薄壁箱形梁在偏载作用下的计算

铁道工程系73级教育革命实践队箱形梁计算小组

长沙铁道学院科技情报室

一九七六年十月

毛主席语录

思想上政治上的路线正确与否是决定一切的。

要搞马克思主义，不要搞修正主义；要团结，不要分裂；要光明正大，不要搞阴谋诡计。

自力更生为主，争取外援为辅，破除迷信，独立自主地干工业、干农业，干技术革命和文化革命，打倒奴隶思想，埋葬教条主义，认真学习外国的好经验，也一定研究外国的坏经验——引以为戒，这就是我们的路线。

前言

万里东风舞红旗，八亿神州尽开颜。连日来全国亿万军民热烈庆祝华国锋同志任中国共产党中央委员会主席、中国共产党中央军事委员会主席，欢呼伟大领袖毛主席生前的英明决策得到实现，我们党又有了自己的英明领袖华国锋主席，热烈庆祝粉碎王洪文、张春桥、江青、姚文元反党集团篡党夺权阴谋的伟大胜利，愤怒声讨"四人帮"的滔天罪行。"四人帮"祸国殃民，罪恶滔天。除掉"四害"，大快人心，大得人心，我国的无产阶级专政更加巩固，人民群众意气风发，斗志昂扬，伟大的社会主义祖国到处莺歌燕舞。

社会主义革命的深入发展，推动教育革命深入发展。今年我系75级教育革命实践队在××桥工地，开门办学，接受工人阶级的再教育，向工人、工程技术人员学习，向实践学习，把教学和生产劳动结合起来。在桥处党委和实践队党支部的领导下，工农兵学员6人教师二人，参加了××桥箱形梁的计算。在现场同志的帮助下，用了一个半月的时间，基本完成了箱形梁偏载应力的计算，见本资料第一部分——算例，探讨了一种计算箱形梁偏载应力和位移的方法，比较简便易懂，计算结果比较符合物理概念，见本资料第二部分——计算原理。

箱形梁在偏载作用下的计算内容，主要是畸变与扭转。开始我们按《桥梁建设》介绍的外国方法——《无隔板箱形梁的计算》[注]计算畸变，出乎意料，计算的畸变大得惊人，畸变沿梁跨的变化不符合物理概念，经多次核对，计算无误，可能是计算理论有问题。我们再次研究了那篇文章，发现它关于梁板端剪力的边界条件使用了两次。因为它先导出梁板弯矩的四阶微分方程，需要梁

[注] 《桥梁建设》1976年第1期增刊"国外桥梁" (5)

板两端的剪力和弯矩的边界条件，才能解出四个积分常数，进而求出梁板弯矩。然后它将梁板弯矩积分两次以得出梁畸变方程式（公(7)），它用了箱形梁两端的端隔墙畸变条件，以确定两个积分常数。虽然字面上它是按无限长梁计算的，但计算实质是上述的那样。计算证明，梁板两端的剪力是端隔墙畸变的函数，用了梁板两端的剪力边界条件，就是用了端隔墙的畸变条件，所以那篇文章关于梁板剪力的边界条件多用了一次，这样，计算结果当然不会合理。发现问题以后，我们就抛弃了那篇文章的计算方法，在钢桁梁桥模型偏载试验资料分析方法（见参考资料3）的基础上，提出本资料中梁畸变的计算方法。这一次计算工作，使我们进一步体会到毛主席教导的无比英明、正确。毛主席早在40年代就教导我们："对于外国文化，排外主义的方针是错误的，应当尽量吸收进步的外国文化，以为发展中国新文化的借镜；盲目搬用的方针也是错误的，应当以中国人民的实际需要为基础，批判地吸收外国文化。"我们决不能盲目搬用外国的东西，而只能批判地吸收，我们要永远记住毛主席的教导，"独立自主地干工业、干农业，干技术革命和文化革命。"

本资料对于箱梁扭转计算，采用参考资料1的方法。在参加大桥局主持的《钢桥振动研究》的过程中，我们曾经编写了参考资料1，其中摘录了参考资料2中关于薄壁闭合截面扭转计算的基本内容。参考提摩盛科（S. Timoshenko）开口薄壁截面的束扭转刚度 EJ_ω 的计算原理，我们推导了一个薄壁闭合截面的束扭转刚度 EJ_ω 的计算公式。这次计算箱形梁，采用了这个公式，计算结果比较合理，见本资料第二部分——算例。为便于同志们审查，将参考资料1中的扭转计算转录于此。

这次计算和资料编写较为仓促，学习又不够，文中错误、缺点，恳请同志们批评指正。

长院铁道工程系箱形梁计算小组 1976.01.

目录

第一部分 ——计算原理

一、薄壁闭合截面构件的扭转计算

(一) 基本假设

1、闭合截面纯扭和约束扭转的纵向位移 w 的分布规律相同。

2、杆件纵向纤维之间的横向正应力等于零。由此假设，得到纤维纵向（图4 z向）正应力 $\sigma = E\varepsilon_z$，而纤维纵向应变为：

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \therefore \sigma = E\frac{\partial w}{\partial z}.$$

3. 杆件纯扭时，剪应力 τ 沿薄壁厚度均匀分布，并指向截面周界的切线方向（图3）。

(二) 薄壁闭合截面的纯扭转方程

将资料2的该部分内容摘录如下：

（图1a）表示一薄壁闭合截面构件两端受到扭矩 M_T 作用，设壁厚为 δ，沿壁厚均匀分布的剪应力为 τ，在构件壁上取微分体 ABCD 为隔离体，因为是纯扭，在构件壁上没有正应力作用，剪应力 τ 分布如（图1a），则由微分体的平衡条件，

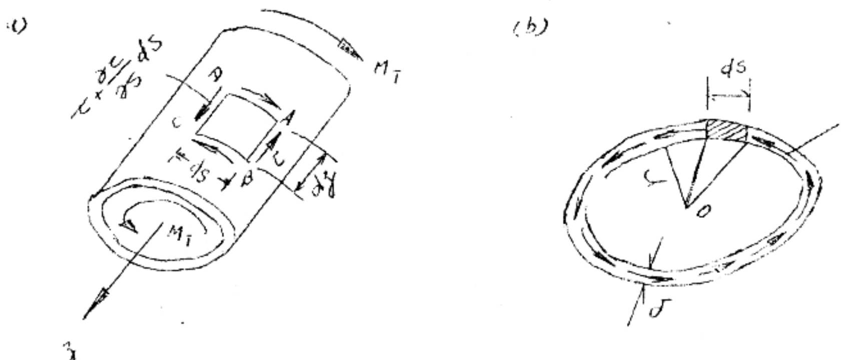


图 1

得 $\delta\frac{\partial\tau}{\partial s}ds=\frac{\partial q}{\partial s}ds=0$，$q=\delta\tau$，故闭合截面周界上各点的剪流q均相等（图1b）；又因为只是构件两端作用有扭矩M_T，故沿杆件长度的q也是常数。沿截面整个周界上的剪流q对任何一点O（图1b）的力矩总和$\oint q r ds$应该等于外扭矩M_T。

即 $\oint q r ds=M_T$，令$\oint r ds=W_K$。

$$\therefore \quad q=\frac{M_T}{W_K} \qquad (1)$$

下面导出构件单位长度的扭转角θ的表达式。由（图1a）所示构件截取一单位长度的构件，将此单位长度的构件分出一个沿周界ds宽度的元件（图2）。

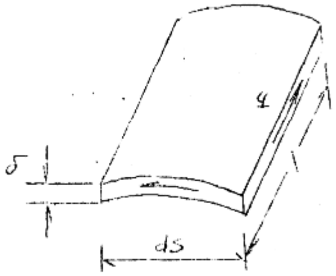


图 2

元件由q引起的纵向剪位移。

$$\Delta_z=\frac{q\,ds}{G\times 1\times\delta},$$

元件内积聚的剪切应变能。

$$du=\frac{q}{2}\cdot\Delta_z=\frac{q^2ds}{2G\delta},$$

单位长度构件的剪切应变能

$$u=\oint\frac{q^2ds}{2G\delta},$$

将(1)式代入，得 $u=\oint\frac{M_T^2\,ds}{2W_K^2G\delta}$。外扭矩$M_T$对单位长度扭转角θ所做的功。

$$T=\frac{1}{2}M_T\theta$$

$$=\frac{1}{2}M_T\theta=\oint\frac{M_T^2\,dS}{2W_K^2G\delta},$$

由 $T=U$，得

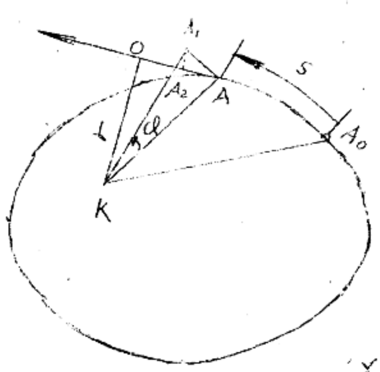
$$\therefore\ \theta=\frac{M_T}{G W_K^2}\oint\frac{dS}{\delta}=\frac{M_T S_K'}{G W_K^2},$$

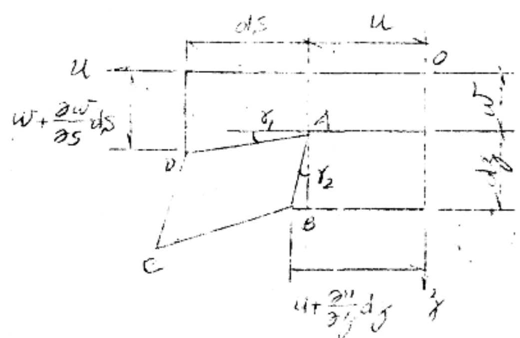
此地 $S_K'=\oint\frac{dS}{\delta}$（考虑为闭合截面周界壁厚不等），将 θ 写成一般形式

$$\theta=\frac{M_T}{G J_d} \qquad (2)$$

(2) 式中 G 为构件材料的剪切弹性模量。$J_d=\dfrac{W_K^2}{S_K'}$。

（三）纯扭时，构件横截面纵向位移 W 的计标。





$$\gamma_1=\frac{\partial W}{\partial S}$$

$$\gamma_2=\frac{\partial u}{\partial y}$$

图 3

下面求（图1a）构件横截面在扭矩 M_T 作用下的纵向位移 $\bar{w}$。如图（3a）所示。设闭合截面绕扭心K反时针方向扭转，我们来决定闭合截面周界（以闭合截面中心线来表示）任何一点A的位移。A_0 为计标起点。KA_0 为初向径，A至 A_0 点的环向距离为S，KA为A点的向径。当闭合截面绕K点扭转 φ 角时，A点移至 A_1，AA_1 与KA垂直，$AA_1 = KA\cdot\varphi$，AA_1 在A点周界切线u上的投影 $u = AA_2$，u表示A点在该点周界切线u方向的位移。K至切线u的距离 $KO = \gamma$，显然 $\triangle AA_1A_2$ 与 $\triangle AKO$ 相似，得

$$\frac{u}{KA\cdot\varphi} = \frac{\gamma}{KA} \quad \therefore\ u = \gamma\varphi \qquad (3)$$

再在构件A点附近取出一微分体 $ds\,dz$，并研究它的变形，A点在切线u方向上的位移为u，在z方向上的位移为 $\bar{w}$，图3b表示该微分体的剪切变形，微分体的剪切应变

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial \bar{w}}{\partial S} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

而 $\gamma = \dfrac{\tau}{G} = \dfrac{q}{G\delta}$，

$\therefore\ \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial S} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{q}{G\delta}$，而由(3)式，$\dfrac{\partial u}{\partial z} = \gamma\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = \gamma\theta$，$\theta = \dfrac{\partial \phi}{\partial z}$ ——构件在单位长度的扭转角，得

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial S} = -\gamma\theta + \frac{q}{G\delta}，积分，得$$

$$\bar{w} = -\int_0^S \theta\gamma\,dS + \int_0^S \frac{q}{G\delta}\,dS + \bar{w}_0 \qquad (4)$$

(4)式中 $\bar{w}_0$ 为图3a中计标起点 A_0 的z向位移，设闭合截面周长为m，则当A点绕行一周回到 A_0 点时，即当 $S = m$ 时，

$$(w)_{s=m}=w_0,$$

$$\therefore\ w_0=-\oint\theta\gamma ds+\oint\frac{q}{G\delta}ds+w_0,$$

得 $$\oint\frac{q}{G\delta}ds=\oint\theta\gamma ds,$$

前已令 $\oint\frac{ds}{\delta}=S_K'$　$\oint\gamma ds=w_K$，

而 $\frac{q}{G}$ 为常数，

$$\therefore\ \frac{q}{G}S_K'=\theta w_K$$

$$\therefore\ \frac{q}{G}=\theta\frac{w_K}{S_K'}=\theta\rho,\quad \rho=\frac{w_K}{S_K'}$$

代入(4)式，得

$$w=-\theta\int_0^S\gamma ds+\rho\theta\int_0^S\frac{ds}{\delta}+w_0$$

$$=-\theta w_S+\rho\theta S'+w_0 \qquad (5)$$

5)式中 $S'=\int_0^S\frac{ds}{\delta}$，　$w_S=\int_0^S\gamma dS$，　G与S无关，故提出在积分号之前。

沿闭合截面总周界长度内的平均纵向位移

$$\bar{w}=\frac{1}{m}\oint w ds$$

$$=\frac{1}{m}\oint[-\theta w_S+\rho\theta S'+w_0]ds$$

$$=-\frac{1}{m}\theta\oint w_S ds+\frac{1}{m}\oint\rho\theta S'dS+w_0$$

$$=-\theta\bar{w}_S+\rho\theta\bar{S}'+w_0 \qquad (6)$$

则(5)式减(6)式，即得到自平均纵向位移起算的纵向位移（仍以 w 表示）为：

$$w=\theta(\bar{w}_S-w_S)-\rho\theta(\bar{S}'-S') \qquad (7)$$

(7) 式中 $\overline{\omega_s}=\frac{1}{m}\oint\omega_s ds$，$\overline{s'}=\frac{1}{m}\oint s'ds$。

(四) 薄壁闭合截面的约束扭转方程

当构件横截面不能自由翘曲或者扭矩沿构件长度改变以及构件变截面时，将产生约束扭转，构件每单位长度的扭转角θ沿构件长度改变，构件横截面中除剪应力外，还有正应力σ作用。剪应力分两部分：一为纯扭产生的剪应力τ_1，另一为正应力σ产生的剪应力τ_2，τ_1形成的抵抗扭矩$M_{T1}=GJ_d\theta$（见2式），τ_2形成的抵抗扭矩为M_{T2}，外扭矩M_T与抵抗扭矩平衡，得$M_{T1}+M_{T2}=M_T$。M_{T2}计算如下：图4表示一端固定，另一端受扭矩M_T作用的薄壁闭合截面构件，从其中截取一微分体$dsdz$，由约束扭转引起的正应力σ及伴之而产生的剪应力τ_2作用于其上而平衡（图4），该微分体上还作用着有纯扭剪应力τ_1，因其自相平衡，故未标出。由$\Sigma F_z=0$，得

$$\delta\frac{\partial\sigma}{\partial z}dzds+\delta\frac{\partial\tau_2}{\partial s}dsdz=0$$

即 $$\frac{\partial(\delta\tau_2)}{\partial s}+\delta\frac{\partial\sigma}{\partial z}=0,$$

$$\therefore\ \frac{\partial(\delta\tau_2)}{\partial s}=-\delta\frac{\partial\sigma}{\partial z},$$

而 $\delta\tau_2=q_2$，$\sigma=E\frac{\partial w}{\partial z}$，

$$\therefore\ \frac{\partial\sigma}{\partial z}=E\frac{\partial^2 w}{\partial z^2},$$ 由(7)式，

$$w=\theta(\overline{\omega_s}-\omega_s)-\rho\theta(\overline{s'}-s'),$$

s'，ω_s 均与z无关

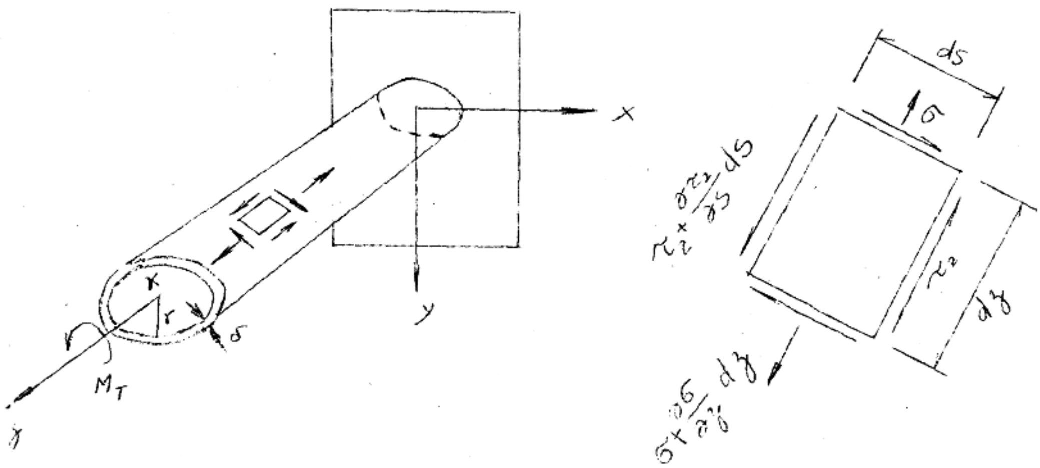


图 4

$$\therefore \frac{\partial\sigma}{\partial z}=E\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\left[(\bar{w}_s-w_s)-\rho(\bar{s}'-s')\right]$$

$$=E\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3}\left[(\bar{w}_s-w_s)-\rho(\bar{s}'-s')\right]$$

将 $\frac{\partial(\delta\tau_z)}{\partial s}=-\delta\frac{\partial\sigma}{\partial z}$ 两边积分，得

$$q_z=-\int_0^s\delta\frac{\partial\sigma}{\partial z}ds+q_0$$

$$=-E\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3}\int_0^s\left[(\bar{w}_s-w_s)-\rho(\bar{s}'-s')\right]\delta ds+q_0$$

（因扭转角φ与s无关，故 $E\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3}$ 提在积分号前面）

这里q_0为积分起点的构件横截面单位周长上的剪力。现将资料[2]关于q_0的计算摘录如下：

沿图4 z轴截取一单位长度构件为隔离体示于图5a，在其上作用着剪流$q_z(s)$及正应力σ（还作用有纯扭剪流，此处考虑约束剪流，故未标出），将隔离体在周界任意位置沿z向切开，在切口两边沿z方向作用着剪力q_0，按剪力成对定理，在构件

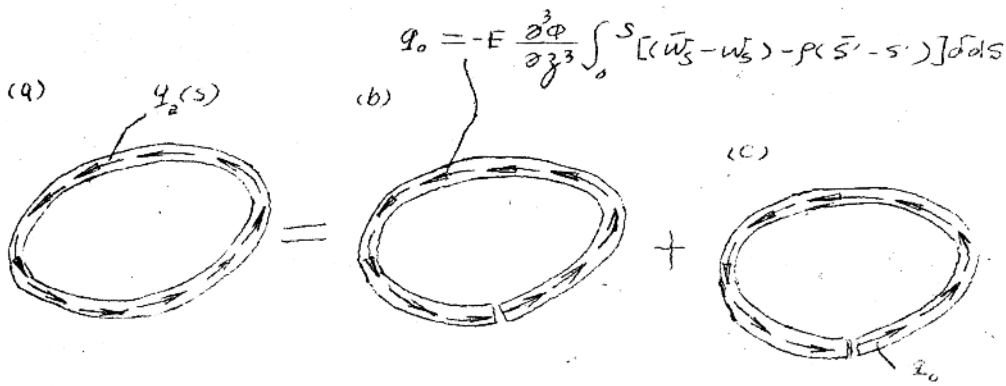


图 5

横截面上就有同一指向的剪流 q_0（图5C）。这样，闭口截面剪流 $q_2(s)$ 等于（图5b）开口截面剪流

$-E\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3}\int_0^s[(\bar{w}_s-w_s)-\rho(\bar{s}'-s')]ds\cdot\delta$ 与图5C）剪流 q_0 的叠加，剪力 q_0 的作用是消除切口处的相对位移，以保持为闭合截面。q_0 可用力法按闭合方程式

$q_0\delta_{11}+\Delta_{10}=0$ 求出，式中 $\delta_{11}=\oint\frac{ds}{G\delta}$ 是由力 $q_0=1$ 所产生的切口两边的相对位移，$\Delta_{10}=\oint\frac{q^0 ds}{G\delta}$ 表示图5b）开口截面剪流 $q^0=-E\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3}\int_0^s[(\bar{w}_s-w_s)-\rho(\bar{s}'-s')]\times\delta ds$ 所产生的切口两边的相对位移。

故图5C）闭合剪流 $q_0=-\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}=\frac{-\oint\frac{q^0 ds}{G\delta}}{\oint\frac{ds}{G\delta}}=$

$$=\frac{\oint\left\{E\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3}\int_0^s[(\bar{w}_s-w_s)-\rho(\bar{s}'-s')]\delta ds\right\}\frac{ds}{\delta}}{\oint\frac{ds}{\delta}}$$

$$= \frac{\oint\left\{E\Phi'''\int_0^{S}[(\bar{w}_s - \bar{w}_s) - \rho(\bar{s}' - s')\delta ds\right\}ds'}{S_K'}$$

此地 $ds' = \dfrac{ds}{\delta}$，

q_2 对扭心K（图4）的扭矩 $M_{T2} = \oint q_2 \gamma ds$，

前已令 $\int_0^S \gamma ds = w_s$，$\therefore \gamma ds = d w_s$，

$$\therefore M_{T2} = \oint q_2 dw_s = \oint\left\{-E\frac{\partial^3\Phi}{\partial z^3}\int_0^S(\bar{w}_s - w_s) - \rho(\bar{s}' - s')\right] \times$$

$$\times \delta ds + q_0\Big\} dw_s = \oint\left\{-E\Phi'''\int_0^S[(\bar{w}_s - w_s) - \rho(\bar{s}' - s')\right] \times$$

$$\times \delta ds\Big\} dw_s + \frac{\oint\left\{E\Phi'''\int_0^S[(\bar{w}_s - w_s) - \rho(\bar{s}' - s')]\delta ds\right\}ds'}{S_K'}$$

$$\times \oint d w_s \qquad (8)$$

（因为 q_0 沿横切面均为常数，故提在 $\oint d w_s$ 之前）。

由(7)式，$w = \theta[(\bar{w}_s - w_s) - \rho(\bar{s}' - s')]$，

$\therefore \dfrac{dw}{ds} = \theta\left[-\dfrac{dw_s}{ds} + \rho\dfrac{ds'}{ds}\right]$　（因为 θ 与 s 无关）

$\therefore dw = \theta(-dw_s + \rho ds')$；

$\therefore dw_s = -\dfrac{dw}{\theta} + \rho ds'$

将 dw_s 代入(8)式，得

$$M_{T2} = \oint\left\{-E\Phi'''\int_0^S[(\bar{w}_s - w_s) - \rho(\bar{s}' - s')\delta ds\right\}\left(-\frac{dw}{\theta} + \right.$$

$$\left. + \rho ds'\right) + \frac{1}{S_K'}\oint\left\{E\Phi'''\int_0^S[(\bar{w}_s - w_s) - \rho(\bar{s}' - s')]\delta ds\right\} \times$$

$$\times \oint \left(-\frac{d\bar{w}}{\theta}+\rho ds'\right)=\oint\left\{E\Phi'''\int_0^S\left[(\bar{w}_s-w_s)-\rho(s'-s')\right]\delta ds\right\}\times$$

$$\times\frac{d\bar{w}}{\theta}-\oint E\Phi'''\times\int_0^S\left[(\bar{w}_s-w_s)-\rho(\bar{s}'-s')\right]\delta ds\Big\}\rho ds'-$$

$$-\frac{1}{S_K'}\oint\left\{E\varphi'''\int_0^S\left[(\bar{w}_s-w_s)-\rho(\bar{s}'-s')\right]\delta ds\right\}ds'\times$$

$$\times\frac{1}{\theta}\oint d\bar{w}+\frac{1}{S_K'}\oint\left\{E\Phi'''\int_0^S\left[(\bar{w}_s-w_s)-\rho(\bar{s}'-s')\right]\delta ds\right\}ds'\cdot$$

$$\rho\oint ds'$$

因为 $\oint ds'=S_K'$ 故上式中第二项与第四项相消，又因为

$d\bar{w}_s=-\frac{d\bar{w}}{\theta}+\rho ds'$， $\therefore \frac{d\bar{w}}{\theta}=-d\bar{w}_s+\rho\frac{\bar{w}_K}{S_K'}S_K'=0$，

$\therefore \frac{1}{\theta}\oint d\bar{w}=-\oint d\bar{w}_s+\rho\oint ds'=-\bar{w}_K+\frac{\bar{w}_K}{S_K'}S_K'=0$,

故上式中第三项为零，这样，

$$M_{T2}=\oint\left\{E\Phi'''\int_0^S\left[(\bar{w}_s-w_s)-\rho(\bar{s}'-s')\right]\delta ds\right\}\frac{d\bar{w}}{\theta},$$

又由(7)式，$\frac{d\bar{w}}{\theta}=d\left[(\bar{w}_s-w_s)-\rho(\bar{s}'-s')\right]$，代入上

式，并用部分积分法展开，得

$$M_{T2}=\oint\left\{E\Phi'''\int_0^S\left[(\bar{w}_s-w_s)-\rho(\bar{s}'-s')\right]\delta ds\right\}d\left[(\bar{w}_s-w_s)-\right.$$

$$\left.-\rho(\bar{s}'-s')\right]=E\Phi'''\left[(\bar{w}_s-w_s)-\rho(s'-s')\right]\int_0^S\left[(\bar{w}_s-w_s)-\right.$$

$$\left.-\rho(\bar{s}'-s')\right]\delta ds-E\Phi'''\oint\left[(\bar{w}_s-w_s)-\rho(\bar{s}'-s')\right]^2\times$$

$$\times\delta ds,$$

为了证明上式中 $\int_0^S[(\bar{w}_s-w_s)-\rho(\bar{s}'-s')\delta ds=0$，

我们假定图4所示构件的端部断面上有沿着子向均匀分布的

荷载 p 作用，p 并不使构件转动，利用马氏虚位互等定理，

得 $\oint \omega p \delta ds = \oint \frac{d\varphi}{dz}[(\bar{\omega}_s - \omega_s) - \rho(\bar{s}' - s')] p \delta ds =$

$= p \frac{d\varphi}{dz} \oint [(\bar{\omega}_s - \bar{\omega}_s) - \rho(\bar{s}' - s')] \delta ds = M_T \cdot 0 = 0$，而

$p \frac{d\varphi}{dz} \neq 0$，故 $\oint [(\bar{\omega}_s - \omega_s) - \rho(\bar{s}' - s')] \delta ds = 0$，

或 $\int_0^{s=m} [(\bar{\omega}_s - \omega_s) - \rho(\bar{s}' - s') \delta ds = \oint [(\bar{\omega}_s - \omega_s) - \rho(\bar{s}' - s')] \times$

$\times \delta ds = 0$，

最后得

$$M_{T2} = -E\varphi''' \oint [(\bar{\omega}_s - \omega_s) - \rho(\bar{s}' - s')]^2 \delta ds$$

$$= -EJ_\omega \frac{d^3\varphi}{dz^3} \qquad (9)$$

(9)式中 $J_\omega = \oint [(\bar{\omega}_s - \omega_s) - \rho(\bar{s}' - s')]^2 \delta ds$，

EJ_ω 为构件横截面的约束扭转刚度，

则构件的约束扭转的微分方程式为

$$M_T = M_{T1} + M_{T2} = GJ_d \frac{d\varphi}{dz} - EJ_\omega \frac{d^3\varphi}{dz^3} \qquad (10)$$

二、全跨均布偏载下的计算

(一) 荷载静力变换

箱梁受载如图6(a)，p 为单位长度上的偏载。

自图6(a)沿梁纵向截取单位长度的梁单元体示于图6(b)，作用于其上的外荷载为 p。假定梁横截面上下左右对称，故扭心K在中心点。p 对单元体的作用可变换为图6(c)、(d)、(e)受