为 $a_x>0, a_y<0$，所以 β 在第四象限，其值为 $\beta=-33°41'$。

【1-10】 一升降机以加速度 $1.22\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ 上升，当上升速度为 $2.44\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 时，有一螺丝自升降机的天花板上松脱，天花板与升降机的底面相距 2.74 m。计算：(1) 螺丝从天花板落到底面所需要的时间；(2) 螺丝相对升降机外固定柱子的下降距离。

解 (1) 取固定柱子为参考系，螺丝松脱后，它以加速度 g 向下运动，同时升降机底面以加速度 $a=1.22\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ 向上运动，当两者运动距离之和等于升降机天花板到底面的距离时，它们发生碰撞，即螺丝落到了底面上。

螺丝松脱时的初速度的大小为 $v_0=2.44\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，方向向上，设它从松脱到落在底面上的时间为 t，则它落下的距离为

$$h_1=\frac{1}{2}gt^2-v_0t \quad ①$$

升降机底面上升的初速度(即它在螺丝松脱时的速度)的大小也是 v_0，它在时间 t 内上升的距离

$$h_2=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \quad ②$$

以 h 表示升降机天花板与底面的距离，则应有 $h=h_1+h_2$

将①式和②式代入，即可得 $h=\frac{1}{2}(a+g)t^2$，$t=\sqrt{\frac{2h}{a+g}}=0.705\ \mathrm{s}$

(2) 将 t、g、v_0 的值代入①式，即得 $h_1=0.716\ \mathrm{m}$。

【1-11】 一质点 P 沿半径 $R=3.0\ \mathrm{m}$ 的圆周作匀速率运动，运动一周所需时间为 20.0 s，设 $t=0$ 时，质点位于 O 点。按图 1-4(a)所示 Oxy 坐标系，求：(1) 质点 P 在任意时刻的位矢；(2) 5 s 时的速度和加速度。

解 (1) 以 T 表示质点 P 运动一周所需时间，则 $T=20.0\ \mathrm{s}$，质点 P 运动的角速度为

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{10}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

质点 P 相对于圆心 O' 的位矢 $\overrightarrow{O'P}$ 与 x 轴的夹角以 θ 表示(图 1-4(b))。$t=0$ 时，质点位于 O 点，这时 θ 之值为 $\theta_0=\frac{3}{2}\pi$，因此，在任意时刻 t，与质点位置相应的 θ 值为

$$\theta=\theta_0+\omega t=\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{10}t$$

设在时刻 t，质点 P 在 Oxy 坐标系中的坐标为 (x,y)，则由图1-4(b)可知，

$$x=R\cos\theta=3\sin\frac{\pi}{10}t,\quad y=R+R\sin\theta=3\left(1-\cos\frac{\pi}{10}t\right)$$

质点在此时的位矢即为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=\left(3\sin\frac{\pi}{10}t\right)\boldsymbol{i}+\left[3\left(1-\cos\frac{\pi}{10}t\right)\right]\boldsymbol{j}$$

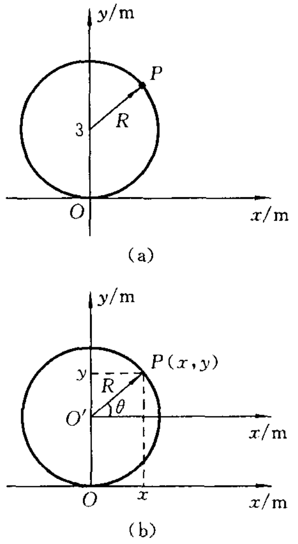


图 1-4

(2) 在时刻 t，质点的速度为 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}t\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}t\right)\boldsymbol{j}$

质点的加速度为 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\left(\frac{3\pi^2}{100}\sin\frac{\pi}{10}t\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{3\pi^2}{100}\cos\frac{\pi}{10}t\right)\boldsymbol{j}$

将 $t=5$ s 代入，可得此时质点的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v}=\frac{3\pi}{10}\ (\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{a}=-\frac{3\pi^2}{100}\ (\mathrm{m\cdot s^{-2}})\boldsymbol{i}$$

讨论 解决本题的关键是要明确一个概念：在质点作匀速率圆周运动的公式 $\theta=\theta_0+\omega t$ 中，θ 是质点相对于圆心的位矢与参考轴(x 轴)的夹角，而不是相对于任何其他点(例如图 1-4(b)中的 O 点)的位矢与参考轴间的夹角。

【1-12】 地面上垂直竖立一高 20.0 m 的旗杆，已知正午时分太阳在旗杆的正上方，求在下午 2:00 时，杆顶在地面上影子速度的大小。在何时刻杆影将伸展至 20.0 m?

解 以地球作参考系，可以认为太阳绕地球做匀速率圆周运动，其角速度为

$$\omega=\frac{2\pi}{24\times3600}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}=7.27\times10^{-5}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

设正午时分 $t=0$，这时旗杆影长为零，在时刻 t，影长为 x，太阳光线与旗杆之夹角为 θ。由图1-5可知，旗杆高度 h 与 x、θ 的关系为

$$x=h\tan\theta=h\tan\omega t$$

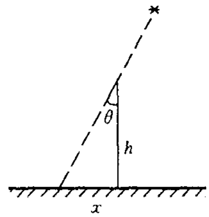


图 1-5

因此影子伸长的速度

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{h\omega}{\cos^2\omega t}$$

将 h、ω 及 $t=2\times3.60\times10^3\ \mathrm{s}=7.20\times10^3\ \mathrm{s}$ 代人，即得下午2时杆顶在地面上影子速度的大小为

$$v=1.94\times10^{-3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

当杆影长度与杆的高度相同($x=h$)时，显然 $\theta=\frac{\pi}{4}$。代人 $\theta=\omega t$ 中得到 $t=1.08\times10^4\ \mathrm{s}$，即在下午3时杆影将伸展至20.0 m。

【1-13】 质点沿直线运动，加速度 $a=4-t^2$，式中 a 的单位为 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，t 的单位为 s。如果当 $t=3$ s 时，$x=9$ m，$v=2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求质点的运动方程。

解　令 $t_1=3$ s，$x_1=9$ m，$v_1=2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=4-t^2$$

由此可得积分

$$\int_{v_1}^{v}\mathrm{d}v=\int_{t_1}^{t}(4-t^2)\mathrm{d}t$$

积分后得到

$$v=v_1+4(t-t_1)-\frac{1}{3}(t^3-t_1^3)=-1+4t-\frac{1}{3}t^3$$

又 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，于是可得积分

$$\int_{x_1}^{x}\mathrm{d}x=\int_{t_1}^{t}v\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t}\left(-1+4t-\frac{1}{3}t^3\right)\mathrm{d}t$$

积分后即得质点的运动方程为

$$x=x_1-(t-t_1)+2(t^2-t_1^2)-\frac{1}{12}(t^4-t_1^4)=0.75-t+2t^2-\frac{1}{12}t^4$$

【1-14】 一石子从空中由静止下落，由于空气阻力。石子并非作自由落体运动。现已知加速度 $a=A-Bv$，式中，A，B 为常量。试求石子的速度和运动方程。

解　$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=A-Bv$。已知 $t=0$ 时 $v_0=0$，因此可得积分

$$\int_0^v\frac{\mathrm{d}v}{A-Bv}=\int_0^t\mathrm{d}t$$

积分后即得石子的速度方程为

$$v=\frac{A}{B}(1-\mathrm{e}^{-Bt}),\quad v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{A}{B}(1-\mathrm{e}^{-Bt})$$

设石子初始位置的坐标为 $x_0=0$，则可得积分

$$\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t\frac{A}{B}(1-\mathrm{e}^{-Bt})\mathrm{d}t$$

积分后即得石子的运动方程为

$$x=\frac{A}{B}t+\frac{A}{B^2}(\mathrm{e}^{-Bt}-1)$$

【1-15】 一质点具有恒定加速度 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$，式中，$a$ 的单位为 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$。在 $t=0$ 时，其速度为零，位置矢量 $\boldsymbol{r}_0=10\ \mathrm{m}\boldsymbol{i}$。求：(1) 在任意时刻的速度和位置矢量；(2) 质点在 Oxy 平面上的轨迹方程，并画出轨迹的示意图。

解　(1)

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$$

已知 $t=0$ 时，$\boldsymbol{v}_0=0$，于是可得积分

$$\int_0^{\boldsymbol{v}} \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int_0^t (6\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\mathrm{d}t$$

在任意时刻 t,质点的速度为　　$\boldsymbol{v} = 6t\boldsymbol{i} + 4t\boldsymbol{j}$

根据 $\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 可得

$$\int_{r_0}^{r} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^t \boldsymbol{v}\mathrm{d}t = \int_0^t (6t\boldsymbol{i} + 4t\boldsymbol{j})\mathrm{d}t, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + 3t^2\boldsymbol{i} + 2t^2\boldsymbol{j}$$

已知 $\boldsymbol{r}_0 = 10\ \mathrm{m}\boldsymbol{i}$,代入后得到质点在任意时刻的位置矢量为

$$\boldsymbol{r} = (10 + 3t^2)\boldsymbol{i} + 2t^2\boldsymbol{j}$$

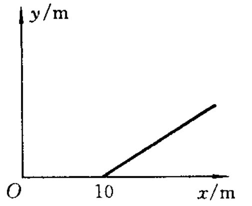


图 1-6

(2) 根据 $\boldsymbol{r}$ 的表示式可知,$\boldsymbol{r}$ 的两个分量分别为 $x = 10 + 3t^2$,$y = 2t^2$,从这两个方程中消去 t,就得到质点的轨迹方程为 $3y = 2x - 20$。图 1-6 就是质点轨迹的示意图。

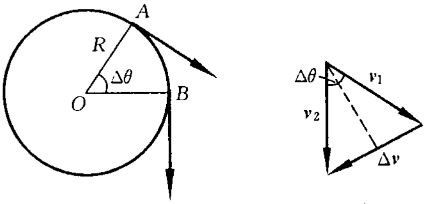
【1-16】 一质点在半径为 R 的圆周上以恒定的速率运动,质点由位置 A 运动到位置 B,OA 和 OB 所形成的圆心角为 $\Delta\theta$(图 1-7(a))。(1) 试证 A 和 B 位置之间平均加速度为 $\bar{a} = \sqrt{2(1-\cos\Delta\theta)}\,v^2/(R\Delta\theta)$。(2) 当 $\Delta\theta$ 分别等于 90°、30°、10°和 1°时,平均加速度各为多少? 并对其结果加以讨论。

解 (1) 容易证明,速度 $\boldsymbol{v}_1$ 与速度 $\boldsymbol{v}_2$ 之间的夹角也是 $\Delta\theta$。这两个速度与速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 之间的关系如图 1-7(b)所示。因为质点速率是恒定的(以 v 表示),$|\boldsymbol{v}_1| = |\boldsymbol{v}_2| = v$,所以

$$|\Delta\boldsymbol{v}| = 2v\sin\frac{\Delta\theta}{2} = v\sqrt{2(1-\cos\Delta\theta)}$$

质点从 A 运动到 B 所需时间为

$$\Delta t = \frac{\overset{\frown}{AB}}{v} = \frac{R\Delta\theta}{v}$$



(a)　　(b)

图 1-7

于是可得在位置 A 和 B 之间,质点的平均加速度的大小为

$$\bar{a} = \frac{|\Delta\boldsymbol{v}|}{\Delta t} = \frac{v^2\sqrt{2(1-\cos\Delta\theta)}}{R\Delta\theta}$$

(2)

$$\Delta\theta = 90°,\quad \bar{a}_1 = \frac{\sqrt{2(1-\cos 90°)}}{\pi/2}\frac{v^2}{R} = 0.90034\frac{v^2}{R}$$

$$\Delta\theta = 30°,\quad \bar{a}_2 = \frac{\sqrt{2(1-\cos 30°)}}{\pi/6}\frac{v^2}{R} = 0.98864\frac{v^2}{R}$$

$$\Delta\theta = 10°,\quad \bar{a}_3 = \frac{\sqrt{2(1-\cos 10°)}}{\pi/18}\frac{v^2}{R} = 0.99876\frac{v^2}{R}$$

$$\Delta\theta = 1°,\quad \bar{a}_4 = \frac{\sqrt{2(1-\cos 1°)}}{\pi/180}\frac{v^2}{R} = 0.99999\frac{v^2}{R}$$

以上结果说明,$\Delta\theta$ 越小,也就是时间越短,平均加速度的大小越接近 v^2/R,事实上,质点瞬时加速度的大小正是 $a = v^2/R$。这就是说,瞬时加速度是平均加速度在 $\Delta t \to 0$ 时的极限。

【1-17】 质点在 Oxy 平面内运动,其运动方程为 $\boldsymbol{r} = 2.0t\boldsymbol{i} + (19.0 - 2.0t^2)\boldsymbol{j}$,式中,$\boldsymbol{r}$ 的单位为 m,t 的单位为 s。求:(1) 质点的轨迹方程;(2) 在 $t_1 = 1.0$ s 到 $t_2 = 2.0$ s 时间内的平均速度;(3) $t_1 = 1.0$ s时的速度及切向和法向加速度;(4) $t_1 = 1.0$ s 时质点所在处轨道的曲率半径 ρ。

解 (1) 根据质点的运动方程,可得出它的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的二分量分别为

$$x = 2.0t,\quad y = 19.0 - 2.0t^2$$

在这两个方程中消去时间 t,即得质点的轨迹方程为 $y = 19.0 - \dfrac{1}{2}x^2$。

(2) 质点在时刻 t_1、t_2 的位置矢量分别为

$$\boldsymbol{r}_1=2.0\boldsymbol{i}+17.0\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{r}_2=4.0\boldsymbol{i}+11.0\boldsymbol{j}$$

因此，质点在 $t_1\to t_2$ 时间内的平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{t_2-t_1}=2.0\boldsymbol{i}-6.0\boldsymbol{j}$$

(3) 质点在时刻 t 的速度为 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=2.0\boldsymbol{i}-4.0t\boldsymbol{j}$，在时刻 $t_1=1.0$ s 的速度为 $\boldsymbol{v}=2.0\boldsymbol{i}-4.0\boldsymbol{j}$。质点在时刻 t 的速率为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{2.0^2+(4.0t)^2}=\sqrt{4.0+16.0t^2}$$

质点在时刻 t 的加速度的切向分量　$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{16.0t}{\sqrt{4.0+16.0t^2}}$

在 $t_1=1.0$ s 时，$a_t=3.58\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，质点在时刻 t 的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-4.0\boldsymbol{j}$$

因此质点的加速度的大小为 $a=4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$。因为 $a^2=a_t^2+a_n^2$，所以质点在 $t_1=1.0$ s时的加速度的法向分量

$$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=1.79\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(4) a_n、v、ρ 三者的关系为 $a_n=\frac{v^2}{\rho}$，由此可得 $\rho=\frac{v^2}{a_n}$。已知 $t=1.0$ s 时，$a_n=1.79\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，将 $t=1.0$ s 代入①式，得到 $v=\sqrt{20}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，再将 a_n 与 v 的值代入与 ρ 的关系式，即得 $\rho=11.17$ m。

【1-18】 飞机以 100 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$的速度沿水平直线飞行，在离地面高为 100 m 时，驾驶员要把物品空投到前方某一地面目标处，问：(1) 此时目标应在飞机下方前多远？(2) 投放物品时，驾驶员看目标的视线和水平线成何角度？(3) 物品投出 2.0 s 后，它的法向加速度和切向加速度各为多少？

解　(1) 以投物时飞机的正下方地面为原点，分别沿与飞行方向平行的水平线和竖直线作二坐标轴(图 1-8)。物品投下时，令 $t=0$，物品下落过程中，它在水平方向和竖直方向的运动方程分别为

$$x=v_0t,\quad y=y_0-\frac{1}{2}gt^2$$

由这两个方程得到物品的轨迹方程为

$$y=y_0-\frac{g}{2v_0^2}x^2$$

物品落地时 $y=0$，由轨迹方程解得

$$x=v_0\sqrt{\frac{2y_0}{g}}=452\ \mathrm{m}$$

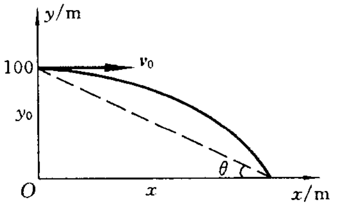


图 1-8

(2) 设投放物品时，驾驶员看目标的视线和水平线成 θ 角，由图 1-8 可知，$\theta=\arctan\frac{y_0}{x}=12.5°$。

(3) 根据物品运动方程的两个分量式，可以得到物品运动速度的两个分量式分别为 $v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0$，$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-gt$，因此，在时刻 t 物品的速率为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_0^2+g^2t^2}$$

物品的切向加速度的数值为　$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$

将 $v_0=100\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$和 $t=2.0$ s 代入后，得到此时物品的切向加速度的数值为 $a_t=1.88\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$。

物品下落时的加速度是恒定的，它的数值为 $a=g$。因此，$t=2.0$ s时物品的法向加速度的数值为

$$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=9.62\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

【1-19】 如图 1-9(a)所示，一小型迫击炮架设在一斜坡的底端 O 处，已知斜坡倾角为 α，炮身与斜坡的夹角为 β，炮弹的出口速度为 v_0，忽略空气阻力。求：(1) 炮弹落地点 P 与点 O 的距离 OP；(2) 欲使炮弹能垂直击中坡面。证明 α 和 β 必须满足 $\tan\beta=\dfrac{1}{2\tan\alpha}$，并与 v_0 无关。

解 (1) 在炮弹运动的平面上，取炮弹运动的起点 O 为原点，沿斜坡作 x 轴，与坡面垂直的方向作 y 轴(图 1-9(b))，在此二方向上，炮弹的初速度的分量为

$$v_{0x}=v_0\cos\beta,\quad v_{0y}=v_0\sin\beta$$

炮弹的加速度 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}$，由图可以看出，$\boldsymbol{a}$ 的两个分量为

$$a_x=-g\sin\alpha,\quad a_y=-g\cos\alpha$$

它们都是恒量，因此炮弹在二坐标轴方向上的分运动都是匀加速直线运动，在这两个方向上的运动方程分别为

$$x=v_{0x}t+\frac{1}{2}a_xt^2=v_0\cos\beta\cdot t-\frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot t^2 \qquad ①$$

$$y=v_{0y}t+\frac{1}{2}a_yt^2=v_0\sin\beta\cdot t-\frac{1}{2}g\cos\alpha\cdot t^2 \qquad ②$$

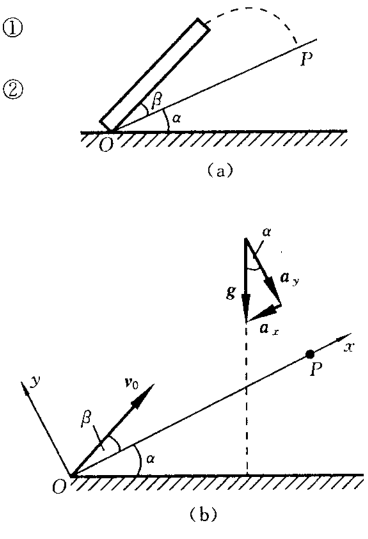


图 1-9

炮弹落地时 $y=0$，由②式可得出落地时刻为

$$t=\frac{2v_0\sin\beta}{g\cos\alpha}$$

将此时刻代入①式，得到落地点 P 的坐标为

$$x=\frac{2v_0^2\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\alpha}$$

这也就是距离 OP。

(2) 炮弹沿 x 轴方向的分速度为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0\cos\beta-g\sin\alpha\cdot t$$

炮弹若是垂直落地，则在落地时有 $v_x=0$，由上式可得

$$v_0\cos\beta-g\sin\alpha\cdot\frac{2v_0\sin\beta}{g\cos\alpha}=0$$

由此得到炮弹垂直击中坡面的条件为 $\tan\beta=\dfrac{1}{2\tan\alpha}$，得此条件时未对 v_0 作任何假设，因而此条件与 v_0 无关。

【1-20】 一直立的雨伞，张开后其边缘圆周的半径为 R，离地面的高度为 h，(1) 当伞绕伞柄以匀角速 ω 旋转时，求证水滴沿边缘飞出后落在地面上半径为 $r=R\sqrt{1+2h\omega^2/g}$ 的圆周上；(2) 读者能否由此定性构想一种草坪上或农田灌溉用的旋转式洒水器的方案？

解 (1) 设某一水滴沿伞的边缘飞出后沿曲线 $\overset{\frown}{OP}$ 落到地面(图 1-10)。水滴飞出后的运动是平抛运动，设落到地面所需时间为 t，则由

$$h=\frac{1}{2}gt^2\quad 得\quad t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

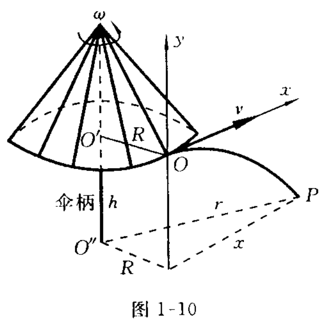


图 1-10

在此时间内水滴沿水平方向运动的距离为

$$x=vt=R\omega t=R\omega\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

由图可知，水滴落地点 P 到 O' 点的距离为

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com