锦囊妙解

中学生数理化系列

主编/吴小平

不可不读的题 高考数学

第2版

MATH

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

锦囊妙解

中学生数理化系列

不可不读的题

数学：七、八、九年级，高一、高二、高考

物理：初中、高一、高二、高考

化学：九年级、高一、高二、高考

不可不知的素材

数学：七、八、九年级，高一、高二、高考

物理：初中、高一、高二、高考

化学：九年级、高一、高二、高考

不可不做的实验

物理：初中、高一、高二、高考

化学：九年级、高一、高二、高考

不可不解的疑惑

数学：高一、高二

装帧设计/SOAN 盛琳兰图书品牌机构
www.soan.cn 010-85890655

ISBN 978-7-111-18933-6

定价：21.00元

地址：北京市百万庄大街22号　邮政编码：100037
联系电话：(010) 68326294　网址：http://www.cmpbook.com
E-mail:online@cmpbook.com

ISBN 978-7-111-18933-6
01>
9 787111 189336

锦囊妙解 中学生数理化系列

不可不读的题

高考数学

第2版

总策划	司马文		
丛书主编	万强华		
编委	刘芬	江华平	欧阳晔
	郑永盛	吴小平	管厚坤
	胡志芳	吴小菲	王智军
	张和良	张延良	黄维
本册主编	吴小平		
编者	饶安民	马才水	郝宜清
	杨水生	张廷芹	罗崇文

机械工业出版社

本书是“锦囊妙解中学生数理化系列”的《不可不读的题　高考数学》分册，它体现了新课标改革精神，不受任何版本限制。书中每章节按选择题、填空题、解答题等题型分开编写。题目内容选取大部分以近两年的高考题为主，经典题为辅。题型全，解析简要，解答规范。本书内容新颖，题材广泛，目的是要从本质上提高学生的知识理解能力，分析问题和解决问题的能力。

图书在版编目(CIP)数据

不可不读的题. 高考数学/吴小平主编. —2 版. —北京：机械工业出版社，2008.1

(锦囊妙解中学生数理化系列)

ISBN 978-7-111-18933-6

Ⅰ. 不… Ⅱ. 吴… Ⅲ. 数学课—高中—习题—升学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008)第 005501 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)

策划编辑：石晓芬　　　　责任编辑：贾　雪

责任印制：李　妍

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

2008 年 5 月第 2 版 · 第 1 次印刷

169mm×230mm · 14 印张 · 312 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-18933-6

定价：21.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

销售服务热线电话：(010)68326294

购书热线电话：(010)88379639 88379641 88379643

编辑热线电话：(010)88379037

前 言

Preface

武林竞技，想要取胜，或“一把枪舞得风雨不透”，或有独门绝技，三招之内，挑敌于马下。古有“锦囊妙计”，今有“锦囊妙解”辅导系列。继“锦囊妙解——中学生英语系列”、“锦囊妙解——中学生语文系列”之后，我们又隆重推出了“锦囊妙解——中学生数理化系列”。

这是一套充满智慧的系列丛书，能使你身怀绝技，轻松过关斩将，技增艺长。这更是一套充满谋略的系列丛书，能使你做到“风雨不透”，意外脱颖而出，圆名校梦。

这套丛书紧密结合教材内容，力求将教学需求和实际中高考要求完美结合。在体例设计、内容编排、方法运用、训练考查等方面都充分考虑各个年级学生的实际，由浅入深，循序渐进，稳步提高，并适度、前瞻性地把握中高考动态和趋向，在基础教学中渗透中高考意识。

本丛书作者均为多年在初中、高中一线教学的精英，每册都由有关专家最后审稿定稿。

这套丛书按中高考数、理、化必考的知识点分成三大系列：《不可不读的题》、《不可不知的素材》和《不可不做的实验》。从七年级到高考，并按数学、物理、化学分类，配套中学新课标教材，兼顾老教材，共有36册。

本丛书有如下特点：

1. 选材面广，知识点细，针对性强

在《不可不读的题》中，我们尽量选用当前的热点题，近几年各地的中高考题，并有自编的创新题。在《不可不知的素材》中，我们力求做到：知识面广、知识点细而全、知识网络清晰，并增加一些高考的边缘知识和前瞻性知识。在《不可不做的实验》中，我们针对目前中学生实验水平低、实验技能差、实验知识缺乏的情况，结合教材的知识网络，详细而全面地介绍了实验。有实验目的、原理、步骤、仪器，实验现象、结论、问题探讨，并增加了实验的一般思路和方法。除介绍课本上的学生实验和教师的演示实验外，还增加了很多中高考中出现的课外实验和探究实验。

2. 指导到位

本丛书在指导学生处理好学习中的基础知识的掌握、解题能力的娴熟、实验能力的提高方面，有意想不到的功效。选择本丛书潜心修炼，定能助你考场

目 录

Contents

第 1 章　集合与简易逻辑

1.1 集　　合

一、选择题

题 1 若 $X=\{x|x=4n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$Y=\{y|y=4n-3,n\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{z|z=8n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，则 X,Y,Q 的关系是（　　）

A. $X\supsetneqq Y\supsetneqq Q$　　B. $X\subsetneqq Y\subsetneqq Q$

C. $X=Y\supsetneqq Q$　　D. $X=Y=Q$

解　设 $n=k+1,k\in\mathbf{Z}$，则 $Y=\{y|y=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，所以 $X=Y$. 当 $n=2k$（n 是偶数）时，$x=8k+1\in Q$；当 $n=2k-1$ 或 $n=2k+1$（n 是奇数）时，$x=8k+5$ 或 $8k-3$. 可知集合 Q 是由集合 X 中的 n 取偶数时的元素组成的集合，所以 $X\supsetneqq Q$，$X=Y\supsetneqq Q$，故选 C.

题 2 已知集合 $A\subsetneqq\{2,3,7\}$，且 A 中至多有 1 个奇数，则这样的集合共有（　　）

A. 2 个　B. 4 个　C. 5 个　D. 6 个

解　集合 A 可有 3 类：第 1 类是空集；第 2 类是 A 中不含奇数；第 3 类是 A 中只含有 1 个奇数，它们是 $\varnothing,\{2\},\{3\},\{7\},\{2,3\},\{2,7\}$，故选 D.

题 3 （2007 全国 Ⅰ，5）设 $a,b\in\mathbf{R}$，集合 $\{1,a+b,a\}=\left\{0,\frac{b}{a},b\right\}$，则 $b-a$ 等于（　　）

A. 1　B. -1　C. 2　D. -2

解　$\because a\neq0$，$\therefore a+b=0$，$\therefore \frac{b}{a}=-1$，$\therefore b=1,a=-1$ $\therefore b-a=2$，故选 C.

题 4 （2007 陕西，12）设集合 $S=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$，在 S 上定义运算 $\oplus$ 为：$A_i\oplus A_j=A_k$，其中 k 为 $i+j$ 被 4 除的余数，$i,j=0,1,2,3$，则满足关系式 $(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$ 的 $x(x\in S)$ 的个数为（　　）

A. 4 个　B. 3 个　C. 2 个　D. 1 个

解　由已知 $x\oplus x=A_2$，则 $x=A_1$ 或 $x=A_3$，故选 C.

题 5 若同时满足 $M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，$a\in M$，则 $6-a\in M$ 的非空集合 M 有（　　）

A. 16 个　B. 15 个　C. 7 个　D. 6 个

解　若 $a\in M,6-a\in M$，则 1 和 5，2 和 4 必同时属于 M，故将 5 个数分为 3 部分，即 $(1,5),(2,4),(3)$，$C_3^1+C_3^2+C_3^3=2^3-1=7$.

题 6 （2007 福建，3）已知集合 $A=\{x|x<a\}$，$B=\{x|1<x<2\}$，且 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $a\leqslant1$　B. $a<1$　C. $a\geqslant2$　D. $a>2$

解　$\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$，又 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}$，数轴上画图可得 $a\geqslant2$，故选 C.

题 7 （2007 湖南，10）设集合 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$，S_1、S_2、…、S_k 都是 M 的含两个元素的子集，且满足：对任意的 $S_i=\{a_i,b_i\}$，$S_j=\{a_j,b_j\}$（$i\neq j$，$i,j\in\{1,2,3,\cdots,k\}$）都有 $\min\left\{\frac{a_i}{b_i},\frac{b_i}{a_i}\right\}\neq\min\left\{\frac{a_j}{b_j},\frac{b_j}{a_j}\right\}$（$\min\{x,y\}$ 表示两个数 x、y 中的较小者），则 k 的最大值是（　　）

A. 10　B. 11　C. 12　D. 13

解　M 的含两个元素的子集的个数有 $C_6^2=15$ 个，但 $\{1,2\},\{3,6\},\{2,4\}$ 不满足 $\min\left\{\frac{a_i}{b_i},\frac{b_i}{a_i}\right\}\neq\min\left\{\frac{a_j}{b_j},\frac{b_j}{a_j}\right\}$，$\{1,3\},\{2,6\}$ 和 $\{2,3\},\{4,6\}$ 亦不满足条件 $\min\left\{\frac{a_i}{b_i},\frac{b_i}{a_i}\right\}\neq\min\left\{\frac{a_j}{b_j},\frac{b_j}{a_j}\right\}$，故应去掉四个，故 k 的最大值为 11. 故选 B.

题 8　(2006 北京宣武)已知 $\mathbf{R}$ 为实数集,$\mathbf{Q}$ 为有理数集,设函数 $f(x)=\begin{cases}0(x\in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}),\\1(x\in\mathbf{Q}),\end{cases}$ 则　(　　)

A. 函数 $y=f(x)$ 的图像是两条平行直线

B. 函数 $y=f(x)$ 是奇函数

C. 函数 $f[f(x)]$ 恒等于 0

D. 函数 $f[f(x)]$ 的导函数恒等于 0

解　函数 $y=f(x)$ 的图像是无穷多个分布在直线 $y=0$ 和 $y=1$ 上的孤立的点,则 A 不正确;因 $f(1)=f(-1)=1$,则 B 不正确;$f(x)\in\mathbf{Q}$,$f[f(x)]=1$,则 C 不正确;由于 $f[f(x)]=1$,其导函数恒等于 0,则 D 正确,故选 D.

题 9　(2005 郑州)已知 $P=\{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\alpha}=(-1,1)+m(1,2),m\in\mathbf{R}\}$,$Q=\{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\beta}=(1,-2)+n(2,3),n\in\mathbf{R}\}$是两个向量集合,则 $P\cap Q$ 等于　(　　)

A. $\{(-2,1)\}$　　B. $\{(-13,-23)\}$

C. $\{(1,-2)\}$　　D. $\{(-23,-13)\}$

解　$\boldsymbol{\alpha}=(m-1,2m+1)$,$\boldsymbol{\beta}=(2n+1,3n-2)$. 令 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$,得 $\begin{cases}m-1=2n+1,\\2m+1=3n-2,\end{cases}$

解得 $n=-7$,$m=-12$. ∴ $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=(-13,-23)$. 故选 B.

题 10　若不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|\alpha<x<\beta\}$,其中 $\beta>\alpha>0$,则不等式 $cx^2-bx+a>0$ 的解集是　(　　)

A. $\left\{x|\frac{1}{\alpha}<x<\frac{1}{\beta}\right\}$

B. $\left\{x|-\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}\right\}$

C. $\left\{x|\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}\right\}$

D. $\left\{x|-\frac{1}{\beta}<x<-\frac{1}{\alpha}\right\}$

解　∵不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|\alpha<x<\beta\}$,且 $\beta>\alpha>0$.

∴ $a<0$ 且有 α,β 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根,∴ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$,$\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

由于 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$,$\alpha\beta>0$,$a<0$,∴ $c<0$.

∴不等式 $cx^2-bx+a>0$ 可化为 $x^2-\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}<0$.

由 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$,$\alpha\beta=\frac{c}{a}$,可知 $-\frac{b}{c}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$,$\frac{a}{c}=\frac{1}{\alpha\beta}$.

∴不等式 $x^2-\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}<0$ 等价于 $x^2+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+\frac{1}{\alpha\beta}<0$.

∴ $\left(x+\frac{1}{\alpha}\right)\left(x+\frac{1}{\beta}\right)<0$. ∵ $0<\alpha<\beta$,

∴ $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$,∴ $-\frac{1}{\alpha}<-\frac{1}{\beta}$,

∴不等式 $cx^2-bx+a>0$ 的解集为 $\left\{x\middle|-\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}\right\}$,故选 B.

题 11　(北京西城 4 月)若集合 A_1,A_2 满足 $A_1\cup A_2=A$,则记$[A_1,A_2]$是 A 的一组双子集拆分. 规定:$[A_1,A_2]$和$[A_2,A_1]$是 A 的同一组双子集拆分. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$,那么 A 的不同双子集拆分共有　(　　)

A. 15 组　B. 14 组　C. 13 组　D. 12 组

解　$A_1\cup A_2=A$ 中的元素所在的区域有三个,如图 1-1 中的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ,元素 1,2,3 在某个区域的可能性都有三种,则 1,2,3 投放到 3 个区域的方法有 3^3 种,每一种投放法都对应着 A 的一组双子集拆分,这其中除了 $A_1=A_2=A=\{1,2,3\}$之外,其余的则是$[A_1,A_2]$和$[A_2,A_1]$型的 A 的同一组双子集拆分,例如$[\{1\},\{2,3\}]$和$[\{2,3\},\{1\}]$,则 A 的不同双子集拆分共有$\frac{3^3-1}{2}+1=14$ 组,故选 B.

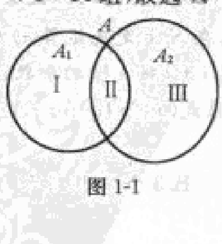

图 1-1

题 12 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2+px+q<0\}$，且满足 $A\cap B=\{x|-1\leqslant x<2\}$，则 p,q 满足 （　　）

A. $2p+q+4=0$　　B. $p+q+5=0$

C. $p+q=0$　　D. $p-q=0$

解　$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，由已知得 $B\neq\varnothing$，设 $B=\{x|x_1<x<x_2\}$，观察数轴得 $x_1<-1$，$x_2=2$，$\therefore 4+2p+q=0$，故选 A.

题 13 若关于 x 的不等式 $ax-b>0$ 的解集为 $(1,+\infty)$，则关于 x 的不等式 $\frac{ax+b}{x-2}>0$ 的解集是 （　　）

A. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

B. $(-1,2)$

C. $(1,2)$

D. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

解　由关于 x 的不等式 $ax-b>0$ 的解集为 $(1,+\infty)$，可得 $\begin{cases}a>0\\ \frac{b}{a}=1\end{cases}$，即 $a=b>0$，则 $\frac{ax+b}{x-2}>0$ 等价于 $(ax+a)(x-2)>0$，又 $a>0$，$\therefore (x+1)(x-2)>0$，$\therefore x>2$ 或 $x<-1$. 故选 A.

题 14 设集合 $P=\{m|-1<m<0\}$，$Q=\{m\in\mathbf{R}|mx^2+4mx-4<0$，$x$ 为任意实数$\}$，则下列关系成立的是 （　　）

A. $P\subsetneqq Q$　　B. $Q\subsetneqq P$

C. $P=Q$　　D. $P\cap Q=\varnothing$

解　当 $m=0$ 时，$-4<0$ 恒成立；

当 $m\neq 0$ 时，$mx^2+4mx-4<0$ 恒成立，

$\therefore\begin{cases}m<0,\\ \Delta<0,\end{cases}$ $\therefore -1<m<0$.

综上，当 $m\in(-1,0]$ 时，$mx^2+4mx-4<0$ 恒成立，即 $Q=(-1,0]$，又 $P=(-1,0)$，可得 $P\subsetneqq Q$，故选 A.

题 15 已知集合 $M=\{(x,y)|y=\sqrt{9-x^2}\}$，$N=\{(x,y)|y=x+b\}$，且 $M\cap N=\varnothing$，则 b 应满足的条件是 （　　）

A. $|b|\geqslant 3\sqrt{2}$

B. $0<b<\sqrt{2}$

C. $-3\leqslant b\leqslant 3\sqrt{2}$

D. $b>3\sqrt{2}$ 或 $b<-3$

解　由 $y=\sqrt{9-x^2}$ 知 $x^2+y^2=9(y\geqslant 0)$ 的图像是半圆（如图 1-2）. 当直线 $y=x+b$ 与半圆无公共点时，截距 $b>3\sqrt{2}$ 或 $b<-3$，故选 D.

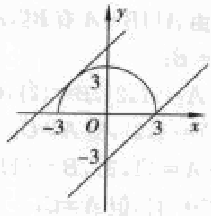

图 1-2

二、填空题

题 16 给出以下说法：

①任何一个集合 A 至少有两个子集；②自然数集的补集是负整数集；③无限集的真子集是有限集；④任何一个集合 A 必有一个真子集；⑤集合 $\{x|y=x^2-2x+1\}$ 与集合 $\{y|y=x^2-2x+1\}$ 为同一集合；⑥设全集为 U，若 $A\cap B=U$，则 $A=B=U$；⑦若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$；⑧若 $a\in A\cup B$，则 $a\in A$；⑨若 $a\in A\cap B$，则 $a\in A\cup B$；⑩若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$；⑪若 $A\cup B=A$，则 $A\cap B=B$；⑫若 $A\cup B=B\cup C$，则 $A=C$；⑬若 $A\cap B=B\cap C$，则 $A=C$；⑭若 M,N 为全集 U 的非空子集，且 $\complement_U M\supseteq N$，则 $M\subsetneqq\complement_U N$.

其中正确的序号为________.

解　①错，当 $A=\varnothing$ 时，A 只有一个子集为它本身；

②错，因为未指明全集，如全集为 $\mathbf{R}$，显然错误；

③错，举反例 $\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}$，$\mathbf{N}$，$\mathbf{Z}$ 均为无限集；

④错，当该集合为 $\varnothing$ 时，无真子集；

⑤错，$\because\{x|y=x^2-2x+1\}$ 代表 $y=x^2-2x+1$ 中的 x 的取值范围，$\therefore\{x|y=x^2-2x+1\}=\mathbf{R}$，而 $\{y|y=x^2-2x+1\}$ 代表 $y=x^2-2x+1$ 中 y 的取值范围，$\therefore\{y|y=x^2-2x+1\}=\{y|y\geqslant 0\}$，故⑤错；

⑥正确，$\because A\cap B=U$，$\therefore A\supseteq U$ 且 $B\supseteq U$，而

U 为全集，$\therefore A\subseteq U$ 且 $B\subseteq U$，故 $A=B=U$；

⑦错，若 $A=\{1\}$，$B=\{2\}$，显然有 $A\cap B=\varnothing$，但 $A\neq\varnothing$ 且 $B\neq\varnothing$；

⑧错，若 $a\in A\cup B$，则 $a\in A$，或 $a\in B$；

⑨正确，$\because A\cap B\subseteq A\cup B$，$\therefore$⑨正确；

⑩正确；

⑪正确，由 $A\cup B=A$ 有 $B\subseteq A$，

$\therefore A\cap B=B$；

⑫错，若 $A=\{1,2\}$，$B=\{2\}$，$C=\{1\}$，则有 $A\cup B=B\cup C=\{1,2\}$，但 $A\neq C$；

⑬错，若 $A=\{1,2\}$，$B=\{1\}$，$C=\{1\}$，则 $A\cap B=B\cap C=\{1\}$，但 $A\neq C$；

⑭错，借助 Venn 图可知，若 $\complement_U M\supseteq N$，则 $M\subseteq\complement_U N$，因为由 $\complement_U M\supseteq N$ 可能有 $\complement_U M=N$，此时 $M=\complement_U N$，故⑭错.

题 17 （江西九校联考）已知集合 $M=\{y\mid y=10^{-|x|}\}$，集合 $N=\{x\mid y=\sqrt{|\log_3 x|-1}\}$，则 $M\cap N$ 等于________.

解　集合 M 是函数的值域，集合 N 是函数的定义域，解得 $M=(0,1]$，$N=\left(0,\dfrac{1}{3}\right]\cup[3,+\infty)$，故 $M\cap N=\left(0,\dfrac{1}{3}\right]$.

题 18 已知集合 $A=\left\{x\left|\begin{cases}x^2-4x+3<0\\x^2-6x+8<0\end{cases}\right.\right\}$，集合 $B=\{x\mid 2x^2-9x+a<0\}$，若 $A\subseteq B$，则 a 的取值范围是________.

解　由题知，$A=\left\{x\left|\begin{cases}x^2-4x+3<0\\x^2-6x+8<0\end{cases}\right.\right\}=\left\{x\left|\begin{cases}1<x<3\\2<x<4\end{cases}\right.\right\}=\{x\mid 2<x<3\}$. 令 $f(x)=2x^2-9x+a$，则欲满足 $A\subseteq B$，则方程 $2x^2-9x+a=0$ 的两个根 x_1，x_2 必满足 $x_1\leqslant 2$，且 $x_2\geqslant 3$，从而实数 a 必须满足 $\begin{cases}f(2)\leqslant 0\\f(3)\leqslant 0\end{cases}$，解得 $a\leqslant 9$，故 a 的取值范围是 $(-\infty,-9]$.

题 19 若 $\left\{x\left|\dfrac{(x+a)(x+b)}{x-c}\geqslant 0\right.\right\}=[-1,2)\cup[3,+\infty)$，则 $a+b=$________.

解　由题可知 $c=2$，所以有 $\begin{cases}-a=-1\\-b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-a=3\\-b=-1\end{cases}$，故 $\begin{cases}a=1\\b=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-3\\b=1\end{cases}$，从而 $a+b=-2$.

题 20 （2007 北京，12）已知集合 $A=\{x\mid |x-a|\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+4\geqslant 0\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是________.

解　$\because x^2-5x+4\geqslant 0$，$\therefore x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 4$，即 $B=(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$. 又 $A=[a-1,a+1]$，$A\cap B=\varnothing$. $\therefore\begin{cases}a+1<4,\\a-1>1,\end{cases}$ 解得 $2<a<3$. 故填 $(2,3)$.

题 21 （2007 福建，16）中学数学中存在许多关系，比如“相等关系”、“平行关系”等等，如果集合 A 中元素之间的一个关系“$\sim$”满足以下三个条件：

(1)自反性：对于任意 $a\in A$，都有 $a\sim a$；

(2)对称性：对于 $a,b\in A$，若 $a\sim b$，则有 $b\sim a$；

(3)传递性：对于 $a,b,c\in A$，若 $a\sim b$，$b\sim c$，则有 $a\sim c$，

则称“$\sim$”是集合 A 的一个等价关系. 例如：“数的相等”是等价关系，而“直线的平行”不是等价关系（自反性不成立）. 请你再列出两个等价关系：________.

解　答案不唯一，如“图形的全等”、“图形的相似”、“非零向量的共线”、“命题的充要条件”等等.

(1)令 A 为所有三角形构成的集合，定义：两三角形的全等为关系“$\sim$”，则其为等价关系.

(2)令 B 为所有正方形构成的集合，定义 B 中两元素相似为关系“$\sim$”，则其为等价关系.

(3)令 C 为一切非零向量构成的集合，定义 C 中任两向量共线为关系“$\sim$”，则其为等价关系.

题 22 设命题 p：$|4x-3|\leqslant 1$；命题 q：$x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0$. 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件，则实数 a 的取值范围是________.

解 $p:|4x-3|\leqslant 1\Rightarrow \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$,

$q:a\leqslant x\leqslant a+1$,由题设可知 $p\Rightarrow q$,$q\nRightarrow p$

$\therefore \left[\frac{1}{2},1\right]\subsetneqq(a,a+1)$

$\therefore a\leqslant\frac{1}{2}$ 且 $a+1\geqslant 1\Rightarrow 0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$

三、解答题

题 23 (2004 上海,19)记函数 $f(x)=\sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A,$g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)]$ $(a<1)$ 的定义域为 B.

(1)求 A;

(2)若 $B\subseteq A$,求实数 a 的取值范围.

解 (1)由 $2-\frac{x+3}{x+1}\geqslant 0$,得 $\frac{x-1}{x+1}\geqslant 0$,

$\therefore x<-1$ 或 $x\geqslant 1$,即 $A=(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$.

(2)由 $(x-a-1)(2a-x)>0$,得 $(x-a-1)(x-2a)<0$.

$\because a<1$,$\therefore a+1>2a$. $\therefore B=(2a,a+1)$.

$\because B\subseteq A$,$\therefore 2a\geqslant 1$ 或 $a+1\leqslant -1$,即 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 或 $a\leqslant -2$,而 $a<1$,$\therefore \frac{1}{2}\leqslant a<1$ 或 $a\leqslant -2$.

故当 $B\subseteq A$ 时,实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup\left[\frac{1}{2},1\right)$.

题 24 设集合 $M=\left\{x\,\middle|\,\frac{ax-5}{x^2-a}<0\right\}$.

(1)当 $a=4$ 时,求集合 M;

(2)若 $3\in M$ 且 $5\notin M$,求实数 a 的取值范围.

解 (1)当 $a=4$ 时,有 $\frac{4x-5}{x^2-4}<0$,即 $(x^2-4)(4x-5)<0$,$\therefore x<-2$,或 $\frac{5}{4}<x<2$,从而此时 $M=\left\{x\,\middle|\,x<-2 \text{ 或 } \frac{5}{4}<x<2\right\}$.

(2)$\because 3\in M$,$\therefore \frac{3a-5}{9-a}<0$,

即 $(a-9)(3a-5)>0$,

$\therefore a>9$,或 $a<\frac{5}{3}$ ①

又 $5\notin M$,$\therefore \frac{5a-5}{25-a}\geqslant 0$ 或 $25-a=0$,

即有 $(5a-5)(a-25)\leqslant 0$,$\therefore 1\leqslant a\leqslant 25$ ②

由①②可知 $1\leqslant a<\frac{5}{3}$,或 $9<a\leqslant 25$,从而实数 $a\in\left[1,\frac{5}{3}\right)\cup(9,25]$.

题 25 已知集合 $A=\{x|x=3a+5b,a,b\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{y|y=7m+10n,m,n\in\mathbf{Z}\}$,试证明 $A=B$.

证明 一方面,任取 $x\in A$,则有 $x=3a+5b$ 且 $a,b\in\mathbf{Z}$.

$\because 3a+5b=7(-a+5b)+10(a-3b)$,且 $-a+5b\in\mathbf{Z}$,$a-3b\in\mathbf{Z}$,

$\therefore x\in B$,即 $A\subseteq B$.

另一方面,任取 $x\in B$,则有 $x=7m+10n$,且 $m,n\in\mathbf{Z}$.

$\because 7m+10n=3(-m-5n)+5(2m+5n)$,且 $-m-5n\in\mathbf{Z}$,$2m+5n\in\mathbf{Z}$.

$\therefore x\in A$,即 $B\subseteq A$.

综上,$A=B$.事实上 $A=B=\mathbf{Z}$.

题 26 已知 $M=\{(x,y)|x^2+2x+y^2=0\}$,$N=\{(x,y)|y=x+a\}$,且 $M\cap N\supsetneqq\varnothing$,求 a 的范围.

解法 1 由 $M\cap N\supsetneqq\varnothing$ 可知方程组 $\begin{cases}x^2+2x+y^2=0\\y=x+a\end{cases}$ 有解.即 $2x^2+(2+2a)x+a^2=0$ 有解

$\therefore (2+2a)^2-4\cdot 2a^2\geqslant 0$

可解得 $1-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 1+\sqrt{2}$.

解法 2 可用图解.

图 1-3 中,M 为以 $(-1,0)$ 为圆点,1 为半径的圆. N 为斜率为 1,截距为 a 的直线.

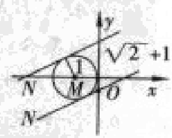

图 1-3

由图可知

$1-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 1+\sqrt{2}$.

题 27 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x|x^2-mx+2=0\}$，且 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求实数 a 的值和 m 的取值范围.

解 由 $A\cup B=A$ 可知 $B\subseteq A$，由方程 $x^2-3x+2=0$，得 $x=1$ 或 $x=2$，

$\therefore A=\{1,2\}$.

又方程 $x^2-ax+(a-1)=0$ 的两个根为 1 或 $a-1$，

$\therefore B$ 中的元素 $a-1$ 可能为 1 或 2.

当 $a-1=1$，即 $a=2$ 时，$B=\{1\}$；

当 $a-1=2$，即 $a=3$ 时，$B=\{1,2\}$.

所以 a 的值为 2 或 3.

又由 $A\cap C=C$ 可知 $C\subseteq A$，$\therefore C$ 中的元素有 3 种可能性：

若方程 $x^2-mx+2=0$ 有两个不同的根 1 或 2 时，此时 $m=3$；

若方程 $x^2-mx+2=0$ 有两个相等根时，即 $\Delta=m^2-8=0$，$m=\pm2\sqrt{2}$，此时方程的根为 $\sqrt{2}$，则 $C\nsubseteq A$，故 $m\neq\pm2\sqrt{2}$；

若方程 $x^2-mx+2=0$ 无实根，即 $\Delta=m^2-8<0$，$-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$ 时，$C=\varnothing$，满足 $A\cap C=C$.

$\therefore m=3$ 或 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

注 欲求 a 或 m，只有从 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$ 中去确定 B 与 A，或 C 与 A 的关系，从而再判断 B、C 中元素的可能性，求得 a 或 m；另外不能记为 $B=\{1,a-1\}$，因为 $a-1$ 可能为 1. 注意对 $C=\varnothing$ 时的讨论.

题 28 设 $A=\{x|x^3-7x^2+14x-8=0\}$，$B=\{x|x^3+2x^2-c^2x-2c^2=0,c>0\}$.

(1)求 A、B 的各个元素；

(2)以集合 $A\cup B$ 的任意元素 a、b 作为二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根，试在 $f(x)=x^2+px+q$ 的最小值中，求出最大的或最小的.

解 (1)$x^3-7x^2+14x-8=(x-1)(x-2)(x-4)$，$x^3+2x^2-c^2x-2c^2=(x+2)(x+c)(x-c)$，

$\because c>0\therefore A=\{1,2,4\}$，$B=\{-2,c,-c\}$.

(2)设 $x^2+px+q=0$ 的根为 a、b，则 $f(x)$ 的最小值是 $-\frac{1}{4}(a-b)^2$，

当 $a=b$ 时，$-\frac{1}{4}(a-b)^2$ 最大值是 0；

当 $|a-b|$ 最大时，$-\frac{1}{4}(a-b)^2$ 有最小值；

$\because a,b\in\{-2,-c,1,2,4,c\}$，

$c\geqslant4$ 时，$|a-b|$ 的最大值是 $c-(-c)=2c$，$f(x)$ 有最小值 $-c^2$；

$2\leqslant c\leqslant4$ 时，$|a-b|$ 的最大值是 $4-(-c)=4+c$，$f(x)$ 有最小值 $-\frac{(4+c)^2}{4}$；

$0<c\leqslant2$ 时，$|a-b|$ 的最大值是 $4-(-2)=6$，$f(x)$ 有最小值 -9.

题 29 (2007 北京，20)已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}(k\geqslant2)$，其中 $a_i\in\mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,k)$. 由 A 中的元素构成两个相应的集合：$S=\{(a,b)|a\in A,b\in A,a+b\in A\}$；$T=\{(a,b)|a\in A,b\in A,a-b\in A\}$，其中 (a,b) 是有序数对. 集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n. 若对于任意的 $a\in A$，总有 $-a\notin A$，则称集合 A 具有性质 P.

(1)检验集合 $\{0,1,2,3\}$ 与 $\{-1,2,3\}$ 是否具有性质 P，并对其中具有性质 P 的集合，写出相应的集合 S 和 T；

(2)对任何具有性质 P 的集合 A，证明：$n\leqslant\frac{k(k-1)}{2}$；

(3)判断 m 和 n 的大小关系，并证明你的结论.

解 (1)集合 $\{0,1,2,3\}$ 不具有性质 P. 集合 $\{-1,2,3\}$ 具有性质 P，其相应的集合 S 和 T 是 $S=\{(-1,3),(3,-1)\}$，$T=\{(2,-1),(2,3)\}$.

(2)首先，由 A 中元素构成的有序数对 (a_i,a_j) 共有 k^2 个. 因为 $0\notin A$，所以 $(a_i,a_i)\notin T(i=1,2,\cdots,k)$；又因为当 $a\in A$ 时，$-a\notin A$，所以当 $(a_i,a_j)\in T$ 时，$(a_j,a_i)\notin T(i,j=1,2,\cdots,k)$. 从而，集合 T 中元素的个数最多为

$\frac{1}{2}(k^2-k)=\frac{k(k-1)}{2}$，即 $n\leqslant\frac{k(k-1)}{2}$.

(3) $m=n$，证明如下：

①对于 $(a,b)\in S$，根据定义，$a\in A$，$b\in A$，且 $a+b\in A$，从而 $(a+b,b)\in T$.

如果 (a,b) 与 (c,d) 是 S 的不同元素，那么 $a=c$ 与 $b=d$ 中至少有一个不成立，从而 $a+b=c+d$ 与 $b=d$ 中也至少有一个不成立，故 $(a+b,b)$ 与 $(c+d,d)$ 也是 T 的不同元素. 可见，S 中元素的个数不多于 T 中元素的个数，即 $m\leqslant n$.

②对于 $(a,b)\in T$，根据定义，$a\in A$，$b\in A$，且 $a-b\in A$，从而 $(a-b,b)\in S$.

如果 (a,b) 与 (c,d) 是 T 的不同元素，那么 $a=c$ 与 $b=d$ 中至少有一个不成立，从而 $a-b=c-d$ 与 $b=d$ 中也至少有一个不成立，故 $(a-b,b)$ 与 $(c-d,d)$ 也是 S 的不同元素. 可见，T 中元素的个数不多于 S 中元素的个数，即 $n\leqslant m$. 由①②可知，$m=n$.

题 30 已知集合 $A=\{(x,y)\,|\,|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$，$B=\{(x,y)\,|\,(x-a)^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$，其中 a 为实数.

(1) 当 $A\cap B\neq\varnothing$ 时，求 a 的取值范围；

(2) 若记点集 $A\cap B$ 的面积为 $f(a)$，求 $f(1.5)$.

解 集合 A 的平面区域是正方形 $-1\leqslant x\leqslant 1$，$-1\leqslant y\leqslant 1$；B 的平面区域是以 $P(a,a)$ 为圆心，1 为半径的圆的内部和圆周.

(1) 点 $P(a,a)$ 在直线 $y=x$ 上，当圆心 P 沿直线 $y=x$ 由上往下运动且 $A\cap B=\{(1,1)\}$ 时（如图 1-4a），$|OP|=\sqrt{2}+1$，则 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+1)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 P 点坐标为 $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 由对称性可知，当 $A\cap B=\{(-1,-1)\}$ 时，圆心 P 的坐标为 $\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2},-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

故 a 的取值范围是 $-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

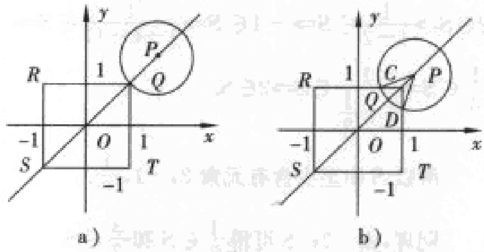

图 1-4

(2) 当 $a=1.5$ 时，知 $f(1.5)$ 表示圆 $(x-1.5)^2+(y-1.5)^2=1$ 与正方形 $PQTS$ 相交部分的面积（如图 1-4b）.

$|PQ|=\sqrt{(1.5-1)^2+(1.5-1)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle CQP=135°$，

在 $\triangle CQP$ 中，由正弦定理得 $\frac{|CP|}{\sin 135°}=\frac{|PQ|}{\sin\angle PCQ}$，

$\therefore \sin\angle PCQ=\frac{|PQ|\sin 135°}{|CP|}$.

$\because |CP|=1$，$\therefore \sin\angle PCQ=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \angle PCQ=30°$，则 $\angle CPQ=180°-135°-30°=15°$，$\therefore \angle CPD=30°$.

$\therefore f(1.5)=S_{扇形CPD}-2S_{\triangle CQP}=\frac{\pi}{12}-2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sin 15°=\frac{\pi+3-3\sqrt{3}}{12}$.

题 31 (2006 上海，10) 设 S 满足下列两个条件的实数所构成的集合：①$1\notin S$，②若 $a\in S$，则 $\frac{1}{1-a}\in S$，求解下列问题：

(1) 若数列 $\{2\cdot(-1)^n\}$ 中的项都在 S 中，求 S 中所含元素个数最少的集合 S^*；

(2) 在 S^* 中任取 3 个元素 a,b,c，求使 $abc=-1$ 的概率；

(3) S 中所含元素个数一定是 $3n(n\in\mathbf{N}^*)$ 个吗？若是，请给出证明；若不是，试说明理由.

解 (1) $a_n=2\cdot(-1)^n$，所以 $a_1=-2$，$a_2=2$，$a_3=-2\cdots$ 即集合 S 中必有 2 和 -2.

$2\in S\Rightarrow\frac{1}{1-2}\in S\Rightarrow-1\in S\Rightarrow\frac{1}{1-(-1)}\in S\Rightarrow\frac{1}{2}\in S\Rightarrow\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\in S\Rightarrow 2\in S.$

所以 S 中至少含有元素 $2,-1,\frac{1}{2}$.

同理,由 $-2\in S$ 可得 $\frac{1}{3}\in S$ 和 $\frac{3}{2}\in S$.

所以 S 中至少含有元素 $-2,\frac{1}{3},\frac{3}{2}$.

即 S 中所含元素个数最少的集合为 $S^*=\left\{2,-1,\frac{1}{2},-2,\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right\}$.

(2)在 S^* 中任取 3 个元素 a,b,c,共有(组合)$C_6^3=20$ 种取法,而使 $abc=-1$ 的只有 $2,-1,\frac{1}{2}$ 和 $-2,\frac{1}{3},\frac{3}{2}$ 两种取法,所以使 $abc=-1$的概率为$\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$.

(3)一定是 $3n(n\in\mathbf{N}^*)$个. 由 $a\in S$ 且 $1\notin S\Rightarrow a\neq1$,所以由 $a\in S\Rightarrow\frac{1}{1-a}\in S\Rightarrow\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}\in S\Rightarrow1-\frac{1}{a}\in S\Rightarrow\frac{1}{1-(1-\frac{1}{a})}\in S\Rightarrow a\in S$,即当 $a\in S$时,$\frac{1}{1-a}\in S$,$1-\frac{1}{a}\in S$.

下面证明 $a,\frac{1}{1-a},1-\frac{1}{a}$互不相等.

若 $a=\frac{1}{1-a}$,则 $a-a^2=1$,即 $a^2-a+1=0$ 无解,所以 $a\neq\frac{1}{1-a}$;若 $a=1-\frac{1}{a}$,则 $a^2-a+1=0$无解,所以 $a\neq1-\frac{1}{a}$;若$\frac{1}{1-a}=1-\frac{1}{a}$,则 $a^2-a+1=0$无解,所以$\frac{1}{1-a}\neq1-\frac{1}{a}$,即 $a,\frac{1}{1-a},1-\frac{1}{a}$互不相等. 所以 S 中含有元素个数一定是 $3n(n\in\mathbf{N}^*)$个.

1.2　简易逻辑

一、选择题

题 32　已知 p 是 r 的充分不必要条件,s 是 r 的必要条件,q 是 s 的必要条件,那么 p 是 q 的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

解　由 p 是 r 的充分不必要条件可知 $p\Rightarrow r$,但 $r\not\Rightarrow p$　①

"s 是 r 的必要条件"知 $r\Rightarrow s$　②

"q 是 s 的必要条件"可得 $s\Rightarrow q$　③

由①,②,③可知 $p\Rightarrow q$,从而 p 是 q 的充分条件,假设"p 是 q 的必要条件"则 $q\Rightarrow p$,再由 $r\Rightarrow s,s\Rightarrow p$,可得 $r\Rightarrow p$,这与①相矛盾,从而 $q\not\Rightarrow p$. 从而 p 是 q 的充分不必要条件,故选 A.

题 33　(2006 北京丰台)给出命题:"已知 a、b、c、d 是实数,若 $a\neq b$ 且 $c\neq d$,则 $a+c\neq b+d$". 对原命题,逆命题,否命题,逆否命题而言,其中的真命题有　(　　)

A. 0 个　B. 1 个　C. 2 个　D. 4 个

解　原命题是假命题,如 $3\neq5,4\neq2$,但 $3+4=5+2$. 逆命题为"$a+c\neq b+d$",则 $a\neq b$ 且 $c\neq d$ 也是假命题,如:$3+4\neq3+5$ 中,$a=b=3,c=4\neq d=5$.

由原命题与其逆否命题等价,知否命题和逆否命题均为假命题,故选 A.

题 34　(2005 东北三校)命题:p:$x=\pi$ 是 $y=|\sin x|$ 的一条对称轴;q:2π 是 $y=|\sin x|$ 的最小正周期,下列复合命题:①p 或 q;②p 且 q;③非 p;④非 q,其中真命题有　(　　)

A. 0 个　B. 1 个　C. 2 个　D. 3 个

解　由题意知 p 真 q 假,则①④为真命

题，故选C.

题35　(2007 重庆，2)命题"若$x^2<1$，则$-1<x<1$"的逆否命题是　(　　)

A. 若$x^2\geqslant 1$，则$x\geqslant 1$或$x\leqslant -1$

B. 若$-1<x<1$，则$x^2<1$

C. 若$x>1$或$x<-1$，则$x^2>1$

D. 若$x\geqslant 1$或$x\leqslant -1$，则$x^2\geqslant 1$

解　原命题的逆否命题为"若$x\geqslant 1$或$x\leqslant -1$，则$x^2\geqslant 1$"，故选D.

题36　一元二次方程$ax^2+2x+1=0$ $(a\neq 0)$有一个正根和一个负根的充分不必要条件是　(　　)

A. $a<0$　　B. $a>0$

C. $a<-1$　　D. $a>1$

解法1　方程$ax^2+2x+1=0(a\neq 0)$有一正一负两根$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0)>0 \\ a<0 \end{cases}$或$\begin{cases} f(0)<0 \\ a>0 \end{cases}$，其中$f(x)=ax^2+2x+1(a\neq 0)$，

$\because f(0)=1>0$，$\therefore a<0$，而题设要求充分不必要条件，故选C.

解法2　设x_1、x_2为方程$ax^2+2x+1=0$ $(a\neq 0)$的两根，则方程$ax^2+2x+1=0(a\neq 0)$有一正一负两根$\Leftrightarrow x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<0$，$\therefore a<0$，又$a<-1$，必可得$a<0$. 反之不然，故选C.

题37　(2007 山东，7)命题"对任意的$x\in \mathbf{R}$，$x^3-x^2+1\leqslant 0$"的否定是　(　　)

A. 不存在$x\in \mathbf{R}$，$x^3-x^2+1\leqslant 0$

B. 存在$x\in \mathbf{R}$，$x^3-x^2+1\leqslant 0$

C. 存在$x\in \mathbf{R}$，$x^3-x^2+1>0$

D. 对任意的$x\in \mathbf{R}$，$x^3-x^2+1>0$

解　"对任意$x\in \mathbf{R}$，$x^3-x^2+1\leqslant 0$"等价于关于x的不等式$x^3-x^2+1\leqslant 0$恒成立，其否定为：$x^3-x^2+1\leqslant 0$不恒成立；即存在$x\in \mathbf{R}$，使得$x^3-x^2+1>0$成立. 故选C.

命题思路　考查命题否定的判定方法.

题38　(2007 辽宁，10)设p、q是两个命题，$p:\log_{\frac{1}{2}}(|x|-3)>0$，$q:x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}>0$，则$p$是$q$的　(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

解　$\because p:\log_{\frac{1}{2}}(|x|-3)>0\Rightarrow 0<|x|-3<1\Rightarrow 3<|x|<4\Rightarrow -3<x<-4$或$3<x<4$；$q:x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}>0\Rightarrow \left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)>0\Rightarrow x>\frac{1}{2}$或$x<\frac{1}{3}$，$\therefore p$是$q$的充分而不必要条件，故选A.

题39　(2007 山东，9)下列各小题中，p是q的充要条件是　(　　)

①$p:m<-2$或$m>6$；$q:y=x^2+mx+m+3$有两个不同的零点. ②$p:\frac{f(-x)}{f(x)}=1$；$q:y=f(x)$是偶函数. ③$p:\cos\alpha=\cos\beta$；$q:\tan\alpha=\tan\beta$. ④$p:A\cap B=A$；$q:\complement_U B\subseteq \complement_U A$.

A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①④

解　对①$\because y=x^2+mx+m+3=0$有两个不同零点，$\therefore m^2-4(m+3)>0$，得$m<-2$或$m>6$. $\therefore p$是q的充要条件，排除选项B、C；对②，q：取$f(x)=x^2$为$\mathbf{R}$上的偶函数，但$\frac{f(-x)}{f(x)}$在$x=0$时没意义，p为q充分非必要条件，排除选项A，故选D.

题40　"$a=b$"是"直线$y=x+2$与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=2$相切"的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分又不必要条件

解　若$a=b$，则有圆心(a,b)到直线$y=x+2$的距离$d=r$，$\therefore$相切.

若相切，则有$\frac{|a-b+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow a=b$或$a-b=-4$. 选A.

题41　(北京高考题)"$m=\frac{1}{2}$"是"直线

$(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直”的 ( )

A. 充分必要条件

B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

解 直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直的充要条件是：$(m+2)(m-2)+3m(m+2)=0$

解得 $m=\frac{1}{2}$ 或 $m=2$，选 B.

题 42 (2006 湖北,8)有限集合 S 中元素的个数记作 card(S). 设 A、B 都为有限集合，给出下列命题：

①$A\cap B=\varnothing$ 的充要条件是 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)$；

②$A\subseteq B$ 的必要条件是 $\mathrm{card}(A)\leqslant\mathrm{card}(B)$；

③$A\not\subseteq B$ 的充分条件是 $\mathrm{card}(A)\leqslant\mathrm{card}(B)$；

④$A=B$ 的充要条件是 $\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)$.

其中真命题的序号是 ( )

A. ③④　B. ①②　C. ①④　D. ②③

解 ①$A\cap B=\varnothing$，则 A、B 两个集合没有公共元素，①正确；②$A\subseteq B \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} A$ 中元素个数 $\leqslant B$ 中元素个数；③$A\not\subseteq B$ 与集合中的元素个数无关；④若 $A=B$，则 A 与 B 的元素完全相同，而不仅是元素个数相同，故选 B.

题 43 (2006 重庆)对于实数 x，规定 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，那么不等式 $4[x]^2-36[x]+45<0$ 成立的充分不必要条件是 ( )

A. $x\in\left(\frac{3}{2},\frac{15}{2}\right)$　B. $x\in[2,7]$

C. $x\in[2,8)$　D. $x\in[2,8]$

解 由原不等式得 $(2[x]-3)(2[x]-15)<0$，即 $\frac{3}{2}<[x]<\frac{15}{2}$，得 $2\leqslant[x]\leqslant7$，而 $2\leqslant[x]\leqslant7\Leftrightarrow2\leqslant x<8$，显然 $[2,7]$ 是 $[2,8)$ 的真子集，故选 B.

题 44 设有两个命题：①关于 x 的不等式 $x^2+2ax+4>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立；②函数 $f(x)=-(5-2a)^x$ 是减函数，若命题有且只有一个是真命题，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-2]$　B. $(-\infty,2)$

C. $(-2,2)$　D. $\left(2,\frac{5}{2}\right)$

解 若 $x^2+2ax+4>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 $-2<a<2$. 若 $f(x)=-(5-2a)^x$ 是减函数，则 $a<2$. 若①真②假，则 $a\in\varnothing$；若①假②真，则 $a\leqslant-2$. 故选 A.

题 45 (2007 江西,16)设有一组圆 C_k：$(x-k+1)^2+(y-3k)^2=2k^4$ $(k\in\mathbf{N}^*)$. 下列四个命题：

A. 存在一条定直线与所有的圆均相切

B. 存在一条定直线与所有的圆均相交

C. 存在一条定直线与所有的圆均不相交

D. 所有的圆均不经过原点

其中真命题的代号是______(写出所有真命题的代号).

解 C_k 的圆心 $(k-1,3k)$，半径 $\sqrt{2}k^2$，C_{k+1} 的圆心 $(k,3k+3)$，半径 $\sqrt{2}(k+1)^2$，圆心距为 $d=\sqrt{10}$，半径差值为 $\sqrt{2}(2k+1)\geqslant3\sqrt{2}>\sqrt{10}$，所以圆 C_k 内含于圆 C_{k+1}，即不存一条定直线与所有圆均相切，故不选 A；

由圆心 $(k-1,3k)$ 在直线 $y=3(x+1)$ 上，则存在直线 $y=3(x+1)$ 与所有的圆均相交，所以选 B；

由半径增加速度比圆心移动速度快，随着 k 的增大，圆可以描过整个平面，所以不存在一条定直线与所有的圆均不相交故不选 C；

把 $(0,0)$ 点代入圆的方程，$(k-1)^2+qk^2=2k^4$ ①

由 $k-1,k$ 是连续自然数一奇一偶. 则 $(k-1)^2+qk^2$ 为奇数，$2k^4$ 为偶数，所以方程①无解，即所有的圆均不经过原点，故选 D，故填 B,D.

二、填空题

题 46 设计如图 1-5 所示的四个电路图，条件 A 为开关 S_1 闭合；条件 B 为灯泡 L 亮，那么 A 是 B 的什么条件？(1) 甲________；

(2)乙______;(3)丙______;(4)丁______.

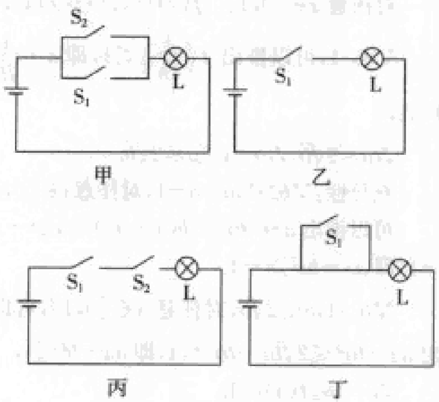

图 1-5

解 (1)开关 S_1 闭合则灯泡 L 亮,反之,灯泡 L 亮不一定有开关 S_1 闭合,即 $A\Rightarrow B$,但 $B\nRightarrow A$,从而 A 是 B 的充分不必要条件;(2)中易知 A 为 B 的充要条件;同理,对(3)有 $A\nRightarrow B$,但 $B\Rightarrow A$,所以 A 是 B 的必要不充分条件;(4)中条件 A 的有无,对条件 B 没有影响,从而 A 是 B 的既不充分也不必要条件.

题 47 给定两个命题 p、q,p:若 $x+y\leqslant 4$ 或 $xy\leqslant 4$,则 $x\leqslant 2$ 或 $y\leqslant 2$;q:有一个偶数是质数,则"p 且 q"为________命题(填"真"或"假").

解 直接判断 p 的真假较为困难,可转化为判断命题 p 的逆否命题,易得 p 的逆否命题为"若 $x>2$ 且 $y>2$,则 $x+y>4$ 且 $xy>4$",显然是真命题,而原命题与其逆否命题等价,从而命题 p 为真命题;对于命题 q,易知存在一个偶数 2,2 为质数,从而命题 q 亦为真命题,从而"p 且 q"为真命题.

题 48 (2007 上海,10)在平面上,两条直线的位置关系有相交、平行、重合三种. 已知 α、β 是两个相交平面,空间两条直线 l_1、l_2 在 α 上的射影是直线 s_1、s_2,l_1、l_2 在 β 上的射影是直线 t_1、t_2. 用 s_1 与 s_2,t_1 与 t_2 的位置关系,写出一个总能确定 l_1 与 l_2 是异面直线的充分条件:______.

解 显然 l_1 与 l_2 不重合,当 $l_1 /\!/ l_2$ 时,s_1 与 s_2,t_1 与 t_2 只能平行或重合或其中一对退化为点;当 l_1 与 l_2 相交时,s_1 与 s_2,t_1 与 t_2 只能相交或其中两条退化为点,因此,当 s_1,s_2 平行且 t_1,t_2 相交,或者 s_1,s_2 相交且 t_1,t_2 平行时,必有 l_1 与 l_2 是异面直线,故填 $s_1 /\!/ s_2$,并且 t_1 与 t_2 相交($t_1 /\!/ t_2$,并且 s_1 与 s_2 相交).

题 49 关于双曲线 $xy=1$ 有下面 4 个命题:

①它的渐近线方程为 $x=0$ 和 $y=0$;

②x 它的实轴长为 $2\sqrt{2}$;

③它的离心率为 $\sqrt{2}$;

④正三角形的三顶点 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$、$R(x_3,y_3)$在双曲线 $xy=1$ 上,则 x_1、x_2、x_3 不可能同号.

以上正确命题的序号为______(注:把所有正确命题的序号都写上).

解 利用等轴双曲线的定义、性质和 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像可知①②③④对.

三、解答题

题 50 设命题为"若 $m>0$,则关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根",试写出它的否命题、逆命题和逆否命题,并分别判断它们的真假.

解 否命题为"若 $m>0$,则关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 没有实数根";

逆命题为"若关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根,则 $m>0$";

逆否命题"若关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 没有实数根,则 $m\leqslant 0$".

由方程的判别式 $\Delta=1+4m$ 得 $\Delta>0$,即 $m>-\dfrac{1}{4}$ 时,方程有实根.

$\therefore m>0$ 使 $1+4m>0$,方程 $x^2+x-m=0$ 有实根,

$\therefore$ 原命题为真,从而逆否命题为真,否命题为假.