赢在

·Y·I·N·G·Z·A·I·

YING ZAI BIAN HUA

网尽新考点　玩转填空题
攻克压轴题　决胜新高考

高考数学新考点及附加题专项突破

马传渔　张志朝　主编

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

变化

·B·I·A·N·H·U·A·

YING ZAI BIAN HUA

赢在变化

高考数学新考点及附加题专项突破

网尽新考点　玩转填空题

攻克压轴题　决胜新高考

YING ZAI BIAN HUA

主　编

马传渔　张志朝

副主编

陈荣华　郭兵利

编　委

徐胜林　钟　磊　曾宪安　吴新华

陆忠源　孙东升　龚才权　赵　伟

水小明　陈敬国　王利平　聂志明

南京师范大学出版社

NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

赢在变化——高考数学新考点及附加题专项突破/马传渔，张志朝主编．—南京：南京师范大学出版社，2008.1

ISBN 978-7-81101-727-4/G·1134

Ⅰ.赢… Ⅱ.①马…②张… Ⅲ.数学课—高中—习题—升学参考资料 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 003905 号

书　　名	赢在变化——高考数学新考点及附加题专项突破
主　　编	马传渔　张志朝
责任编辑	王书贞
出版发行	南京师范大学出版社
地　　址	江苏省南京市宁海路 122 号(邮编：210097)
电　　话	(025)83598077(传真)　83598412(营销部)　83598297(邮购部)
网　　址	http：//press.njnu.edu.cn
E－mail	nspzbb@njnu.edu.cn
照　　排	江苏兰斯印务发展有限公司
印　　刷	通州市印刷总厂有限公司
开　　本	787×1092　1/16
印　　张	11
字　　数	340 千
版　　次	2008 年 2 月第 1 版　2008 年 2 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-81101-727-4/G·1134
定　　价	16.00 元

前　言

2008 年是江苏实施新课改之后的第一届高考，高考数学试卷结构发生了很大的变革．变革之一：必做题部分的试卷由填空题和解答题两种题型组成，其中填空题 14 小题占 70 分，解答题 6 小题占 90 分，满分为 160 分；选修测试物理的学生，还需做 4 道附加题，满分为 40 分．变革之二，必做题部分增加了 4 个新考点．针对填空题份量的加重，新考点的增加，以及附加题的首次出现，《赢在变化》因变而生，旨在应变而赢——赢在新考点，赢在附加题，成功托举大批学子步入理想中的高等学府．

本书遵循《2008 年普通高校招生全国统一考试大纲》的精神，依据《2008 普通高校招生全国统一考试(江苏卷)说明》而编写的，充满了浓郁的时代气息．

本书共设三篇：第一篇“赢在新考点”，共 4 讲；第二篇“赢在附加题”，共 10 讲；第三篇“赢在压轴题”，共 5 讲．全书共 19 讲，每讲由【考点归纳】、【经典范例】和【考点验收】三个栏目组成．【经典范例】包含 6～10 题，每一范例内设两个小栏日，一是“命题意图”——说明考点和题目难度(大致分为容易题、中等或中档题、难题几种级类)；二是“特别提醒”——关联分析、易错分析、方法评述等，与《2008 年普通高校招生全国统一考试(江苏卷)说明》密切吻合．

第一篇“赢在新考点”，以解答填空题为鸿线，以 4 个新考点为主要内容，归纳总结直接法、特殊化法、数形结合法、等价转化法、构造法、分析法等各种解答填空题的方法，力求做到：细——审题细；稳——变形稳；快——速度快；活——方法活；全——答案全，以起到“得填空题者得高分”的效果．

第二篇“赢在附加题”，既注意覆盖考点的全面性，又深化《几何证明选讲》、《矩阵与变换》、《坐标系与参数方程》和《不等式选讲》4 个选做部分的内容，强调抽象概括、推理论证、运算求解、数据处理 4 种能力的提高，为赢在附加题作铺垫．

第三篇“赢在压轴题”，注意知识交汇点处的知识板块，注意解题技巧的总结，注意解题方法的探究，注意数学奥林匹克解题思路和方法的引用，能做到融会贯通，举一反三，激活灵感，提升能力，以达到“得压轴题者得高分”的目的．

本书每讲【考点验收】都可以裁下以供训练使用．经典题、原创题、联考题题题锁定高考目标，通过验收题的训练能感受到高考实战的氛围，积累大考的经验，激发临场智慧，为“双赢”拼搏、夺取高分．

在林林总总的高考参考书中，愿本书成为定位精准、功能显著的真正“高参”．

本书编写组

目 录

第一篇 赢在新考点

第二篇 赢在附加题

第三篇 赢在压轴题

第一篇　赢在新考点

在历年的高考数学试卷中，填空题的失分率一直比较高(常常要高于整卷的平均失分率).而2008年江苏高考数学试卷中，删除了选择题这一得分较高的题型，并将填空题的题量增加到14题，分值达到70分，占总分(160分)的44%.因此，探求填空题的解法、增加填空题的专项训练量、提升填空题解答的正确率就显得十分必要.

数学填空题通常是将一个数学真命题写成当中缺少一些词语的形式，要求考生将缺少的词语填写在指定的空位上，使之成为一个完整而正确的数学命题.

从填写的内容看，填空题的类型主要有以下两类：其一是定量型的，要求考生去填写数值或数量关系.如方程、不等式的解，函数的定义域、值域、周期，某参变量的值或变化范围等.其二是定性型的，要求填写具有某种性质的数学对象或数学对象的某种性质.实际情况表明，高考数学填空题中定量型的占大多数，而定性型的填空题往往是具有多重选择性质的填空题.

填空题不同于解答题，它属于小题.其解题的基本原则是："小题小做，不能小题大做".解题的基本策略是："争取巧做，但未必能巧做".解题的基本方法有：直接求解法、图象法和特殊化法等.

直接求解法——能直接从题设条件出发，利用定义、性质、定理、公式等，经过变形、推理、计算、判断得到结论的问题，通常用直接求解法.它是解填空题常用的基本方法，使用直接法解填空题，要善于透过现象抓本质，自觉地、有意识地采取灵活、简捷的解法.

图象法——能借助图形的直观性，通过数形结合的方法，能迅速作出判断的问题，通常用图象法.文氏图、三角函数线、函数的图象及方程的曲线等，都是常用的图形.

特殊化法——当填空题的结论唯一或其值为定值时，通常用特殊化法.我们只需把题中的参变量用特殊值(或特殊方程、特殊函数、特殊角、特殊数列、特殊点、特殊模型等)代替之，即可得到所求的结论.

除掌握上述基本方法外，还应熟练掌握推理分析、联想类比、探索构造、猜想论证等多种数学思维方法.

高考填空题涉及的内容丰富多变，极有可能在考生中造成巨大的得分差.因此，一定要引起广大考生的重视.

第1讲 必修部分

幂函数、函数与方程、函数模型及其应用

考点归纳

高中新课标与以往的教材内容相比较，变化之处有：一是幂函数又重新进入了高中数学(在老教材中有，而在新课程教材中已经删除)；二是增加了"函数与方程"，即增加了利用图象研究函数与方程的关系，即函数的零点这一知识点，以及利用二分法求方程的近似解；三是加强了函数的应用，即注重从实际问题中提炼、归纳、总结函数的思想方法，加大了函数的应用力度，函数的应用题比重大大加强，特别是增加了利用数据拟合在实际问题中建立函数模型，也就是加大了建立函数模型的难度；四是淡化了反函数(仅在对数函数与指数函数的关系中提到)，降低了对数函数和指数函数的要求(特别是降低了逻辑推理的难度).

根据上述教材的变化，预测新课标考查的趋势是"保持稳定，凸显变化"，即：原来对函数重点考查的知识和方法仍将重点考查，同时仍然是把对函数知识的考查的重点放在与其他知识综合上. 另一方面，为了支持高中课程改革，加速高中课程改革的步伐，在新课标高考中，对于新增加的内容一定会有所涉及，但估计难度不会很大，因此，我们必须熟练地掌握这些新增加的知识点，要使它们成为高考的得分点.

经典范例

例1 已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象过点 $(3,27)$，则 $f(2)$ 的值为______.

【命题意图】 本题考查幂函数的定义和其解析式，难度较低.

【参考答案】 要求 $f(2)$ 的值，只需确定函数 $f(x)$ 的解析式即可. 设 $y=f(x)=x^n$，因为其图象过点 $(3,27)$，所以 $27=3^n$，解得 $n=3$，故 $f(x)=x^3$，$f(2)=8$.

【特别提醒】 解决求函数值问题的关键是确定函数的解析式，而待定系数法是求函数解析式的一种常用方法.

例2 当 $n\in\left\{1,2,-1,\frac{1}{2}\right\}$ 时，则幂函数 $y=x^n$ 的图象不可能经过的象限是第______象限.

【命题意图】 本题考查幂函数的图象性质，难度中等.

【参考答案】 经试验，知应填第四象限.

【特别提醒】 对于幂函数的图象，幂指数 n 无论取何值，其图象都不可能经过第四象限.

例3 已知幂函数 $y=x^{m^2-2m-3}$ $(m\in\mathbf{Z})$ 的图象与 x 轴、y 轴都无公共点，且关于 y 轴对称，则 m 的取值的集合是______.

【命题意图】 本题考查幂函数的图象和性质，难度中等.

【参考答案】 由于幂函数 $y=x^{m^2-2m-3}$ $(m\in\mathbf{Z})$ 的图象与 x 轴、y 轴都无公共点，所以 $m^2-2m-3\leqslant 0$，得 $-1\leqslant m\leqslant 3$. 考虑到 $m\in\mathbf{Z}$，所以 m 的取值可能为 $-1,0,1,2,3$. 而当 $m=-1$ 或 3 时，$y=x^0=1(x\neq 0)$；当 $m=0$ 时，$y=x^3$；当 $m=1$ 时，$y=x^{-4}$；当 $m=2$ 时，$y=x^{-3}$.

另外，由于幂函数的图象关于 y 轴对称，所以 m 的取值只可能为 $-1,1,3$，m 的取值的集合是 $\{-1,1,3\}$.

【特别提醒】 本题的解答中最容易疏忽掉 $m^2-2m-3=0$ 这种情况，而造成这种情况的根本原因在于忽略了 x^0 有意义时必须满足 $x\neq 0$.

例 4 用二分法求函数 $f(x)=3^x-x-4$ 的一个零点，其参考数据如下：

$f(1.6000)=0.200$	$f(1.5875)=0.133$	$f(1.5750)=0.067$
$f(1.5625)=0.003$	$f(1.5562)=-0.029$	$f(1.5500)=-0.060$

据此数据，可得方程 $3^x-x-4=0$ 的一个近似解(精确到 0.01)为____________.

【命题意图】 本题考查二分法的算法思想以及判断能力和操作能力，难度中等.

【参考答案】 根据二分法定义直接判断得 $f(1.5625)f(1.5562)<0$，所以方程 $3^x-x-4=0$ 的一个近似解为 1.56.

【特别提醒】 用二分法求方程的近似解的步骤：

第一步：确定一个区间 (a,b)，使得 $f(a)f(b)<0$，令 $a_0=a,b_0=b$.

第二步：取区间 (a_0,b_0) 的中点 $x_0=\frac{1}{2}(a_0+b_0)$.

第三步：计算 $f(x_0)$ 的值，得到下列相关结论：

①若 $f(x_0)=0$，则 x_0 就是方程 $f(x)=0$ 的一个根，计算停止；

②若 $f(a_0)f(x_0)<0$，则方程 $f(x)=0$ 的一个根位于区间 (a_0,x_0) 中，令 $a_1=a_0,b_1=x_0$；

③若 $f(x_0)f(b_0)<0$，则方程 $f(x)=0$ 的一个根位于区间 (x_0,b_0) 中，令 $a_1=x_0,b_1=b_0$.

第四步：取区间 (a_1,b_1) 的中点 $x_1=\frac{1}{2}(a_1+b_1)$，重复第二、第三步，直到第 n 次，方程 $f(x)=0$ 的一个根总在区间 (a_n,b_n) 内.

第五步：当 a_n,b_n 精确到与规定的精确度的近似值相等时，那么这个值就是方程 $f(x)=0$ 的一个近似解.

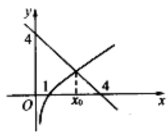
例 5 设 x_0 是方程 $\ln x+x=4$ 的解，则 x_0 在下列哪个区间内？______(直接填写答案的序号即可).

①$(3,4)$　　②$(2,3)$　　③$(1,2)$　　④$(0,1)$

【命题意图】 本题考查方程与函数图象之间的关系，以及估算、判断的能力. 本题难度中等.

【参考答案】 将方程变形为 $\ln x=4-x$，在平面直角坐标系中，分别作出函数 $y_1=\ln x$ 和 $y_2=4-x$ 的图象，如图，则 x_0 即为这两个函数图象的交点的横坐标.

从图象上可以看出④是错误的；当 $x\in(2,3)$ 时，$y_2=4-x>1,0<y_1=\ln x<1$，于是②是错误的；同理，当 $x\in(1,2)$ 时，③也是错误的. 因此本题应填写①.



(例 5)

【特别提醒】 由于该方程是一个超越方程，直接求解的路走不通，故应寻求其他的解法，如本题所采用的数形结合以及估算方法. 此外，函数与方程存在内在的联系，如函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴的交点的横坐标就是方程 $f(x)=0$ 的解；两个函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象交点的横坐标就是方程 $f(x)=g(x)$ 的解等. 根据这些联系，一方面，可通过构造函数来研究方程的解的情况；另一方面，也可通过构造方程来研究函数的相关问题. 利用函数与方程的相互转化去解决问题，这是一种重要的数学思想方法.

例 6 某公司招聘员工，经过笔试确定面试对象人数，面试对象人数按拟录用人数分段计算，计算公式为：$y=\begin{cases}4x,1\leqslant x\leqslant 10,\\2x+10,10<x\leqslant 100,\\1.5x,x>100,\end{cases}$ 其中，x 代表拟录用人数，y 代表面试对象人数. 若应聘的面试对象人数为 60 人，则该公司拟录用人数为______.

【命题意图】 本题考查函数知识的应用以及阅读理解能力，难度较低.

【参考答案】 由 $2x+10=60$，解得 $x=25$.

【特别提醒】 本题中的函数是一个分段函数，分段函数求值必须依赖相应的自变量的取值范围.

例 7 在测量某物理量的过程中，因仪器和观察的误差，使得几次测量分别得到 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，共 n 个数据，我们规定所测量物理量的"最佳近似值 a"这样一个量，与其他的近似值比较，a 与各数据的差的平方和最小，依此规定，从 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 推出 $a=$________.

【命题意图】 本题考查利用数据拟合在实际问题中建立函数模型的能力，难度中等.

【参考答案】 记 a 与各数据的差的平方和为 y，则 $y=(a-a_1)^2+(a-a_2)^2+\cdots+(a-a_n)^2$，即

$y=(a-a_1)^2+(a-a_2)^2+\cdots+(a-a_n)^2=na^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)a+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$，

所以当 $a=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 时，y 最小.

【特别提醒】 (1)首先应根据题设条件建立以 a 为自变量的目标函数，再求 a 为何值时，这个目标函数取最小值. 本例获解的关键是根据题设条件"a 与各数据差的平方和最小"建立了目标函数 y，不能顺利地突破这一点，也就无法找到使本例获解的切入口.

(2)本题是一道实际应用问题，对于实际应用问题，首先要理解题意，将普通语言翻译成数学语言，利用函数思想方法，建立数学模型，利用函数的有关性质予以解决.

(3)由于上述证明过程中的 $y=f(a)\geqslant 0(\forall a\in\mathbf{R})$，所以有：

$\Delta=4(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2-4n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\leqslant 0$，

进而可得不等式 $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$ 成立.

例 8 关于 x 的方程 $4x^2-4(m+1)x+m+2=0$ 的两个实根 α,β 满足 $0<\alpha<1<\beta<2$，则实数 m 的取值范围是____________.

【命题意图】 本题考查函数与方程之间的关系，以及数据处理能力. 本题难度中等.

【参考答案】 由抛物线 $f(x)=4x^2-4(m+1)x+m+2$ 与 x 轴的交点横坐标是方程 $4x^2-4(m+1)x+m+2=0$ 的根，知：当 $x=0$ 时，$y>0$；当 $x=1$ 时，$y<0$；当 $x=2$ 时，$y>0$，由此可列出不等式组

$$\begin{cases}f(0)=m+2>0,\\ f(1)=4\cdot 1^2-4(m+1)\cdot 1+m+2<0,\text{解得}\dfrac{2}{3}<m<\dfrac{10}{7}.\\ f(2)=4\cdot 2^2-4(m+1)\cdot 2+m+2>0,\end{cases}$$

【特别提醒】 (1)如果直接求解出方程 $4x^2-4(m+1)x+m+2=0$ 的两个根，再利用两根 α,β 满足 $0<\alpha<1<\beta<2$ 进行求解，一是计算比较麻烦，二是由于涉及无理不等式的求解，这样就超纲了.

(2)可能有的同学在列出上述不等式后，觉得还有点不放心，再添上 $\Delta=[4(m+1)]^2-4\times4\times(m+2)>0$，其实这是不必要的，因为当 $f(1)<0$ 时，必有 $\Delta>0$ 成立. 读者有兴趣的话，可以证明下面一个命题.

对于给定的一个二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq0)$，存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $af(x_0)<0$，则方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数解；反之也成立.

证明如下：充分性：若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $af(x_0)<0$，则

$b^2-4ac=b^2+4abx_0+4a^2x_0^2-4af(x_0)=(b+2ax_0)^2-4af(x_0)>0$，所以方程 $f(x)=0$ 有两个不等实根.

必要性：若方程 $f(x)=0$ 有两个不等实根，则 $b^2-4ac>0$，$x_0=-\dfrac{b}{2a}$，则

$af(x_0)=a[a(-\dfrac{b}{2a})^2+b(-\dfrac{b}{2a})+c]=\dfrac{b^2}{4}-\dfrac{b^2}{2}+ac=\dfrac{4ac-b^2}{4}<0$.

第2讲 必修部分

三视图与直观图、圆与圆的位置关系、空间直角坐标系

考点归纳

作三视图的依据便是平行投影(即用平行光线照射物体)的有关理论与知识.因此,要掌握平行投影的性质,进而掌握三视图的作图规则,即"长对正、高平齐、宽相等",并能根据物体的三视图还原成实际图形.在学习中要注意它们之间的区别,同时也要关注它们之间的联系,并形成"实物图⟷三视图⟷直观图"的知识链.

对于圆与圆的位置关系的考查,一种可能是直接考查圆与圆的位置关系.另一种可能是与直线知识结合起来,考查:(1)根据条件判定直线与圆、圆与圆的位置关系;(2)运用数形结合解答直线与圆三种位置关系中相关元素的求值或取值范围问题;(3)有关动点所在曲线方程的问题.

空间直角坐标系和空间两点间的距离公式目前只是学习的初步知识,它的应用也仅仅是限于会建立空间直角坐标系,会确定相关点的坐标,会求空间两点间距离以及一些最基本的应用上.

经典范例

例1 (由2004年全国高考数学试题改编)已知圆 C 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 关于直线 $y=-x$ 对称,则圆 C 的方程为________.

【命题意图】 本题考查圆的方程的确定和点关于直线对称的有关知识.两圆关于某直线对称,则这两圆的圆心关于直线对称,且半径大小相等.本题为容易题.

【参考答案】 已知圆的圆心 $(1,0)$ 关于直线 $y=-x$ 的对称点为 $(0,-1)$,所以圆 C 的方程为:$x^2+(y+1)^2=1$.

【特别提醒】 如果审题不清楚,极易可能将已知圆的圆心 $(1,0)$ 关于直线 $y=-x$ 的对称点写为 $(0,1)$.此外在解本题时,不妨先画个草图示意一下.

例2 已知两个圆:$x^2+y^2=1$ ①与 $x^2+(y-3)^2=1$ ②,则由①式减去②式可得上述两圆的对称轴方程.将上述命题在曲线仍为圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 和 $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$ 的情况下加以推广,即要求得到一个更一般的命题,而已知命题应成为所推广命题的一个特例,推广的命题为________________.

【命题意图】 本小题主要考查圆的方程、圆与圆的位置关系、圆的公共弦方程的概念,考查抽象思维能力和归纳推广数学命题的能力.本题难度中等.

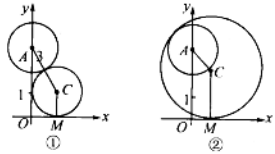
【参考答案】 $2(c-a)x+2(d-b)y+a^2+b^2-c^2-d^2=0$.

【特别提醒】 本题能通过两个具体的圆的方程得出两圆的对称轴方程,因此要加强对题目的阅读理解能力,这也是新课程标准中所强调的.

例3 与圆 $x^2+y^2-6y+8=0$ 及 x 轴相切的动圆圆心 C 的坐标所满足的方程是________.

【命题意图】 本题考查圆与圆的位置关系、形状以及曲线的方程的建立等知识.本题难度中等.

【参考答案】 (1)当动圆与圆 $x^2+y^2-6y+8=0$ 相外切时,由题设,得已知的圆的圆心为 $A(0,3)$,半径为1.设动圆圆心为 $C(x,y)$,圆 C 与 x 轴相切于点 M,则 $AC=\sqrt{x^2+(y-3)^2}$,如图①,由图可知 $AC-1=CM$,所以 $x^2+(y-3)^2=(y+1)^2$,整理得 $x^2=8(y-1)(y\geqslant1)$;(2)当动圆与圆 $x^2+y^2-6y+8=0$ 相内切时,如图②,$AC+1=CM$,所以 $\sqrt{x^2+(y-3)^2}+1=y$,化简得:$x^2=4(y-2)(y\geqslant2)$.



(例 3)

【特别提醒】 本题的解法中,极易误认为两圆相切就是外切,而没有考虑到内切的情况,所以应予补上.

例 4 经过两圆 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2-6y+5=0$ 的交点和点 $P(2,1)$ 的圆的方程是____________.

【命题意图】 本题考查曲线的方程、曲线的交点以及圆的方程选择和求取.本题难度中等.

【参考答案】 由 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^2+y^2-6y+5=0 \end{cases}$ 得两圆的交点为(0,1),因此所求的圆即为过两点(1,0)和(2,1)的圆的方程,所以圆心在线段 AB 的垂直平分线 $y=-x+2$ 上.设圆心坐标为 $C(a,2-a)(a\in\mathbf{R})$,则半径为 $AC=\sqrt{(a-1)^2+(2-a)^2}=\sqrt{2a^2-6a+5}$,因此,所求圆的方程为:$(x-a)^2+(y-2+a)^2=2a^2-6a+5(a\in\mathbf{R})$.

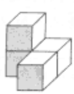
【特别提醒】 本题极易得到如下的错解,即:

设所求圆的方程为 $x^2+y^2-1+\lambda(x^2+y^2-6x+5)=0$,将 P 点的坐标代入方程,可解得 $\lambda=2$,所以所求的圆的方程为 $(x-2)^2+y^2=1$.

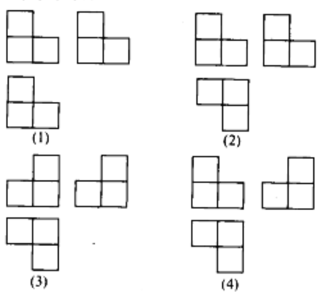
事实上,题设中的两圆显然是外切,切点为(1,0).可见,本题实质上是求过两点(1,0)和(2,1)的圆的方程,应有无穷多解,而 $(x-2)^2+y^2=1$ 仅是其中的一个.

数学中有些概念是分类定义后的统称(如外切和内切统称为相切),在使用这些概念解题时,如果忽视讨论,常会产生漏解.

例 5 四个正方体放置成如图所示的形状,其中涂色部分为我们观察的正面,则该物体的三视图正确的为______(直接填写正确答案的字母序号即可).



(例5)

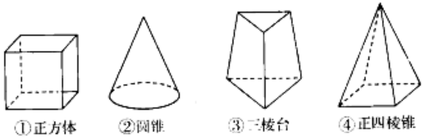


【命题意图】 本题考查三视图的作图规则.本题较容易.

【参考答案】 作三视图时,投影关系如下:①主视图,左视图:"高平齐";②主视图,俯视图:"长对正";③俯视图,左视图:"宽相等".以上关系也可以说成:"主左一样高、主俯一样长、俯左一样宽".由上分析可知本题应填序号(2).

【特别提醒】 画物体的三视图时,取决于观察的视角,不同的观察视角,将可能有不同的三视图.因此,画物体的三视图时,必须首先选准观察的视角.对本题而言,一定要看清楚题中所标注的观察的视角.

例 6 （由 2007 年山东卷改编）下列几何体各自的三视图中，有且仅有两个视图相同的是________.



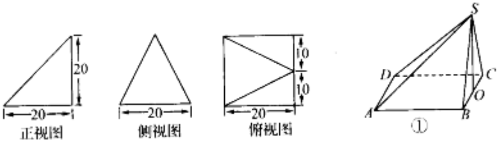
（例 6）

【命题意图】 本题考查三视图的画法规则，即"主视图与左视图的高要保持平齐，主视图与俯视图的长应对正，俯视图与左视图的宽度应相等". 本题较容易.

【参考答案】 从选项看只要判断正方体的三视图都相同就可以选出正确答案，因此应填②和④.

【特别提醒】 本题考查几何体的三视图. 如果对于"有且仅有两个视图相同"理解有偏差，就极有可能会误选. 此外，直观图要注意"还原". 根据直观图画法原理要能够掌握由直观图到实物的转化；三视图要依靠实物的观察方向确定，一般来说，试题都会给出实物的确定位置.

例 7 （由 2007 年宁夏、海南卷改编）已知某个几何体的三视图如下，根据图中标出的尺寸（单位：cm），可得这个几何体的体积是________.



（例 7）

【命题意图】 本题考查由三视图去推断物体的形状，这是一个难点. 由平面图形去推测空间图形，一定要在平时多观察、多思考、多练习，当然也不能忘记合理地进行检验. 本题为容易题.

【参考答案】 根据三视图的画法规则，不难知道这个几何体是四棱锥，其底面是边长为 20 cm 的正方形，一个侧面与底面垂直，且棱锥的顶点在底面上的射影是底面一边的中点，如图①所示.

故该四棱锥的体积为 $V=\frac{1}{3}\times 20\times 20\times 20=\frac{8\,000}{3}(\text{cm}^3)$.

【特别提醒】 合理的空间想象能力对于本题的解决非常重要. 另外要注意计算能力的培养.

例 8 若线段 PQ 在 xOy 平面及 yOz 平面上的投影长分别为 $2\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{17}$，试问：线段 PQ 最长可为______，最短可为______.

【命题意图】 本题考查空间坐标系的建立、空间点的坐标以及空间直角坐标系中两点之间的距离公式. 本题难度中等.

【参考答案】 如果我们再知道线段 PQ 在 xOz 平面上的射影长，则线段 PQ 的长度已经确定，就无从讨论其最长和最短了. 不失一般性，不妨视 P 点为坐标原点，设 $Q(u,v,w)$，据题意则有 $\sqrt{u^2+v^2}=2\sqrt{2}$，$\sqrt{v^2+w^2}=\sqrt{17}$，而 $PQ=\sqrt{u^2+v^2+w^2}$，所以 $u^2=8-v^2$，$w^2=17-v^2$. 而 $PQ=\sqrt{u^2+v^2+w^2}$，从而有 $u^2+v^2+w^2=25-v^2$. 因为 $0\leqslant v^2\leqslant 8$，故 $\sqrt{17}\leqslant PQ\leqslant 5$.

【特别提醒】 有些看似无从下手的问题，只要认真分析，合理转化，问题总可以得到合理的解决，本题就是一例.

第3讲　必修部分

算法的有关概念、流程图、基本算法语句、抽样方法、总体分布的估计、总体特征数的估计、变量的相关性、几何概型、统计案例

考点归纳

教材必修 3 部分的内容都是新增内容.

(1)算法部分的主要内容是算法的含义及其算法的描述,它包括算法的自然语言表示、流程图表示及伪代码表示.从考试说明的要求来看,只需要了解即可.具体地说要会画图识图,了解算法所体现的程序化的特征.

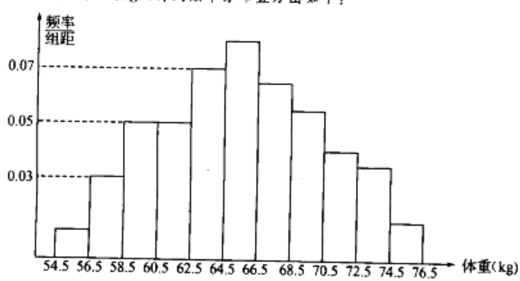
(2)统计这一章的所有内容都是新增内容,包括抽样方法、总体分布的估计、总体特征数的估计和线性回归方程.它实际上是一条线串下来的,即先抽取样本,再通过对样本进行分析对比,从而了解估计总体的状态.这部分知识具有很强的应用性,可能会加大考查的力度.

(3)概率部分中的几何概型是新课标中新增的内容,其他部分内容仍与原内容大致相同.高考中的应用题会突出对概率的计算与应用的考查,而填空题则更是注重基础概念.试题会注重与实际生活的贴近,关注热点,与时俱进,具有鲜明的时代感.由于概率与生活密切贴近,人们对概率知识的认识正在不断深入,相信数学新高考会加大概率内容的考查力度与难度.

此外,对于统计案例部分的内容,由于统计方法的数学化超出了我们的理解水平,因此一定要结合具体的案例理解问题和方法的实质;高中阶段学习统计的主要目标是在数据处理的过程中学习一些常用的方法,运用所学的知识、方法去解决简单的实际问题,进一步体会运用统计方法解决实际问题的基本思想.基于此,在复习本章内容时,只要求了解基本思想和方法,认识统计方法的特点,对其理论基础不作要求.

经典范例

例 1　(由 2006 年重庆卷改编)为了了解某地区高三学生的身体发育情况,抽查了该地区 100 名年龄为 17.5 岁~18 岁的男生体重(单位:kg),得到频率分布直方图如下:



(例 1)

根据上图可得这 100 名学生中体重在(56.5,64.5)的学生人数是______.

【命题意图】 本题考查对频率分布直方图的理解.本题较容易.

【参考答案】 学生的人数就是频率直方图中的频率与总体数的乘积,于是应求出在(56.5,64.5)这个范围内的相应的直方图的面积.在(56.5,64.5)这个范围内的直方图的频率(面积)为(0.03+0.05+0.05+

0.07)×2=0.40,所以这100名学生中体重在(56.5,64.5)的学生人数是0.40×100=40.

【特别提醒】 在频率分布直方图中,横轴表示数据,纵轴表示$\frac{频率}{组距}$,每个矩形的面积恰好是该组上的频率,这些矩形就构成了频率分布直方图.在反映样本的频率分布方面,频率分布表比较确切,频率分布直方图比较直观,它们相互补充.

例2 下表是某地区的一种传染病与饮用水的调查表:

	得 病	不得病	总 计
干净水	52	466	518
不干净水	94	218	312
总 计	146	684	830

则有______的把握认为这种传染病与饮用水的卫生程度有关.

【命题意图】 本题考查独立性检验的思想方法和χ^2统计量的计算公式,并能结合计算结果与χ^2的临界值的比较,进行合理的判断.本题为容易题.

【参考答案】 假设传染病与饮用水无关,由公式计算得:

$\chi^2=\frac{830\times(52\times218-466\times94)^2}{146\times684\times518\times312}\approx54.21>6.635$,因此我们有99%的把握认为该地区的传染病与饮用水有关.

【特别提醒】 χ^2统计量的公式不能出错.

例3 已知x与y之间的一组数据:

x	0	1	2	3
y.	1	3	5	7

则y与x的线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$必过点______.

【命题意图】 本题考查两个变量的线性相关性、线性回归方程的特点以及数据处理能力.本题较容易.

【参考答案】 由于回归直线方程必过样本中心点$(\bar{x},\bar{y})$,而$\bar{x}=\frac{0+1+2+3}{4}=1.5$,$\bar{y}=\frac{1+3+5+7}{4}=4$,故$y$与$x$的线性回归方程为$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$必过点(1.5,4).

【特别提醒】 线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$中的系数$\hat{a}$,$\hat{b}$满足$\begin{cases}\hat{b}=\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i)}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2},\\ \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.\end{cases}$

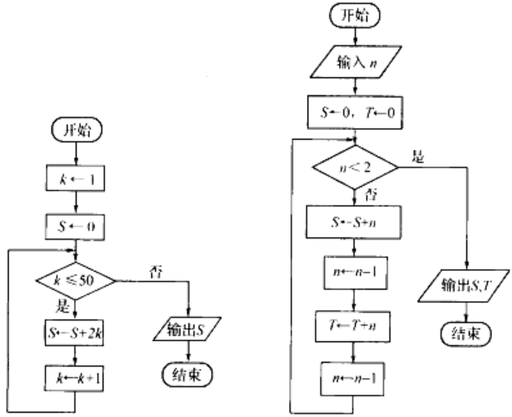
该公式记忆比较复杂,但对于回归直线方程必过样本中心点$(\bar{x},\bar{y})$必须牢记.

例4 (由2007年宁夏、海南卷(理)改编)如果执行图①中的程序框图,那么输出的$S=$______.

【命题意图】 本题考查对算法结构中循环结构的准确理解和把握,难度中等.

【参考答案】 不妨把每一次循环的结果罗列出来,不难得到输出的$S=2\ 550$.

【特别提醒】 实际上如果我们把每一次循环的结果记为$S_n(1\leqslant n\leqslant50)$,则不难得到$S_n-S_{n-1}=2n$,利用数列的知识即可求解.与此题类似的有2007年山东卷(理)中的一道题:阅读下面的流程图(如图②),若输入的n是100,则输出的变量S和T的值依次是______和______.(答案:2 550,2 500)



①　　　　　　②

(例4)

例5　一个算法如下：

第一步：S取值0，i取值1

第二步：若i不大于12，则执行下一步；否则执行第六步

第三步：计算$S+i$并将结果代替S

第四步：用$i+2$的值代替i

第五步：转去执行第二步

第六步：输出S

则运行以上步骤输出的结果为______.

【命题意图】　读懂算法语言，掌握算法结构，并能得出其结果，是高考的要求. 本题难度中等.

【参考答案】　依照算法规则，当i不大于12时，每一次循环的结果分别是1,4,9,16,25,36，因此最后的输出结果是36.

【特别提醒】　(1)算法的目的是为了求解，因而没有输出的算法是没有意义的. 事实上，算法一般地应有一个或多个输出.

(2)同一个问题由于分析整理思考的角度不同，而可能存在着多种算法，因而算法有好坏与优劣之分.

例6　(由2005年湖北卷改编)某初级中学有学生270人，其中一年级108人，二、三年级各81人. 现要利用抽样方法抽取10人参加某项调查，考虑选用简单随机抽样、分层抽样和系统抽样三种方案. 使用简单随机抽样和分层抽样时，将学生按一、二、三年级依次统一编号为1,2,…,270；使用系统抽样时，将学生统一随机编号为1,2,…,270，并将整个编号依次分为10段. 如果抽得号码有下列四种情况：

①7,34,61,88,115,142,169,196,223,250；

②5,9,100,107,111,121,180,195,200,265；

③11,38,65,92,119,146,173,200,227,254；

④30,57,84,111,138,165,192,219,246,270.

关于上述样本的下列结论中，正确的结论序号是______.

(1)②③都不能为系统抽样　　　　(2)②④都不能为分层抽样

(3)①④都可能为系统抽样　　　　(4)①③都可能为分层抽样

【命题意图】 本题考查每一种抽样方法的特点及其适用范围，难度中等.

【参考答案】 由定义可知，①③为分层抽样；②为系统抽样；④为随机抽样，故填(4).

【特别提醒】 三种抽样方法的特点及适用范围列表如下：

类　别	特　点	相互联系	适用范围	共同点
简单随机抽样	从总体中逐个抽取		总体中的个体个数较少	抽样过程中每个个体被抽到的可能性相同
系统抽样	将总体平均分成几部分按事先确定的规则分别在各部分中抽取	在起始部分抽样时，采用简单随机抽样	总体的个数较多时	
分层抽样	将总体分成几层，按各层个体数之比抽取	各层抽样时采用简单随机抽样或系统抽样	总体由差异明显的几个部分组成	

例 7　甲、乙两名学生在 5 次数学考试中的成绩统计的茎叶图如图所示，若 $\overline{x}_甲$、$\overline{x}_乙$ 分别表示甲、乙两人的平均成绩，则 $\overline{x}_甲$ ______ $\overline{x}_乙$（填"$>$"、"$=$"或"$<$"），乙比甲______（填"稳定"或"不稳定"）.

甲		乙
4	7	7　7　8
8　2	8	6
5　1	9	2

(例 7)

【命题意图】 本题考查茎叶图的读图、数据处理以及图形意义理解等方面的能力. 本题难度中等.

【参考答案】 由图可知 $\overline{x}_甲=\dfrac{74+82+88+95+91}{5}=\dfrac{430}{5}=86$，

$$\overline{x}_乙=\frac{77+77+78+86+92}{5}=82,$$

$$S_甲^2=\frac{(74-86)^2+(88-86)^2+(82-86)^2+(95-86)^2+(91-86)^2}{2}=54,$$

$$S_乙^2=\frac{(77-82)^2+(77-82)^2+(78-82)^2+(86-82)^2+(92-82)^2}{2}=36.4,$$

所以 $\overline{x}_甲>\overline{x}_乙$，乙比甲稳定.

【特别提醒】 在抽样分析中，样本的平均数用来衡量这组数据的水平，进而估计总体的水平. 但由于样本抽取的随机性，有时用平均水平来衡量总体还有失偏颇. 尽管如此，对总体而言，特征数既有随机性的一面，操作时又是以一个确定的样本为依据的. 样本方差是通过每一个数据与平均数的离差程度的平方和来刻画的，因此其值越小，波动越小，样本数据越稳定.

例 8　如图，程序运行的结果为______.

```
S←0
I←1
While I≤10
  S←S+2×I
  I←I+1
End While
Print S
End
```

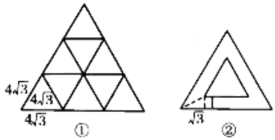
(例 8)

【命题意图】 本题考察对用伪代码表示的算法问题的理解. 本题难度中等.

【参考答案】 由伪代码可以看出该算法实际上是求和，即求和 $S=2+4+6+\cdots+20=110$. 故该程序运行的结果为 110.

【特别提醒】 用"While"循环语句描述算法与用"For"语句描述算法相比，难度可能会大点，这是因为"While"语句的特点是"前测试"，即先判断，后执行. 若初始条件不成立，则一次也不执行循环体中的内容. 任何一种需要重复处理的问题都可以用这种前测试循环来实现. 同时对于用"While"循环语句描述算法，可采用"倒逼"的方法来判断变量 I 最后循环至什么数为止. 另外，当循环的次数已经确定时，可用"For"循环语句来表示；当循环次数不能确定时，可用"While"循环语句来表示.

例 9 如图①,设有一个等边三角形网格,其中每个最小等边三角形的边长都是 $4\sqrt{3}$ cm,现用直径等于 2 cm的硬币投掷到此网格上,则硬币落下后与格线没有公共点的概率为______.



(例 9)

【命题意图】 本题考查几何概型的概念以及概率的求解.本题难度中等.

【参考答案】 硬币落下后与格线没有公共点等价于硬币中心与格线的距离都大于半径 1.在等边三角形内作三条与三边距离均为 1 的直线,构成小等边三角形,当硬币中心在小等边三角形内时,硬币与三边都没有公共点,所以硬币与格线没有公共点就转化为硬币中心落在小等边三角形内的问题.

记 $A=\{$硬币落下后与格线没有公共点$\}$.

在等边三角形内作小等边三角形,使其三边与原等边三角形三边距离都为 1,如图②所示,则小等边三角形的边长为 $4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$,由几何概率公式得 $P(A)=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{3})^2}=\dfrac{1}{4}$.故硬币落下后与格线没有公共点的概率为 $\dfrac{1}{4}$.

【特别提醒】 找准事件 A 所对应的平面区域是本题的关键.事实上许多几何概型问题的处理,恰当合理的转化往往是关键.

例 10 如图,阅读下列算法,指出当输入的四个数为 1,1,0,0 时,最终输出的结果是______.

S1 输入 a,b,c,n
S2 $n\leftarrow n+1$
S3 $a\leftarrow 2a$
S4 $b\leftarrow b+2$
S5 $c\leftarrow c+ab$
S6 若 $c\leqslant 2\,006$,则转 S2,否则执行 S7
S7 输出 n,c

(例 10)

【命题意图】 本题考查算法语言的理解,等差数列、等比数列的定义以及差比数列的求和,以及不等式知识的应用.本题难度较大.

【参考答案】 从数列角度看此算法,S3 可以看作 $a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N})$,同样,S4 可以看作 $b_{n+1}=b_n+2(n\in\mathbf{N})$,S5 可以看作 $c_{n+1}=c_n+a_{n+1}b_{n+1}(n\in\mathbf{N})$,当输入的四个数为 1,1,0,0 时,即表示 $a_0=1,b_0=1,c_0=0$,此时 $a_n=2^n,b_n=2n+1,c_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$,即

$$c_n=3\cdot 2+5\cdot 2^2+\cdots+(2n+1)\cdot 2^n, \quad ①$$

$$2c_n=3\cdot 2^2+5\cdot 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n+(2n+1)\cdot 2^{n+1}, \quad ②$$

由②−①,得 $c_n=-2(2^2+2^3+\cdots+2^n)+(2n+1)\cdot 2^{n+1}-3\cdot 2=-2\cdot\dfrac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2}+(2n+1)\cdot 2^{n+1}-6=(2n-1)\cdot 2^{n+1}+2$.

又 S6 的含义是 $c_{n-1}\leqslant 2\,006,c_n>2\,006$,所以 $\begin{cases}(2n-3)\cdot 2^n\leqslant 2\,006,\\(2n-1)\cdot 2^{n+1}+2>2\,006,\end{cases}$ 解得 $n=7,c_n=3\,330$,因此最终输出的结果是 $n=7,c_n=3\,330$.

【特别提醒】 本题涉及等差数列、等比数列的通项公式、差比数列(混合数列)的错位相减法等基础知识和基本技能的全面考查,尤其是联系到算法情境下的转化能力,有利于培养逻辑思维能力、理性思维能力和实践能力.