高等学校数学系列教材

线性代数

主编/范崇金 王 锋　主审/卜长江

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

高等学校数学系列教材

线性代数

主编/范崇金 王 锋 主审/卜长江

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

内容简介

本书根据工科线性代数课程教学大纲(包括考研大纲)要求编写而成,内容包括行列式、线性方程组、矩阵、向量空间与线性变换、方阵的特征值与特征向量、方阵的对角化、二次型。本书结构严谨、逻辑清晰、简明扼要、易教易学;本书例题典型、习题经典;书后附有习题答案(配有习题指导书)。

本书读者对象为理工科非数学专业的本科生及报考工科硕士研究生的考生。本书可作为工科线性代数课程的教材及教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/范崇金,王锋. 主编. —哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2008.3

ISBN 978-7-81133-170-7

Ⅰ.线… Ⅱ.①范… ②王… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 018084 号

出版发行	哈尔滨工程大学出版社
社　　址	哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码	150001
发行电话	0451-82519328
传　　真	0451-82519699
经　　销	新华书店
印　　刷	哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本	787mm×960mm　1/16
印　　张	12.5
字　　数	264 千字
版　　次	2008 年 3 月第 1 版
印　　次	2008 年 3 月第 1 次印刷
定　　价	20.00 元

http://press.hrbeu.edu.cn

E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前言

本书为高等学校工科线性代数教材，根据高等学校工科线性代数课程的要求编写，同时也满足全国工科硕士研究生入学考试大纲的要求。为了使本书能适合不同专业的要求，我们在最后一章增加了线性空间与线性映射的内容。

作为一门工科基础课教材，在满足大纲要求的前提下，其写法是可以多种多样的，不同的风格和理念都可以产生优秀的教材。在本教材的编写中，我们的理念是：结构严谨、逻辑清晰、简明扼要、易教易学。编者在以下几方面作了一点尝试。

(1) 由行列式尽早地给出矩阵的秩及线性方程组可解性判别定理，再应用此理论来处理向量组的理论。这样，整个课程的学习过程更为流畅，消除了向量组理论的教学难点。

(2) 多处刻意强调了高斯消元法。例如，我们用高斯消元法证明了克莱姆法则，回避了较难的传统证明。

(3) 在内容处理上，我们从等价分类的角度概述了矩阵的等价、复数域上方阵的相似、实对称阵的合同。这样，学生会对这三个内容都有一个整体的理解，而不仅仅是零散的认知。

(4) 给出了传统工科线性代数教材中一般不予给出的几个定理的证明，教师可以灵活处理。这些定理的证明用的都是线性代数的基本理论，学生完全可以自我阅读，有益无害。

(5) 为满足学生考研需要，本书加大了习题的数量与类型，证明题都是比较经典的，个别习题有一定的难度。

我们的许多同行审阅过本书稿；施久玉教授、卜长江教授、高振滨教授及邱威老师等认真细致地通读了书稿，指出了原稿中的一些错误和不当之处。本书的出版也得到了学院领导和哈尔滨工程大学出版社的大力支持。在此，编者向他们致以诚挚的谢意。

本书编者都讲授本课程20余年，也有不同层次线性代数教学经验（包括近20年的考研辅导），但限于作者的悟性和知识水平，书中的不当和错误在所难免，欢迎读者提出意见和建议。

编　者
2008年1月28日
哈尔滨工程大学理学院

目录

第1章　行列式

线性代数起源于解线性方程组，人们在准确地阐述线性方程组的可解性与解的结构时，引入了行列式和矩阵；而行列式和矩阵本身也成了线性代数的重要组成部分. 这样，线性方程组、行列式和矩阵就构成了线性代数重要的基础部分.

本章的主要内容：

(1) 任意阶行列式的定义与性质；

(2) 行列式按行或列的展开；

(3) 克莱姆法则.

1.1　二阶行列式和三阶行列式

1. 二阶行列式

引例 1　若定义二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

则当 $ad-bc\neq 0$ 时，二元一次方程组

$$\begin{cases} ax + by = d_1 & (1-1) \\ cx + dy = d_2 & (1-2) \end{cases}$$

的解为

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D},$$

这里

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b \\ d_2 & d \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a & d_1 \\ c & d_2 \end{vmatrix}.$$

证明　由式(1-1)$\times d$-式(1-2)$\times b$ 得到$(ad-bc)x=dd_1-bd_2$，从而

$$x = \frac{dd_1 - bd_2}{ad - bc} = \frac{D_x}{D};$$

同理

$$y=\frac{ad_2-cd_1}{ad-bc}=\frac{D_y}{D}.$$

2. 三阶行列式

引例2 若定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

则可证明三元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & (1-3) \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 & (1-4) \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 & (1-5) \end{cases}$$

的解

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D},\quad z=\frac{D_z}{D}\quad (D\neq 0),$$

这里

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

证明 在式(1-3)，式(1-4)中视 z 为常数去解 x 和 y 得到

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\cdot x=\begin{vmatrix} d_1-c_1z & b_1 \\ d_2-c_2z & b_2 \end{vmatrix} \tag{1-6}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\cdot y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1-c_1z \\ a_2 & d_2-c_2z \end{vmatrix} \tag{1-7}$$

式(1-5)两边同乘 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$；**再将式(1-6)、式(1-7)代入，化简得到**

$$\left(a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)\cdot z$$

$$=a_3\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}+d_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

这就是 $D \cdot z = D_z$，从而

$$z = \frac{D_z}{D};$$

同理,可得另外两式

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}$$

在此，我们自然会猜到以上的公式能够一般化，但这要定义四阶和四阶以上的行列式. 这正是下一节的内容.

三阶行列式可按图 1.1 所示的对角线法则计算.

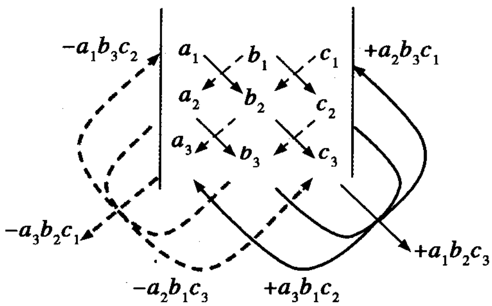

图 1.1

例 1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 由对角线法则,

$$\begin{aligned} D &= 1 \times 2 \times 2 + (-2) \times 1 \times 3 + 2 \times 0 \times 3 \\ &\quad - 3 \times 2 \times 3 - (-2) \times 2 \times 2 - 1 \times 0 \times 1 \\ &= -12. \end{aligned}$$

习题 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$.

2. 利用行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 5x+2y=3 \\ 4x+2y=1 \end{cases}$；　　(2) $\begin{cases} 2x-4y+z=1 \\ x-5y+3z=2 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$.

3. 验证下列等式，并归纳出三阶行列式的性质：

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+ka_1 & b_2+kb_1 & c_2+kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} a_1+x_1 & b_1+y_1 & c_1+z_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

4. 令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

化简下列两式，并找出规律：

(1) $a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$;

(2) $a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}-a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}+a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

1.2 n 阶行列式

1. 三阶行列式的特点

本节我们要定义任意 n 阶行列式，为此我们观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

的特点：

(1) 行列式为 3! 个单项式的和，每个单项式为 $\pm a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$;

(2) 排列 $p_1p_2p_3$ 取遍 1, 2, 3 的所有全排列；

(3) 当排列 $p_1p_2p_3$ 为 123, 231, 312 时，单项式的系数为 $+1$；当排列 $p_1p_2p_3$ 为 321, 213, 132 时，单项式的系数为 -1.

那么两组排列 123, 231, 312 和 321, 213, 132 的什么区别决定了 ±1？若数字 $a>b$，我们称数对 ab 为逆序对，则我们发现：

(1) 排列 123, 231, 312 中逆序对的个数为偶数；

(2) 排列 321, 213, 132 中逆序对的个数为奇数.

鉴于这样的发现，我们下面不难给出 n 阶行列式的定义.

2. n 元排列

n 元排列：由数字 $1, 2, \cdots, n$ 构成的不重复全排列称为(一个) **n 元排列**. 一切 n 元排列的

集合记为 A_n，此集合有 $n!$ 个元素.

例如，

$$A_2 = \{12, 21\}, \quad A_3 = \{123, 132, 213, 312, 321\}.$$

排列的逆序数：设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为任意一个 n 元排列，数字 i 的前面有 t_i 个数字大于 i，则称

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n) \equiv t_1 + t_2 + \cdots + t_n$$

为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

例如，

$$\tau(2431) = 3+0+1+0 = 4, \qquad \tau(4231) = 3+1+1+0 = 5.$$

排列的奇偶性：若 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为奇(偶)数，则称 $p_1p_2\cdots p_n$ 为**奇(偶)排列**.

例如，2431 为偶排列，4231 为奇排列.

对换：在一个排列中对调其中的两个数字，而保持其余的数字不变，这种过程称为**对换**；对换两个相邻的数字称为**相邻对换**.

命题 1.1 **若 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t$，则经过 t 次相邻对换，可将排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 调成 $12\cdots n$.**

证明 数字 1 经过 t_1 次相邻对换调到首位，而这并不改变 $t_i(i=2, 3, \cdots, n)$；数字 2 经过 t_2 次相邻对换调到第 2 位；依此类推，最终排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 经过 $t_1+t_2+\cdots+t_n$ 次，即 t 次相邻对换调成了排列 $12\cdots n$.

命题 1.2 **对换改变原来排列的奇偶性.**

证明 若对换排列的两个相邻的数，排列的逆序数加 1 或减 1，因而奇偶性改变. 现设排列

$$a_1\cdots a_ipb_1\cdots b_jqc_1\cdots c_k \tag{1-8}$$

对换 p，q 两数后调为排列

$$a_1\cdots a_iqb_1\cdots b_jpc_1\cdots c_k. \tag{1-9}$$

这个过程可分解为：排列式(1-8)先经过 $j+1$ 次相邻对换调为排列

$$a_1\cdots a_ib_1\cdots b_jqpc_1\cdots c_k; \tag{1-10}$$

排列式(1-10)再经过 j 次相邻对换调为排列式(1-9). 因而排列式(1-8)经过 $2j+1$ 次相邻对换调为式(1-9). 再由证明的前一部分知排列式(1-8)和排列式(1-9)的奇偶性相反.

3. n 阶行列式的定义

定义 1 对给定的 $n\times n$ 个数 $a_{ij}(i, j=1,2,\cdots,n)$，我们称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \equiv \sum_{p_1p_2\cdots p_n\in A_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

为 n **阶行列式**，也可简记为 $|a_{ij}|_n$；称 a_{ij} 为行列式(第 i 行第 j 列)的元素.

评注：(1) $|a_{ij}|_n$ 是一个数值，在定义上它是 $n!$ 项单项式的和，其中一般项 $\pm a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的每个因子来自此行列式的不同的行和不同的列；

(2) 由此定义，二阶和三阶行列式与前面所定义的一致.

命题 1.3　上三角行列式(当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明　由定义，在此行列式的一般项 $\pm a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中，若 $p_n\neq n$，则 $a_{np_n}=0$，此项为0. 在 $\pm a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-1,p_{n-1}}a_{nn}(p_{n-1}\leqslant n-1)$ 中，若 $p_{n-1}\neq n-1$，则此项也为0. 如此继续下去，此行列式的定义式中仅留下了 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，命题成立.

评注：同样可以证明，**下三角行列式(当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$)**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

定理 1.1　行列式和它的转置行列式相等，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明　左边的行列式记为 D，右边的行列式记为 D'，$b_{ij}\equiv a_{ji}$，则

$$D' = |b_{ij}|_n = \sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$$

$$= \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

将 $a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$ 等值改写为 $a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$ 时，前者的行指标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 被调成排列 $12\cdots n$；同时，其列指标排列 $12\cdots n$ 被调成排列 $q_1q_2\cdots q_n$. 由于两个调换过程是同步进行的，故所用相邻对换的个数相同，再由命题 1.1 知

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n) = \tau(q_1q_2\cdots q_n);$$

又当 $p_1p_2\cdots p_n$ 取遍一切 n 元排列后，相应的 $q_1q_2\cdots q_n$ 也取遍一切 n 元排列，从而

$$\begin{aligned} D' &= \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn} \\ &= \sum (-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)} a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} \\ &= |a_{ij}|_n = D. \end{aligned}$$

评注：此定理说明行列式的行和列的地位是平等对称的；对于行列式的行有什么结论，对于列也有相同的结论.

习 题 1.2

1. 求下列排列的逆序数：

(1) 4132；　　(2) 14325；

(3) $n(n-1)\cdots 21$；　　(4) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$.

2. 设 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t$，求 $\tau(p_n\cdots p_2p_1)$.

3. 求 $\sum\limits_{p_1\cdots p_n\in A_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}$ 的值.

4. 写出 5 阶行列式 $|a_{ij}|_5$ 的展开式中含有 a_{11} 和 a_{23} 的所有带负号的项.

5. 用定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & \therefore & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

6. 根据行列式的定义，但不进行完全计算，求 x 的四次多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

中 x^4 和 x^3 的系数.

1.3 行列式的性质

1. 行列式的性质

为了简明，下面仅叙述行列式关于行的性质，关于列也有同样的性质. 这些性质在行列式的计算和理论推导中非常重要.

性质 1　互换行列式的两行，行列式变号，绝对值不变.

证明　为了简明，不妨设第 1 行与第 2 行互换. 由定义，

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n\in A_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{2p_1}a_{1p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$= \sum_{p_1p_2\cdots p_n\in A_n}(-1)^{\tau(p_2p_1\cdots p_n)\pm 1}a_{1p_2}a_{2p_1}\cdots a_{np_n}$$

$$= (-1)\sum_{p_1p_2\cdots p_n\in A_n}(-1)^{\tau(p_2p_1\cdots p_n)}a_{1p_2}a_{2p_1}\cdots a_{np_n}$$

$$= (-1)\sum_{p_2p_1\cdots p_n\in A_n}(-1)^{\tau(p_2p_1\cdots p_n)}a_{1p_2}a_{2p_1}\cdots a_{np_n}$$

$$= (-1)\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 若行列式有两行相同，则此行列式的值为零.

证明 若行列式 $|a_{ij}|_n$ 中有两行相同，我们就交换这两行. 由性质 1 知 $|a_{ij}|_n = -|a_{ij}|_n$，从而 $|a_{ij}|_n = 0$.

性质 2 行列式中任意一行的公因子可提到行列式的外面，即用常数乘行列式相当于用此数乘行列式的任选一行.

证明 为了简明，对第 1 行验证此性质：

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n \in A_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} (ka_{1p_1}) a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

$$= k \sum_{p_1p_2\cdots p_n \in A_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

$$= k \cdot |a_{ij}|_n.$$

推论 若行列式中有两行对应成比例，则行列式的值为零.

证明 将比例数提到行列式之外后，得到一个两行相同的行列式；再由性质 1 的推论知此行列式的值为 0.

性质 3 将行列式的任意一行的各元素乘一个常数，再对应地加到另一行的元素上，行列式的值不变(行等值变换).

证明 不失一般性，设第 1 行乘以 k 加到第 2 行上. 由定义，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & \cdots & a_{2n}+ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} (a_{2p_2} + ka_{1p_2}) \cdots a_{np_n}$$

$$= \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} + \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} (ka_{1p_2}) \cdots a_{np_n}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{(第二个行列式为0)}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

性质 4　行列式具有分行相加性(行列式的加法原理)，即

$$
\begin{vmatrix} x_{11}+y_{11} & x_{12}+y_{12} & \cdots & x_{1n}+y_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

证明　由行列式的定义，很容易验证这个等式.

2. 行列式计算举例

符号说明：我们用 r_i，c_i 分别表示行列式的第 i 行，第 i 列；用 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示第 i 行和第 j 行互换；用 $k \times r_i$ 表示用 k 乘第 i 行；用 $k \times r_i \to r_j$ 表示第 i 行乘 k 加到第 j 行上. 对于列也有同样的符号.

例 1　计算

$$
D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.
$$

解

$$
D \xlongequal[i=2,3,4]{(-i)\times r_1 \to r_i} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \\ 0 & 7 & 10 & 13 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[(-7)\times r_2 \to r_4]{(-2)\times r_2 \to r_3} (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -36 \end{vmatrix}
$$