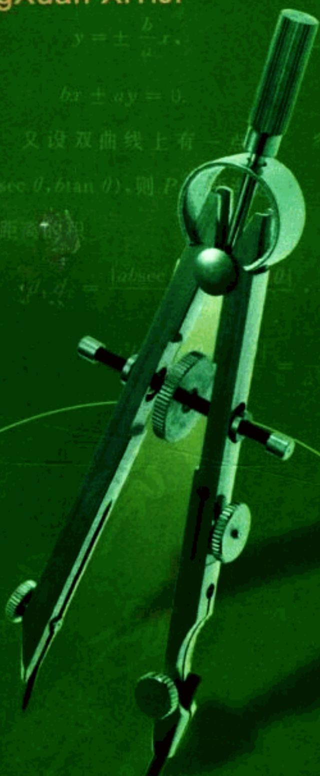
高中数学

精选习题集

（上册）

GaoZhong ShuXue JingXuan XiTiJi

冯金岳 编著



北京工业大学出版社

内 容 提 要

本书依据《数学教学大纲》和《高校招生考试说明》编写而成，所选习题是编者几十年教学经验的积累，其特色是所选习题精炼，题型新颖，题目灵活，综合性强，能引发学生深入思考；又为减轻学生负担，跳出题海以有限的题目涵括了高中数学中的全部内容、所有题型和解题方法，且不重复；全部习题按照难易、题型及所涉及的知识内容进行科学排序，便于循序渐进，有利相互对比；习题的难易有梯度，并在题前标有不同的记号，以便于不同基础的学生选用.

本书分“练习”和“测试”两部分，其中“练习”部分的习题严格按照教学顺序编排，与教学同步；“测试”部分的习题多为综合性习题，便于学习提高.

本书既适用于学生高考复习及平时课外学习的补充练习，也适用于教师备课之需.

绪　言

一、本书是依据《数学教学大纲》、现行课本和《高校招生考试说明》编写而成.

二、本书所选习题是编者几十年教学的积累,是从大量的习题中精选而来."精"体现在所选习题典型、新颖、灵活、综合性强;"精"体现在所选习题能引发学生深入思考."精"是本书的主要特色.

三、为了减轻负担,使学生跳出题海,本书所选习题以最少的有限习题量(约 1200 题),涵括了高中数学的全部内容、所有的题型和解题方法,且每个题都各具特色,彼此不相重复.

四、本书的习题按照难易、题型,特别是按照所涉及知识的内容进行了科学排序,使之有利于循序渐进,减少困难;有利于相互对比,加深理解;有利于总结归纳,全面掌握.

五、本书习题的难易有明显的梯度,大致分为基本题、中等题和难题 3 个等级.每题题号之前分别标有"·"、":"和"*"3 种符号以示区别,读者可根据自己的情况有所取舍.

六、本书分"练习"和"测试"两部分."练习"部分的习题严格按照课本的顺序编排,排在前边章节的习题一般不涉及后边的内容,"测试"部分的习题多为综合性习题.

七、本书的练习题除少数根据需要采用"选择"或"填空"两种形式外,而多数采用"解答题"的形式,即解题时要求写出简要过程,以培养推理和表述能力;但测试题仍依习惯采用"选择"、"填空"和"解答题"3 种形式.

八、本书附有详尽解答，必要时还插入了一些“说明”，对难点和重点进行剖析. 使用本书，教师可以减轻批改作业的负担，学生可以消除无人辅导之苦. 但此处要着重叮嘱：虽有“解答”，但不要轻易参看“解答”(可先用纸片覆盖)，要在经过一定努力未果的情况下再参看“解答”，只有如此才能收到较好效果.

九、本书是《中学生数学手册》(北京工业大学出版社)的姊妹篇，《手册》的作用在于帮助读者掌握好数学基础知识；本书的作用在于培养和提高读者运用数学知识的能力，两书可结合使用.

十、本书主要用于高考复习，也可用于各年级平时学习的补充；本书无疑将为广大教师备课提供极大方便.

本书在编写过程中得到了北京师范大学钟善基教授的鼓励和指导，在此表示衷心的感谢.

编　者

目　录

第一部分　练习题

第一部分

练　　习　　题

一、函　　数

(一) 集合(1～8)

·**1.** 用适当的集合符号填空：

(1) 0 ____ $\{0\}$，0 ____ $\varnothing$，$\varnothing$ ____ $\{\varnothing\}$，$\{a\}$ ____ $\{a,b,c\}$，$\{a,b\}$ ____ $\{b,a\}$；

(2) A ____ $A\cap B$，A ____ $A\cup B$，$A\cap B$ ____ $A\cup B$；

(3) 若 $A\subset B$，则 A ____ $B=A$，A ____ $B=B$.

解：(1) $\in$，$\notin$，$\subset$[①]，$\subset$，$=$；(2) $\supseteq$，$\subseteq$，$\subseteq$；(3) $\cap$，$\cup$.

·**2.** 把以下集合在图 1-1 中表示出来[②]：

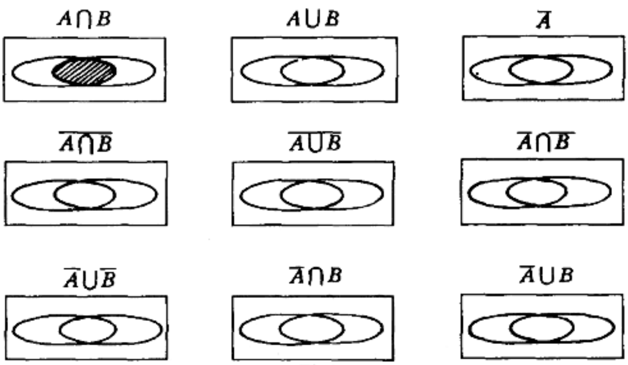


图 1-1

解：略.

---

① 真子集符号，现国家标准采用$\subsetneqq$.

② $\overline{A}$ 表示 A 的补集，现国家标准采用$\complement A$ 表示.

·3. 两个非空集A和B,$A\subset B$,则以下集合中是空集的为(　　)

(A)$A\cap B$　　(B)$\overline{A}\cap B$

(C)$A\cap\overline{B}$　　(D)$\overline{A}\cap\overline{B}$

解:(C).

·4. 全集 $I=\{x\mid x\leqslant 8,x\in\mathbb{N}_+\}$①,$A\cap\overline{B}=\{2,8\}$,$\overline{A}\cap B=\{3,7\}$,$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,5,6\}$,求 A 和 B.

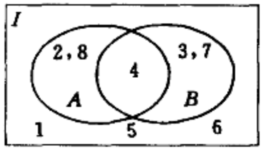


图 1-2

解:$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

由图 1-2 可知:

$A=\{2,4,8\}$,$B=\{3,4,7\}$.

·5. 求证:(1) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;(2) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

证:(1) 因为 $a\in\overline{A\cap B}\Longleftrightarrow a\notin A\cap B\Longleftrightarrow a\notin A$ 或 $a\notin B\Longleftrightarrow a\notin\overline{A}$ 或 $a\notin\overline{B}\Longleftrightarrow a\in\overline{A}\cup\overline{B}$.

所以 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

(2) 同理可证$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

·6. 若$\{1,2\}\subseteq A\subset\{1,2,3,4,5\}$,写出所有符合此条件的集合$A$.

解:$\{1,2\}$,$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4\}$,$\{1,2,5\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,4,5\}$共 7 个集合.

·7. 集合 $A=\{x\mid(x-1)(x+1)(x+2)>0\}$,$B=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$,且 $A\cup B=\{x\mid x>-2\}$,$A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant 5\}$,则 $a=$________,$b=$________.

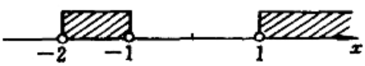


图 1-3

解:集合 A 如图 1-3 所示.

---

① 国家标准规定:N表示自然数集,包含 0. $\mathbb{N}_+$表示除去 0 的自然数集.

$$\begin{cases} a \leqslant -1, \\ a > -2, \\ a \geqslant -1, \end{cases} \Rightarrow a = -1, \quad \begin{cases} b > 1, \\ b = 5, \end{cases} \Rightarrow b = 5.$$

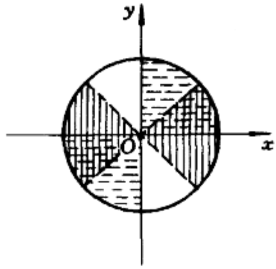


图 1-4

·**8.** 已知集合 $A=\{x \mid \sin 2x>0\}$，$B=\{x \mid \cos 2x>0\}$，则 $A \cap B=$ ________；$A \cup B=$ ________.

解：$A=\left\{x \mid k\pi<x<k\pi+\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$，

$$B=\left\{x \mid k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

由图（1-4）可知：

$$A \cap B=\left\{x \mid k\pi<x<k\pi+\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$A \cup B=\left\{x \mid k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

（二）映射（9～11）

·**9.** 以下对应中属于映射的是________；属于单射的是________，属于满射的是________，属于一一映射的是________.

（A）$X=\mathbb{R}$，$Y=\mathbb{R}^+$，$f: x \to y=\pm\sqrt{2px}$

（B）$X=\{x \mid 0°<x<180°\}$，$Y=[-1,1]$，$f: x \longrightarrow y=\sin x$

（C）$X=\mathbb{N}_+$，$Y=\mathbb{N}_+$，$f: x \longrightarrow y=2x-1$

（D）$X=\mathbb{R}$，$Y=\mathbb{R}^+$，$f: x \longrightarrow y=|x|$

（E）$X=\mathbb{R}$，$Y=\mathbb{R}^+$，$f: x \longrightarrow y=a^x$ $(a>0,\ a \neq 1)$

解：(1) B，C，D，E；(2) C，E；(3) D，E；(4) E.

10. 对于映射 $f: A \to B$，下列判断中正确的是（　　）

（A）A 中某元素像的可能不只一个

（B）B 中某元素的原像可能不只一个

（C）A 中某元素可能没有像

(D) B 中每个元素都有原像

解：(B).

· **11**. 集合 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{6, 7, 8\}$，那么由 A 到 B 可以建立的映射的种数是（ ）

(A) P_5^3 (B) C_5^3 (C) 3^5 (D) 5^3

解：(C).

（三）函数的定义域和函数的符号（12～21）

· **12**. 求函数 $y=\dfrac{(2x-1)^0}{\log_{(x-1)}(4-x)}\cdot\sqrt{2^x-1}+\tan\arcsin\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ 的定义域.

解：

$$\begin{cases}2x-1\neq 0,\\ x-1>0,\\ x-1\neq 1,\\ 4-x>0,\\ 4-x\neq 1,\\ 2^x-1\geqslant 0,\\ x-\dfrac{3}{2}<1,\\ x-\dfrac{3}{2}>-1.\end{cases}$$

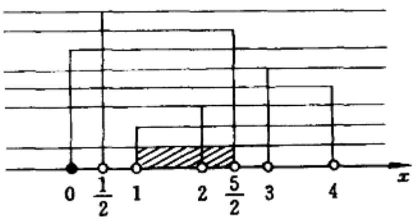


图 1-5

如图 1-5，$X=(1, 2)\cup\left(2, 2\dfrac{1}{2}\right)$.

· **13**. 函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-1, 0]$，值域是 $[-1, 2]$，则函数 $y=-f(x+2)$ 的定义域是________，值域是________.

解：因为 $-1\leqslant x+2\leqslant 0$，所以 $-3\leqslant x\leqslant -2$.

因为 $-1\leqslant f(x+2)\leqslant 2$，所以 $1\geqslant -f(x+2)\geqslant -2$.

即 $y=-f(x+2)$ 的定义域是 $[-3,-2]$，值域是 $[-2,1]$.

14. 函数 $y=f(2^x)$ 的定义域是 $[-1,1]$，则函数 $y=f(\log_2 x)$ 的定义域是__________.

解：因为 $-1<x<1$，$\frac{1}{2}\leqslant 2^x\leqslant 2$，所以 $y=f(x)$ 的定义域是 $\left[\frac{1}{2},2\right]$.

又因为 $\frac{1}{2}\leqslant\log_2 x\leqslant 2$，$\log_2\sqrt{2}\leqslant\log_2 x\leqslant\log_2 4$，$\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 4$，

所以 $y=f(\log_2 x)$ 的定义域是 $[\sqrt{2},4]$.

15. 若 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=+\frac{1}{x^2}$，则 $f(x-1)$ 的表达式为(　　)

(A) x^2+2x-3　　(B) x^2-2x+3

(C) x^2+2x+3　　(D) x^2-2x-3

解：因为 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$，所以 $f(x)=x^2+2$，$f(x-1)=(x-1)^2+2=x^2-2x+3$. 结论(B)正确.

16. 已知 $f(x)=\begin{cases}3^x & (x<0),\\ \sqrt{3} & (0\leqslant x\leqslant 1),\\ \log_{\frac{1}{3}}x & (x>1).\end{cases}$

求 $f\{f[f(a)]\}(a<0)$.

解：$f\{f[f(a)]\}=f\{f[3^a]\}=f\{\sqrt{3}\}=$

$$\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}.$$

17. 已知有理整函数 $f(x)$ 满足 $f(2x)+f(3x+1)=13x^2+6x+1$，则 $f[f(x)]=$__________.

解：设 $f(x)=ax^2+bx+c$，则

$$a(2x)^2+b(2x)+c+a(3x+1)^2+b(3x+1)+c=13x^2+6x+1.$$

比较系数：$\begin{cases}4a+9a=13,\\ 2b+6a+3b=6,\\ 2c+a+b=1.\end{cases}$

解之得 $\begin{cases}a=1,\\ b=0,\\ c=0.\end{cases}$

$f(x)=x^2$，所以 $f[f(x)]=(x^2)^2=x^4$.

：**18.** 已知 $f(x)=ax^3+bx+1\ (ab\neq 0)$，如果 $f(-m)=-3$，求 $f(m)$.

解：因为 $a(-m)^3+b(-m)+1=-3$，即 $am^3+bm=4$，所以 $f(m)=am^3+bm+1=4+1=5$.

* **19.** 已知 $f(x)=3x^5-14x^4+12x^3-7x^2+6x-3$，求 $f(2+\sqrt{3})$.

解：以 $2+\sqrt{3}$ 和 $2-\sqrt{3}$ 为根的二次三项式为 x^2-4x+1.

因为 $f(x)=(x^2-4x+1)(3x^3-2x^2+x-1)+(x-2)$，所以 $f(2+\sqrt{3})=(2+\sqrt{3})-2=\sqrt{3}$.

* **20.** 若 $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)\lg x+1$，则 $f(10)=$________.

解：
$$f(10)=f\left(\frac{1}{10}\right)+1, \quad ①$$
$$f\left(\frac{1}{10}\right)=-f(10)+1. \quad ②$$

②代入①：　$f(10)=-f(10)+1+1$，所以 $f(10)=1$.

* **21.** $f(x)$ 是减函数，并满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

(1)求 $f(1)$ 和 $f(4)$；

(2)解不等式 $f(-x)+f(3-x)\geqslant -2$.

解：(1)因为 $f(xy)=f(x)+f(y)$，

把 $x=1, y=\frac{1}{2}$ 代入，得 $f\left(1\times\frac{1}{2}\right)=f(1)+f\left(\frac{1}{2}\right)$，所以 $f(1)=0$；

把 $x=\frac{1}{2}, y=2$，代入 $f\left(\frac{1}{2}\times 2\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)$，$f(2)=-1$；再把 $x=\frac{1}{2}, y=4$ 代入，得 $f\left(\frac{1}{2}\times 4\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(4)$，所以 $f(4)=-2$.