21世纪高职高专规划教材

高等应用数学基础

主 编 尹江艳 任路平

原子能出版社

21 世纪高职高专规划教材

高等应用数学基础

主　编：尹江艳　任路平
副主编：刘　颖　徐　莹
　　　　蓝宗强　谭孝松

原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学基础/尹江艳,任路平主编. —北京:原子能出版社,2007.9

ISBN 978-7-5022-3985-5

Ⅰ.高… Ⅱ.①尹…②任… Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 144128 号

内容简介

本书是根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》,结合编者多年的教学经验和数学课程教学改革的实际情况编写的。

全书共十章。内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、无穷级数、常微分方程、拉普拉斯变换、矩阵及其应用等。

本书按照"以应用为目的,以必须够用为度"的原则,以"理解基本概念,掌握运算方法及其应用"为依据,力求在内容编排上做到深入浅出。本书每节后配有习题,每章后配有复习题,其范围和深度有一定的弹性,语言叙述简练、通俗,教师可根据本校的特点及实际情况进行选择。

高等应用数学基础

出版发行	原子能出版社(北京市海淀区阜成路43号 100037)
责任编辑	谭 俊
特约编辑	杨晓敏 李 欣
印 刷	北京市彩虹印刷有限责任公司
经 销	全国新华书店
开 本	787 mm×1 092 mm 1/16
印 张	12.75
字 数	337 千字
版 次	2007 年 9 月第 1 版 2007 年 9 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5022-3985-5
定 价	28.00 元

 网址:http://www.aep.com.cn

前　言

近几年来，随着我国社会发展的需要，高等职业教育正在全国蓬勃发展起来。高等职业教育作为高等教育发展中的一个类型，肩负着培养面向生产、服务和管理第一线需要的高技能人才的使命，在加快推进社会主义现代化进程中具有不可替代的作用。而高等数学作为高职高专院校学生的一门必修的基础课，在其他各个领域及学科中发挥着越来越大的作用。因此为了适应这种新形势的需要，力求学生在有限的时间里掌握必备的基础理论知识、具体运算方法及实际应用能力，本着公共基础课为专业课服务的原则，通过深入细致的调查研究，对高等数学教学内容作了相应地调整和改进，组织多年具有丰富授课经验的教师编写了这本书。

本教材是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》及《高职高专教育专业人才培养目标及规格》编写而成。“以应用为目的，以必须够用为度”为原则，力图做到“降低理论、重视技能、加强能力、突出应用”。在编写过程中，结合高职高专教学特点，淡化数学理论，对一些繁琐的定理、公式的推导证明尽可能只给出结果或简单直观地给出几何说明，例题、习题的选择做到由浅入深，要具有一定的启发性和应用性，力求内容通俗易懂，既便于教师教 ，又便于学生学。

全书共十章。内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、无穷级数、常微分方程、拉普拉斯变换、矩阵及其应用等。每节后配有习题，每章后配有复习题，书后附有习题参考答案。全书建议讲授 120 ~ 140 学时。

本书由尹江艳、任路平两位老师担任主编，刘颖、徐莹、蓝宗强、谭孝松四位老师担任副主编。本书在编写过程中得到了全国各地各大高职院校专家、教授的大力支持和协助，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，编写时间仓促，书中难免存在错误或不当之处，敬请广大读者与同行批评指正。

编　者

目　　录

第一章 函数、极限与连续

极限是高等数学中的一个重要的基本概念，它是学习微积分学的理论基础. 本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，着重讨论函数的极限，并介绍函数的连续性.

1－1 函数

一、函数概念

定义1 设x、y是两个变量，D是给定的一个数集，若对于D中的每一个x值，根据某一对应关系f，变量y都有唯一确定的数值与它相对应，那么，我们就称变量y是变量x在数集D上的函数. 记作

$$y=f(x),x\in D.$$

式中x称为自变量，y称为因变量. 自变量x的变化范围D称为函数$y=f(x)$的定义域，当自变量x取遍D中的一切数值时，与它相对应的所有y值的集合M称为函数$y=f(x)$的值域.

函数的定义域和对应关系称为**函数的两个要素**.

关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定. 如果讨论的是纯数学问题，则往往取使函数表达式有意义的所有实数的集合作为该函数的定义域.

例1 求$f(x)=\frac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$的定义域.

解 要使函数有意义，应满足$\begin{cases}4-x^2\neq 0\\x+2\geqslant 0\end{cases}$，

所以函数的定义域为$(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

例2 求$f(x)=\lg\frac{x}{x-1}$的定义域.

解 要使函数有意义，应满足$\frac{x}{x-1}>0$，

所以函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

二、函数的表示法

表示函数的方法，常用的有公式法、表格法和图像法三种.

1. 公式法 将自变量和因变量之间的关系用数学式子来表示的方法，称为公式法. 这些数学式子也叫做解析表达式.

根据解析表达式表示方法的不同，相应的函数可分为显函数、隐函数和分段函数.

(1) 显函数：直接由自变量x的解析式表示出来的函数. 例如$y=x^2+1$.

（2）隐函数：自变量 x 和因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定的函数. 例如：

$$x\cos y-\sin(x+y)=0.$$

（3）分段函数：在其定义域不同的取值范围内，用不同的解析式来表示的函数. 例如：

$$y=\begin{cases}\sqrt{x}, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}.$$

注意：分段函数在其整个定义域上是一个函数，而不是几个函数.

2. **表格法**　将自变量的值与对应的函数值列成表格的形式表示出来的方法. 例如平方关系表、三角函数表、积分表等等.

3. **图像法**　在坐标系中用图像来表示函数关系的方法.

三、反函数

定义2　给定函数 $y=f(x)$，$x\in D$，$y\in M$. 如果对于 M 中的每一个 y 值，都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 x 值与之相对应，那么所确定的以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 就叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数.

习惯上总是用 x 来表示自变量，用 y 来表示函数，因此 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 通常记作 $y=f^{-1}(x)$. 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称（图1－1）.

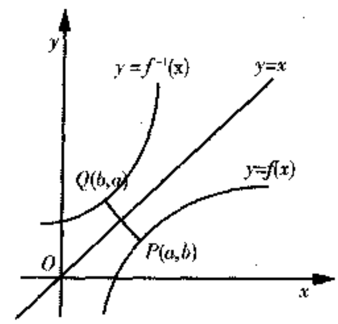

图　1－1

例3　求函数 $y=x^3+1$ 的反函数.

解　由 $y=x^3+1$ 得 $x=\sqrt[3]{y-1}$，所以函数的反函数为 $y=\sqrt[3]{x-1}$.

四、函数的几种特性

1. **函数的奇偶性**　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为偶函数；若对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为奇函数；若函数既不是偶函数，也不是奇函数，则称函数为非奇非偶函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称（图1－2）.

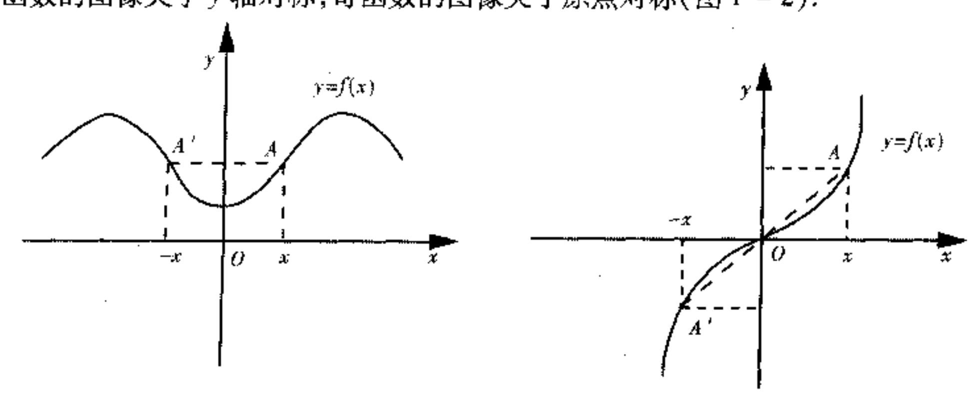

图　1－2

2. 函数的单调性 若函数 $y=f(x)$ 对于区间 (a,b) 内的任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，若有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数在区间 (a,b) 内是单调增加的，区间 (a,b) 相应地叫做函数 $f(x)$ 单调增加区间；若有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数在区间 (a,b) 内是单调减少的，区间 (a,b) 相应地叫做函数 $f(x)$ 单调减少区间. 无论单调增加函数还是单调减少函数统称为单调函数.

单调增加函数的图像沿 x 轴正向而上升，单调减少函数的图像沿 x 轴正向而下降(图 1－3).

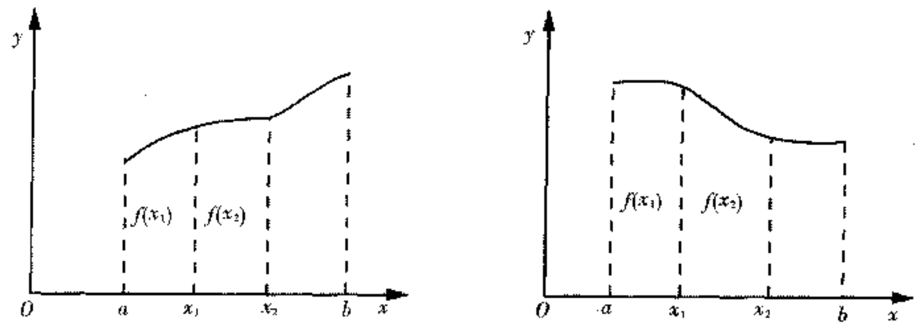

图 1－3

3. 函数的有界性 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若存在一个正数 M，使得对于区间 (a,b) 内的一切 x 值，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是有界函数，否则称函数 $f(x)$ 为无界函数.

4. 函数的周期性 对于函数 $f(x)$，如果存在一个正数 l，使得对于定义域内的一切 x，都有 $f(x+l)=f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数. 我们熟悉的三角函数就是周期函数. 另外在实际应用中会遇到许多周期函数，如电学中的矩形波、锯齿波等(图 1－4).

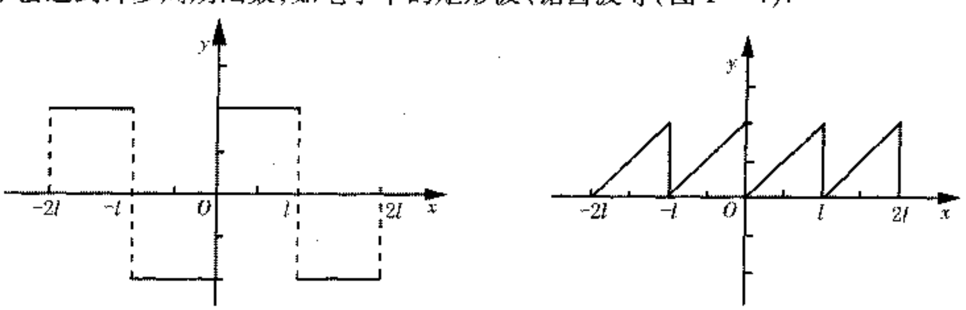

图 1－4

例 4 判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，定义域关于原点对称.

又因为
$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln[(-x)+\sqrt{(-x)^2+1}]\\&=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\\&=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)\end{aligned}$$

所以函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

例5　判断函数$f(x)=\frac{x\sin x}{1+x^2}$的有界性.

解　因为$|f(x)|=\left|\frac{x\sin x}{1+x^2}\right|\leqslant\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\left|\frac{x}{2x}\right|=\frac{1}{2}$

所以函数$f(x)$是有界函数.

五、基本初等函数

常数函数$y=C$(C是任意实数);

幂函数$y=x^\alpha$(α是任意实数);

指数函数$y=a^x$($a>0,a\neq1,a$为常数);

对数函数$y=\log_a x$($a>0,a\neq1,a$为常数);

当$a=10$时,记为$y=\lg x$,称为常用对数;

当$a=e$时,记为$y=\ln x$,称为自然对数;

三角函数$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$;

反三角函数$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\text{arccot}\, x$.

以上六种函数统称为基本初等函数.

六、复合函数、初等函数

定义3　设y是u的函数$y=f(u),u\in A$(定义域),u又是x的函数$u=\varphi(x),x\in C$(定义域),$u\in B$(值域),其中$B\subsetneq A$. 当x在某一区间(即$x\in C$)上取值时,相应的u值都能使函数y有定义,则称y是由函数$y=f(u)$和函数$u=\varphi(x)$构成的复合函数,记作$y=f[\varphi(x)]$,其中x是自变量,u是中间变量.

注意:(1)复合函数可以由两个或两个以上的函数复合而成.

(2)不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如,$y=\arcsin u$,又$u=x^2+2,x\in(-\infty,+\infty)$,则$u$的值域为$[2,+\infty)$. 由复合函数的定义可知,在$x$的定义域内,相应的$u$值($u\geqslant2$)不能使函数$y$有定义,所以这两个函数就不能构成一个复合函数.

例6　设$y=f(u)=\sqrt{u},u=\varphi(x)=x^2+1$,求$f[\varphi(x)]$.

解　$f[\varphi(x)]=\sqrt{u}=\sqrt{x^2+1}$

例7　指出函数$y=\arcsin(\ln x)$的复合过程.

解　函数$y=\arcsin(\ln x)$是由$y=\arcsin u,u=\ln x$复合而成的.

例8　指出函数$y=\sqrt[3]{\arctan\cos2^{2x}}$的复合过程.

解　函数$y=\sqrt[3]{\arctan\cos2^{2x}}$是由$y=\sqrt[3]{u},u=\arctan v,,v=\cos w,w=2^m,m=2x$复合而成的.

例9　指出函数$y=\sin^2 3x$的复合过程.

解　函数$y=\sin^2 3x$是由$y=u^2,u=\sin v,v=3x$复合而成的.

定义4　由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤所构成,并能用一个数学式表示的函数称为初等函数.

例如,函数$y=1+\sqrt{x},y=x\ln x,y=e^{\sin 3x}$等等都是初等函数.

习题 1－1

1. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{3x+4}$;　(2)$y=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$;　(3)$y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$;

(4)$y=\dfrac{1}{\ln\ln x}$;　(5)$y=\arccos\dfrac{2x+1}{5}+\sqrt{x+1}$;

(6)$y=\sqrt{\ln(x-1)}$;　(7)$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

2. 设函数$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}, x\geqslant 1\\ x^2, x<1\end{cases}$,作出函数$f(x)$的图像,并求$f(5)$、$f(-2)$的值.

3. 设$f(x+\dfrac{1}{x})=\dfrac{1}{x^2}+x^2$,求$f(x)$.

4. 求下列函数的反函数.

(1)$y=\dfrac{1-x}{1+x}$;　(2)$y=10^{x+1}$;　(3)$y=\sqrt[3]{x^2+1}$.

5. 判断下列函数的奇偶性.

(1)$y=x^2\cos x$;　(2)$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;　(3)$y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

6. 证明函数$y=\lg x$在区间$(0,+\infty)$内单调增加.

7. 求下列函数的周期.

(1)$y=\sin^2 x$;　(2)$y=2+\cos 3x$;　(3)$y=\sin x\cos x$.

8. 指出下列函数的复合过程.

(1)$y=(1-x)^3$;　(2)$y=e^{x+1}$;　(3)$y=\cos^2(3x+1)$;

(4)$y=\ln\sqrt{x+1}$;　(5)$y=\arcsin\sqrt{\cos x}$;　(6)$y=\tan^3(e^{3x})$;

(7)$y=\sqrt{1+\tan\dfrac{x}{3}}$.

1－2　极限

一、数列的极限

我们已经学过数列的概念，现在我们将进一步考察当自变量 n 无限增大时，数列 $\{y_n\}$ 的变化趋势．先看下面几个数列（图 1－5）：

(1) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$；

(2) $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$；

(3) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$；

(4) $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$.

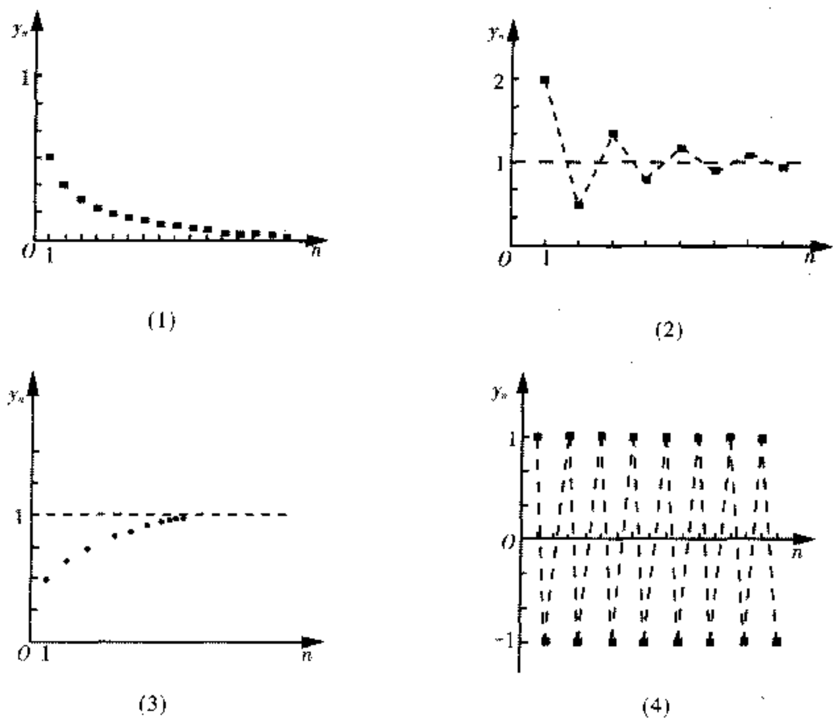

图　1－5

从图可以看出，当 n 无限增大时，数列(1)无限趋近于 0，数列(2)、(3)无限趋近于 1，而数列(4)则在 1 和 －1 之间来回摆动．

定义 1　对于数列 $\{y_n\}$，如果当 n 无限增大时，y_n 无限地接近于一个确定的常数 A，那么常数 A 就叫做数列 $\{y_n\}$ 当 n 趋近于 ∞ 时的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \quad \text{或} \quad \text{当 } n\to\infty \text{ 时},y_n\to A$$

若数列 $\{y_n\}$ 的极限是 A，我们也称数列 $\{y_n\}$ 收敛于 A，并称此数列为收敛数列，否则为发散

数列,例如数列(4).

注　有极限的数列都是有界的,反之不一定成立.例如数列(4).

有了数列极限的定义,数列(1)、(2)、(3)的极限可表示为:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

二、函数的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

先看下面的例子.

观察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,当 x 的绝对值无限增大时,函数值的变化趋势(图1-6),从图中可以看出,当 $|x|$ 无限增大时,函数值 $\dfrac{1}{x}$ 无限接近于0.

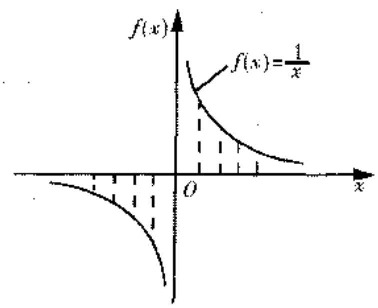

图　1-6

下面给出这种函数极限的定义.

定义2　对于函数 $f(x)$,如果当自变量的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定常数 A,那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 ∞ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\quad 或\quad 当\ x\to\infty\ 时,f(x)\to A$$

在以上的函数极限定义中,当自变量只沿 x 轴正向无限增大时(记为 $x\to+\infty$),函数 $f(x)$ 的极限为 A,记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$;当自变量只沿 x 轴负向无限增大时(记为 $x\to-\infty$),函数 $f(x)$ 的极限为 A,记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

注　对同一个函数 $f(x)$ 来说,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 成立的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

例1　求当 $x\to\infty$ 时,函数 $y=\arctan x$ 的极限(图1-7).

解　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$,

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

虽然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$ 都存在,但不相等,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

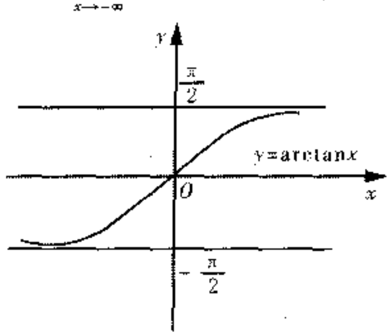

图　1-7

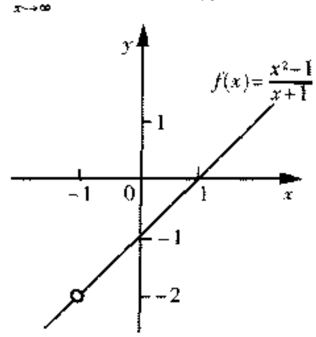

图　1-8

2. 当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

先观察当 $x \to -1$ 时，函数 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ 的变化趋势.

从图 1 - 8 中可以看出，当自变量 x 无限地接近于 -1 时，函数的函数值无限地接近于 -2. 从而给出下面函数极限的定义：

定义 3 对于函数 $f(x)$，如果当自变量 x 无限地接近于定值 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限地接近于一个确定的常数 A，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad \text{当 } x \to x_0 \text{ 时}, f(x) \to A.$$

需要说明的是：

(1) 定义中 $x \to x_0$ 的方式可以是任意的，既可以从 x_0 的左侧趋近于 x_0，也可以从 x_0 的右侧趋近于 x_0，还可以从两边同时趋近于 x_0.

(2) 当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是否存在与其在点 x_0 有无定义无关.

定义 4 如果自变量 x 仅从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0（记为 $x \to x_0^-$）时，函数 $f(x)$ 无限地接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的**左极限**. 记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad \text{当 } x \to x_0^- \text{ 时}, f(x) \to A.$$

定义 5 如果自变量 x 仅从 x_0 的右侧无限趋近于 x_0（记为 $x \to x_0^+$）时，函数 $f(x)$ 无限地接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的**右极限**. 记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad \text{当 } x \to x_0^+ \text{ 时}, f(x) \to A.$$

定理 1 函数 $f(x)$ 在点 x_0 极限存在的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限都存在且相等.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

例 2 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, x<0 \\ 0, x=0 \\ x+1, x>0 \end{cases}$，当 $x \to 0$ 时的极限.

解 做出函数 $f(x)$ 的图像（图 1 - 9），从图中可以看出，

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x-1) = -1,$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1$$

因为 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$，所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在.

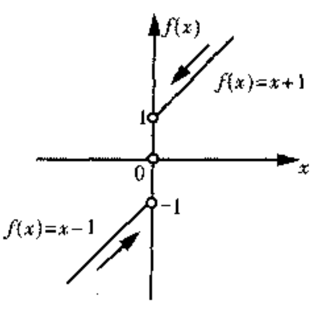

图 1 - 9

例 3 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ x+1, x<0 \end{cases}$，当 $x \to 0$ 时的极限是否存在？

解 由于 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x+1) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$

但 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$，所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在.

习题 1 - 2

1. 观察下列数列当 $n \to \infty$ 时的变化趋势,并写出它们的极限.

(1)$x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$; (2)$x_n = \frac{n-1}{n+1}$; (3)$x_n = 1 - \frac{1}{10^n}$;

(4)$x_n = n(-1)^n$; (5)$x_n = \sin \frac{n\pi}{2}$.

2. 观察下列函数并写出极限值.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}$; (2) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x$; (3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{10})^x$;

(4) $\lim\limits_{x \to \infty}(2 + \frac{1}{x})$; (5) $\lim\limits_{x \to 1} \ln x$; (6) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan x$.

3. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, x < 1 \\ 1 - x^2, x \geqslant 1 \end{cases}$,当 $x \to 1$ 时的极限.

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3 - x, 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$,画出它的图像,并说明当 $x \to 1$ 时的极限是否存在.

5. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x < 1 \\ 1, x = 1 \\ -1, x > 1 \end{cases}$,在 $x \to 1$ 时的极限是否存在.

1－3　极限的运算

一、极限的四则运算法则

前面我们利用极限的定义可以观察出比较简单函数的极限，但是对于大多数函数利用极限的定义很难求出它们的极限，为了比较方便的求出它们的极限，下面介绍极限的四则运算法则.

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

法则 1　$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$；

法则 2　$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$；

推论 1　$\lim\limits_{x\to x_0}[Cf(x)]=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=C\cdot A$（$C$为常数）；

推论 2　$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n=A^n$；

法则 3　$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

上述定理对于$x\to\infty$的情形也成立，而且法则(1)和(2)可以推广到有限个具有极限函数的情形.

例 1　求$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+4x-3)$.

解　由极限的四则运算法则得

$$\lim_{x\to 1}(x^2+4x-3)=\lim_{x\to 1}x^2+4\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}3=1+4-3=2.$$

例 2　求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-9}{2x+1}$.

解　当$x\to 2$时，由于分母的极限不为零，所以可直接运用商的极限运算法则.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-9}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-9)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}9}{2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1}=-1.$$

从例(1)、例(2)可以看出，当$x\to x_0$时，求有理多项式或有理分式（分母在$x\to x_0$时的极限不为零）的极限，只要把x_0直接代入极限表达式计算函数值即可.

例 3　求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

解　当$x\to 3$时，由于分子、分母的极限都为零，所以不能直接运用商的运算法则来求极限，但在$x\to 3$的过程中，$x-3\neq 0$，所以采用分解因式的方法，分子、分母同时消去非零公因子$x-3$，然后再求极限.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6.$$

例 4　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^3-x^2+x}$.

解　当$x\to 0$时，由于分子、分母的极限都为零，所以不能直接运用商的运算法则来求极

限,但在 $x\to 0$ 的过程中,$x\neq 0$,所以分子、分母可同时提取非零公因子 x 消去,然后再求极限.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^3-x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x(x^2-x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2-x+1}=1.$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$.

解 此题分析同上例,但不能运用分解因式和提取公因子的方法,而是要采用分子有理化的方法来消去非零公因子.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+9}-3)(\sqrt{x^2+9}+3)}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}\\&=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)$.

解 当 $x\to -1$ 时,由于两个分式均没有极限,所以不能直接应用差的极限运算法则,此时可采用通分化简的方法,然后再求极限.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)&=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}\\&=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-x+1}\\&=-1.\end{aligned}$$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-3}{x^2+1}$.

解 当 $x\to\infty$ 时,由于分子、分母的极限均为无穷大,所以不能直接应用商的极限运算法则,此时可采用分子、分母同除以分子、分母最高次幂项的方法.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-3}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=3.$$

例 8 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$.

解 分子、分母同除以 x^3,然后取极限,即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{0}{2}=0.$$

从以上例子可以看出,在计算函数极限时,首先应判断它的类型,对于满足极限四则运算法则条件的,可直接运用法则计算;对于不满足极限四则运算法则条件的,需对函数先进行适当的化简变形,然后再运用法则来进行运算.有时也可利用无穷小的性质、无穷小与无穷大的关系来计算极限.