

高中数学

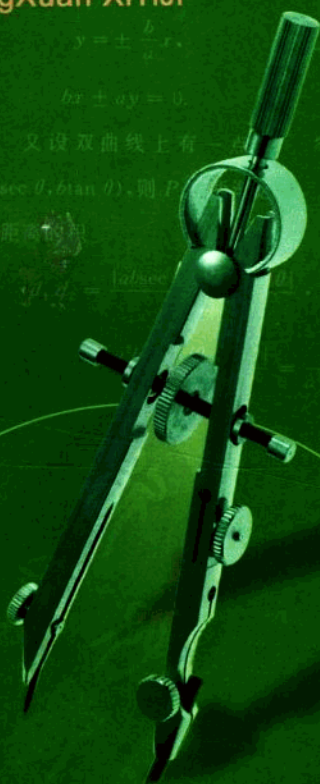
精选习题集

(上册)

GaoZhong ShuXue JingXuan XiTiJi

冯金岳 编著

北京工业大学出版社



内 容 提 要

本书依据《数学教学大纲》和《高校招生考试说明》编写而成,所选习题是编者几十年教学经验的积累,其特色是所选习题精炼,题型新颖,题目灵活,综合性强,能引发学生深入思考;又为减轻学生负担,跳出题海以有限的题目涵括了高中数学中的全部内容、所有题型和解题方法,且不重复;全部习题按照难易、题型及所涉及的知识内容进行科学排序,便于循序渐进,有利相互对比;习题的难易有梯度,并在题前标有不同的记号,以便于不同基础的学生选用。

本书分“练习”和“测试”两部分,其中“练习”部分的习题严格按照教学顺序编排,与教学同步;“测试”部分的习题多为综合性习题,便于学习提高。

本书既适用于学生高考复习及平时课外学习的补充练习,也适用于教师备课之需。

绪 言

一、本书是依据《数学教学大纲》、现行课本和《高校招生考试说明》编写而成。

二、本书所选习题是编者几十年教学的积累,是从大量的习题中精选而来。“精”体现在所选习题典型、新颖、灵活、综合性强;“精”体现在所选习题能引发学生深入思考。“精”是本书的主要特色。

三、为了减轻负担,使学生跳出题海,本书所选习题以最少的有限习题量(约 1200 题),涵括了高中数学的全部内容、所有的题型和解题方法,且每个题都各具特色,彼此不相重复。

四、本书的习题按照难易、题型,特别是按照所涉及知识的内容进行了科学排序,使之有利于循序渐进,减少困难;有利于相互对比,加深理解;有利于总结归纳,全面掌握。

五、本书习题的难易有明显的梯度,大致分为基本题、中等题和难题 3 个等级。每题题号之前分别标有“·”、“:”和“*”3 种符号以示区别,读者可根据自己的情况有所取舍。

六、本书分“练习”和“测试”两部分。“练习”部分的习题严格按照课本的顺序编排,排在前边章节的习题一般不涉及后边的内容,“测试”部分的习题多为综合性习题。

七、本书的练习题除少数根据需要采用“选择”或“填空”两种形式外,而多数采用“解答题”的形式,即解题时要求写出简要过程,以培养推理和表述能力;但测试题仍依习惯采用“选择”、“填空”和“解答题”3 种形式。

八、本书附有详尽解答,必要时还插入了一些“说明”,对难点和重点进行剖析.使用本书,教师可以减轻批改作业负担,学生可以消除无人辅导之苦.但此处要着重叮嘱:虽有“解答”,但不要轻易参看“解答”(可先用纸片覆盖),要在经过一定努力未果的情况下再参看“解答”,只有如此才能收到较好效果.

九、本书是《中学生数学手册》(北京工业大学出版社)的姊妹篇,《手册》的作用在于帮助读者掌握好数学基础知识;本书的作用在于培养和提高读者运用数学知识的能力,两书可结合使用.

十、本书主要用于高考复习,也可用于各年级平时学习的补充;本书无疑将为广大教师备课提供极大方便.

本书在编写过程中得到了北京师范大学钟善基教授的鼓励和指导,在此表示衷心的感谢.

编 者

目 录

第一部分 练习题

一、函数	(3)
(一) 集合(1~8)	(3)
(二) 映射(9~11)	(5)
(三) 函数的定义域和函数的符号(12~21)	(6)
(四) 指数和对数(22~30)	(9)
(五) 二次函数(31~39)	(12)
(六) 幂函数、指数函数和对数函数(40~47)	(21)
(七) 函数图像的几何变换(48~52)	(26)
(八) 指数方程和对数方程(53~59)	(32)
(九) 函数的奇偶性和单调性(60~73)	(37)
(十) 函数的周期性(74~77)	(44)
(十一) 利用函数的性质比较数的大小(78~84)	(45)
(十二) 反函数及其图像(85~88)	(49)
(十三) 函数的值域(89~92)	(51)
(十四) 函数的最大值和最小值(93~114)	(56)
二、不等式	(67)
(一) 比较数的大小(1~7)	(67)
(二) 不等式的性质(8~11)	(69)
(三) 绝对值不等式和平均值不等式(12~16)	(69)
(四) 不等式的同解变形(17~18)	(71)

(五) 解一元一次不等式(19~20)	(71)
(六) 解一元二次不等式(21~24)	(72)
(七) 解高次不等式(25~28)	(74)
(八) 解分式不等式(29~31)	(76)
(九) 解无理不等式(32~38)	(77)
(十) 解绝对值不等式(39~44)	(81)
(十一) 解指数不等式(45~47)	(83)
(十二) 解对数不等式(48~52)	(85)
(十三) 解三角不等式(53)	(88)
(十四) 解含字母的不等式组(54~55)	(88)
(十五) 用比较法证明不等式(56~61)	(90)
(十六) 用综合法证明不等式(62~74)	(92)
(十七) 用分析法证明不等式(75~83)	(96)
(十八) 用反证法证明不等式(84~86)	(98)
(十九) 用放缩法证明不等式(87~92)	(99)
(二十) 用讨论法证明不等式(93~96)	(101)
(二十一) 用求最值法证明不等式(97~100)	(102)
(二十二) 用数学归纳法证明不等式	(103)
(二十三) 用换元及其他方法证明不等式(101~102)	(103)
(二十四) 利用不等式求参数的取值范围(103~112)	(104)
(二十五) 求函数的最大值和最小值(113~120)	(112)
(二十六) 利用不等式解特殊的多元方程(121)	(116)
三、数列与数列的极限	(118)
(一) 等差数列(1~9)	(118)
(二) 等比数列(10~17)	(121)
(三) 等差中项和等比中项(18~29)	(124)
(四) 求一般数列的通项(30~35)	(129)
(五) 求一般数列的前 n 项和(36~42)	(133)

(六) 数列的综合性问题(43~50)	(137)
(七) 数列极限的概念及其运算法则(51)	(140)
(八) 数列极限的证明(52~54)	(141)
(九) 求数列的极限(55~57)	(142)
(十) 求无穷数列各项和(58~64)	(144)
(十一) 循环小数化分数(65~67)	(148)
(十二) 数列极限的应用(68~73)	(150)
四、数学归纳法	(156)
(一) 用数学归纳法证明等式(1~22)	(156)
(二) 用数学归纳法证明不等式(23~46)	(166)
(三) 整除问题(47~55)	(176)
(四) 几何问题(56)	(178)
(五) 归纳—猜想—证明(57~70)	(179)
五、复数	(190)
(一) 复数概念(1~3)	(190)
(二) 复数代数式运算、复数相等、解复数方程(4~13)	(191)
(三) 复数三角形式及其运算(14~29)	(195)
(四) 复数的模和辐角(30~38)	(200)
(五) 复数运算的几何意义及其应用(39~55)	(204)
(六) 几何、三角等问题的复数解法(56~64)	(213)
(七) 共轭复数的性质及应用(65~70)	(217)
(八) 有关复数的轨迹问题(71~76)	(219)
(九) 和复数有关的最值问题(77~84)	(222)
六、排列、组合、二项式定理	(227)
(一) 两个基本原理及排列与组合的种数公式(1~4)	(227)
(二) 有关排列数与组合数的计算与证明(5~6)	(228)
(三) 简单的排列与组合(7~16)	(230)
(四) 有附加条件的排列与组合(17~36)	(232)

(五) 较复杂的排列与组合(37~52)	(239)
(六) 二项式定理及有关公式(53~54)	(246)
(七) 杨辉三角的运用(55)	(246)
(八) 二项展开式的项数、系数和二项式系数(56~62)	(247)
(九) 求二项展开式中含 x^r 的项和常数项(63~66)	(249)
(十) 求二项展开式中的有理项(67~69)	(251)
(十一) 求二项展开式中二项式系数(或系数)	
最大的项(70~72)	(252)
(十二) 和二项式定理有关的整除问题(73~75)	(254)
(十三) 解和二项式定理有关的方程和不等式(76~77)	(256)
(十四) 证明和二项式定理有关的等式和不等式(78~84) ...	(256)
(十五) 其他问题(85~86)	(259)
七、三角函数、三角函数图像和性质	(261)
(一) 三角函数(1~4)	(261)
(二) 单位圆(5~7)	(262)
(三) 同角三角函数之间的关系(8~12)	(264)
(四) 诱导公式(13)	(266)
(五) 最简三角函数的图像和性质(14~17)	(267)
(六) 复合三角函数的图像和性质(18~26)	(268)
(七) 三角函数周期性的判定(27~28)	(274)
(八) 三角函数图像的应用(29~30)	(275)
八、两角和与差的三角函数、解三角形	(277)
(一) 化简三角函数式或求三角函数式的值(1~6)	(277)
(二) 比较三角函数、三角函数式或角的大小(7~9)	(282)
(三) 在给定的条件下,求三角函数、三角函数式或角	
的值(10~24)	(284)
(四) 证明三角函数的等式和不等式(25~28)	(291)
(五) 在给定的条件下,证明三角函数的等式和	

不等式(29~38)	(292)
(六) 求三角函数式的最大值和最小值(39~45)	(297)
(七) 判定三角形角的大小和三角形的形状(46~52)	(300)
(八) 证明关于三角形的等式(53~56)	(303)
(九) 在给定的条件下,证明关于三角形的等式(57~61)	(304)
(十) 证明关于三角形的不等式(62~68)	(307)
(十一) 解三角形(69~73)	(312)
(十二) 求关于三角形的最大值和最小值(74~77)	(314)
九、反三角函数和简单的三角方程	(318)
(一) 反三角函数(1~2)	(318)
(二) 求反三角函数值(3~4)	(319)
(三) 求反三角函数的三角函数值(5~6)	(320)
(四) 一般角的反三角函数表示(7~12)	(321)
(五) 反三角函数及相关函数的图像(13)	(324)
(六) 反三角函数式的化简、求值和证明(14~17)	(326)
(七) 解反三角函数方程(18~19)	(327)
(八) 解反三角函数不等式(20~22)	(328)
(九) 有关反三角函数的综合性问题(23~28)	(331)
(十) 最简三角方程的解(29)	(333)
(十一) 三角方程常见的 6 种类型(30~31)	(334)
(十二) 增根和失根(32~34)	(337)
(十三) 简单的三角方程(35~38)	(340)
(十四) 综合性方程(39~43)	(342)

第一部分

练 习 题

一、函 数

(一) 集合(1~8)

• 1. 用适当的集合符号填空：

(1) $0 \underline{\hspace{1cm}} \{0\}, 0 \underline{\hspace{1cm}} \emptyset, \emptyset \underline{\hspace{1cm}} \{\emptyset\}, \{a\} \underline{\hspace{1cm}} \{a, b, c\}, \{a, b\}$
 $\underline{\hspace{1cm}} \{b, a\};$

(2) $A \underline{\hspace{1cm}} A \cap B, A \underline{\hspace{1cm}} A \cup B, A \cap B \underline{\hspace{1cm}} A \cup B;$

(3) 若 $A \subset B$, 则 $A \underline{\hspace{1cm}} B = A, A \underline{\hspace{1cm}} B = B.$

解：(1) $\in, \notin, \subset$ ①, $\subset, =$; (2) $\supseteq, \subseteq, \subseteq$; (3) $\cap, \cup.$

• 2. 把以下集合在图 1-1 中表示出来②：

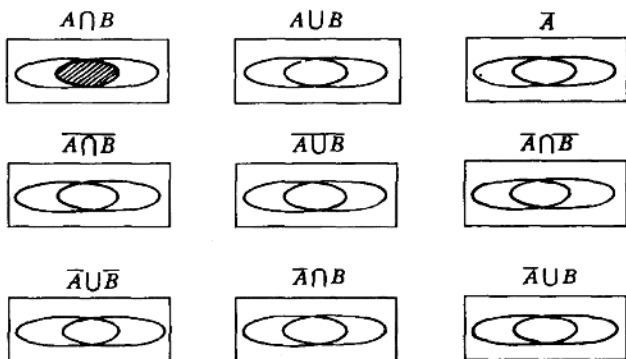


图 1-1

解：略。

① 真子集符号，现国家标准采用 $\subsetneq$ 。

② $\bar{A}$ 表示 A 的补集，现国家标准采用 C_A 表示。

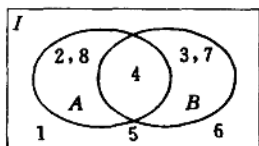
• 3. 两个非空集 A 和 B , $A \subset B$, 则以下集合中是空集的为 ()

(A) $A \cap B$ (B) $\bar{A} \cap B$

(C) $A \cap \bar{B}$ (D) $\bar{A} \cap \bar{B}$

解: (C).

• 4. 全集 $I = \{x \mid x \leq 8, x \in \mathbb{N}_+\}^{\text{①}}$, $A \cap \bar{B} = \{2, 8\}$, $\bar{A} \cap B = \{3, 7\}$, $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 5, 6\}$, 求 A 和 B .



解: $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

由图 1-2 可知:

$$A = \{2, 4, 8\}, B = \{3, 4, 7\}.$$

图 1-2

• 5. 求证: (1) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; (2) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

证: (1) 因为 $a \in \overline{A \cap B} \iff a \notin A \cap B \iff a \notin A$ 或 $a \notin B \iff a \in \bar{A}$ 或 $a \in \bar{B} \iff a \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

所以 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

(2) 同理可证 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

• 6. 若 $\{1, 2\} \subseteq A \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 写出所有符合此条件的集合 A .

解: $\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}$ 共 7 个集合.

• 7. 集合 $A = \{x \mid (x-1)(x+1)(x+2) > 0\}$, $B = \{x \mid a \leq x \leq b\}$, 且 $A \cup B = \{x \mid x > -2\}$, $A \cap B = \{x \mid 1 < x \leq 5\}$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

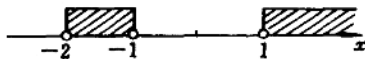


图 1-3

解: 集合 A 如图 1-3 所示.

① 国家标准规定: $\mathbb{N}$ 表示自然数集, 包含 0. $\mathbb{N}_+$ 表示除去 0 的自然数集.

$$\begin{cases} a \leq -1, \\ a > -2, \\ a \geq -1, \end{cases} \Rightarrow a = -1, \begin{cases} b > 1, \\ b = 5, \end{cases} \Rightarrow b = 5.$$

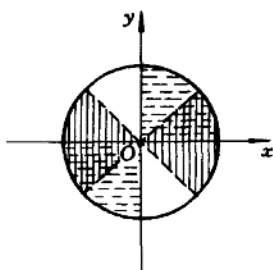


图 1-4

• 8. 已知集合 $A = \{x | \sin 2x > 0\}$,
 $B = \{x | \cos 2x > 0\}$, 则 $A \cap B =$
 _____; $A \cup B =$ _____.

解: $A = \left\{x | k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$,

$$B = \left\{x | k\pi - \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

由图 (1-4) 可知:

$$A \cap B = \left\{x | k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$A \cup B = \left\{x | k\pi - \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(二) 映射 (9~11)

• 9. 以下对应中属于映射的是_____；属于单射的是_____, 属于满射的是_____, 属于一一映射的是_____.

(A) $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^+, f: x \rightarrow y = \pm \sqrt{2px}$

(B) $X = \{x | 0^\circ < x < 180^\circ\}, Y = [-1, 1], f: x \rightarrow y = \sin x$

(C) $X = \mathbb{N}_+, Y = \mathbb{N}_+, f: x \rightarrow y = 2x - 1$

(D) $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^+, f: x \rightarrow y = |x|$

(E) $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^+, f: x \rightarrow y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$

解: (1) B, C, D, E; (2) C, E; (3) D, E; (4) E.

10. 对于映射 $f: A \rightarrow B$, 下列判断中正确的是 ()

(A) A 中某元素像的可能不只一个

(B) B 中某元素的原像可能不只一个

(C) A 中某元素可能没有像

(D) B 中每个元素都有原像

解: (B).

• 11. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{6, 7, 8\}$, 那么由 A 到 B 可以建立的映射的种数是 ()

(A) P_5^3 (B) C_5^3 (C) 3^5 (D) 5^3

解: (C).

(三) 函数的定义域和函数的符号 (12~21)

• 12. 求函数 $y = \frac{(2x-1)^0}{\log_{(x-1)}(4-x)} \cdot \sqrt{2^x-1} + \tan \arcsin\left(x - \frac{3}{2}\right)$ 的定义域.

解:

$$\begin{cases} 2x-1 \neq 0, \\ x-1 > 0, \\ x-1 \neq 1, \\ 4-x > 0, \\ 4-x \neq 1, \\ 2^x-1 \geq 0, \\ x - \frac{3}{2} < 1, \\ x - \frac{3}{2} > -1. \end{cases}$$

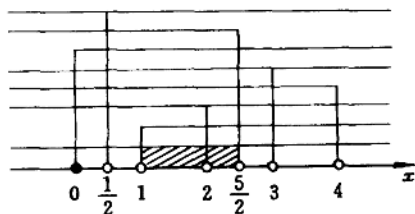


图 1-5

如图 1-5, $X = (1, 2) \cup \left(2, 2\frac{1}{2}\right)$.

• 13. 函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[-1, 0]$, 值域是 $[-1, 2]$, 则函数 $y = -f(x+2)$ 的定义域是 _____, 值域是 _____.

解: 因为 $-1 \leq x+2 \leq 0$, 所以 $-3 \leq x \leq -2$.

因为 $-1 \leq f(x+2) \leq 2$, 所以 $1 \geq -f(x+2) \geq -2$.

即 $y = -f(x+2)$ 的定义域是 $[-3, -2]$, 值域是 $[-2, 1]$.

∴ 14. 函数 $y=f(2^x)$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 则函数 $y=f(\log_2 x)$ 的定义域是_____.

解: 因为 $-1 < x < 1$, $\frac{1}{2} \leq 2^x \leq 2$, 所以 $y=f(x)$ 的定义域是 $[\frac{1}{2}, 2]$.

又因为 $\frac{1}{2} \leq \log_2 x \leq 2$, $\log_2 \sqrt{2} \leq \log_2 x \leq \log_2 4$, $\sqrt{2} \leq x \leq 4$, 所以 $y=f(\log_2 x)$ 的定义域是 $[\sqrt{2}, 4]$.

∴ 15. 若 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=+\frac{1}{x^2}$, 则 $f(x-1)$ 的表达式为()

(A) x^2+2x-3 (B) x^2-2x+3

(C) x^2+2x+3 (D) x^2-2x-3

解: 因为 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$, 所以 $f(x)=x^2+2$, $f(x-1)=(x-1)^2+2=x^2-2x+3$. 结论(B)正确.

∴ 16. 已知 $f(x)=\begin{cases} 3^x & (x < 0), \\ \sqrt{3} & (0 \leq x \leq 1), \\ \log_{\frac{1}{3}} x & (x > 1). \end{cases}$

求 $f\{f[f(a)]\} (a < 0)$.

解: $f\{f[f(a)]\} = f\{f[3^a]\} = f\{\sqrt{3}\} = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$.

∴ 17. 已知有理整函数 $f(x)$ 满足 $f(2x)+f(3x+1)=13x^2+6x+1$, 则 $f[f(x)]=$ _____.

解: 设 $f(x)=ax^2+bx+c$, 则

$$a(2x)^2+b(2x)+c+a(3x+1)^2+b(3x+1)+c=13x^2+6x+1.$$

比较系数:
$$\begin{cases} 4a+9a=13, \\ 2b+6a+3b=6, \\ 2c+a+b=1. \end{cases}$$

解之得
$$\begin{cases} a=1, \\ b=0, \\ c=0. \end{cases}$$

$f(x)=x^2$, 所以 $f[f(x)]=(x^2)^2=x^4$.

* 18. 已知 $f(x)=ax^3+bx+1$ ($ab \neq 0$), 如果 $f(-m)=-3$, 求 $f(m)$.

解: 因为 $a(-m)^3+b(-m)+1=-3$, 即 $am^3+bm=4$, 所以 $f(m)=am^3+bm+1=4+1=5$.

* 19. 已知 $f(x)=3x^5-14x^4+12x^3-7x^2+6x-3$, 求 $f(2+\sqrt{3})$.

解: 以 $2+\sqrt{3}$ 和 $2-\sqrt{3}$ 为根的二次三项式为 x^2-4x+1 .

因为 $f(x)=(x^2-4x+1)(3x^3-2x^2+x-1)+(x-2)$, 所以 $f(2+\sqrt{3})=(2+\sqrt{3})-2=\sqrt{3}$.

* 20. 若 $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)\lg x+1$, 则 $f(10)=$ _____.

解: $f(10)=f\left(\frac{1}{10}\right)+1$, ①

$f\left(\frac{1}{10}\right)=-f(10)+1$. ②

②代入①: $f(10)=-f(10)+1+1$, 所以 $f(10)=1$.

* 21. $f(x)$ 是减函数, 并满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

(1) 求 $f(1)$ 和 $f(4)$;

(2) 解不等式 $f(-x)+f(3-x) \geq -2$.

解: (1) 因为 $f(xy)=f(x)+f(y)$,

把 $x=1, y=\frac{1}{2}$ 代入, 得 $f\left(1 \times \frac{1}{2}\right)=f(1)+f\left(\frac{1}{2}\right)$, 所以 $f(1)=0$;

把 $x=\frac{1}{2}, y=2$, 代入 $f\left(\frac{1}{2} \times 2\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)$, $f(2)=-1$; 再把 $x=\frac{1}{2}, y=4$ 代入, 得 $f\left(\frac{1}{2} \times 4\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(4)$, 所以 $f(4)=-2$.