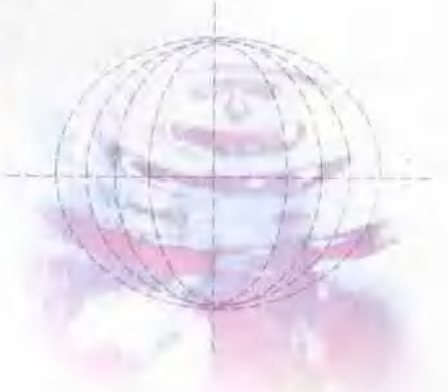
Mathematics

湘教版 普通高中课程标准实验教科书

教师教学用书

数学



选修 2-2 理科

湖南教育出版社

湘教版 普通高中课程标准实验教科书

教师教学用书

数学

选修 2-2 理科

主编：傅晋玖
编者：林 立 黄鹭芳 陈 言 宋建辉
谢能实 王钦敏

湖南教育出版社

湘教版普通高中课程标准实验教科书
教师教学用书
数学选修 2－2（理科）
策划编辑：孟实华
责任编辑：甘　哲
责任校对：杨美云
湖南教育出版社出版发行（长沙市韶山北路 443 号）
网　　址：http：//www. hneph. com
电子邮箱：postmaster@ hneph. com
湖南省新华书店经销　湖南贝特尔印务有限公司印刷
787×1092　16 开　印张：10　字数：250000
2007 年 7 月第 1 版　2007 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 978－7－5355－5251－8
G・5246　定价：16.00元
本书若有印刷、装订错误，可向承印厂调换

编写说明

本书是《普通高中课程标准实验教科书·数学选修 2－2（理科）》的教师教学用书．编写时按教材分章、节安排，每章首先阐述了该章的教学目标、教材说明、课时安排建议、教学建议、评价建议，然后按教材分节编写，每节内容包括教材线索、教学目标、教材分析、教学建议、例题解析、相关链接．在每章的最后给出教材中练习、习题和复习题的参考解答．

编写此书的目的是为了帮助教师更好地把握教材，包括教材线索、教学目标、教材分析、内容结构及教学中应予以关注的重点和难点，所提教学建议及例题解析仅供教师在教学过程中参考．在相关链接中所提供的短文或例题是编者精心编写并与该章、节相关的内容，旨在扩大教师的知识视野，使教师用较高的观点把握教材，不要求学生掌握．

希望本书能成为教师使用教材的好帮手，恳请广大教师在使用过程中提出宝贵意见和建议．谢谢！

编　者

2007 年 6 月

目 录

第 4 章 导数及其应用 …… (1)

4.1 导数概念 …… (8)

4.1.1 问题探索——求自由落体的瞬时速度 …… (8)

4.1.2 问题探索——求作抛物线的切线 …… (11)

4.1.3 导数的概念和几何意义 …… (15)

4.2 导数的运算 …… (20)

4.2.1 几个幂函数的导数 …… (20)

4.2.2 一些初等函数的导数表 …… (22)

4.2.3 导数的运算法则 …… (26)

4.3 导数在研究函数中的应用 …… (30)

4.3.1 利用导数研究函数的单调性 …… (30)

4.3.2 函数的极大值和极小值 …… (33)

4.3.3 三次函数的性质：单调区间和极值 …… (37)

4.4 生活中的优化问题举例 …… (41)

4.5 定积分与微积分基本定理 …… (45)

4.5.1 曲边梯形的面积 …… (45)

4.5.2 计算变力所做的功 …… (50)

4.5.3 定积分的概念 …… (53)

4.5.4 微积分基本定理 …… (59)

教材习题参考解答 …… (67)

第 5 章 数系的扩充与复数 …… (85)

5.1 解方程与数系的扩充 …… (87)

5.2 复数的概念 …… (89)

5.3 复数的四则运算 …… (92)

5.4 复数的几何表示 …… (96)

教材习题参考解答 …… (100)

第6章 推理与证明 …… (102)
6.1 合情推理和演绎推理 …… (106)
6.1.1 归纳 …… (106)
6.1.2 类比 …… (112)
6.1.3 演绎推理 …… (117)
6.1.4 合情推理与演绎推理的关系 …… (122)
6.2 直接证明与间接证明 …… (127)
6.2.1 直接证明：分析法与综合法 …… (127)
6.2.2 间接证明：反证法 …… (132)
6.3 数学归纳法 …… (136)
教材习题参考解答 …… (142)

第 4 章　导数及其应用

一、教学目标

1. 通过对大量实例的分析，经历由平均变化率到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵.

2. 通过函数图象直观地理解导数的几何意义.

3. 能根据导数定义求函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$的导数.

4. 能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数，能求简单的复合函数（仅限于形如 $f(ax+b)$）的导数.

5. 会使用导数公式表.

6. 结合实例，借助几何直观探索并了解函数的单调性与导数的关系；能利用导数研究函数的单调性，会求不超过三次的多项式函数的单调区间.

7. 结合函数的图象，了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件；会用导数求不超过三次的多项式函数的极大值、极小值，以及闭区间上不超过三次的多项式函数最大值、最小值；体会导数方法在研究函数性质中的一般性和有效性.

8. 通过使利润最大、用料最省、效率最高等优化问题，体会导数在解决实际问题中的作用.

9. 通过实例（如求曲边梯形的面积、变力做功等），从问题情境中了解定积分的实际背景；借助几何直观体会定积分的基本思想，初步了解定积分的概念.

10. 通过实例（如变速运动物体在某段时间内的速度与路程的关系），直观了解微积分基本定理的含义.

11. 收集有关微积分创立的时代背景和有关人物的资料，并进行交流；体会微积分的建立在人类文化发展中的意义和价值.

二、教材说明

微积分的创立是数学发展中的里程碑，它的发展和广泛应用开创了向近代数学过渡的新时期，为研究变量和函数提供了重要的方法和手段．导数概念是微积分的核心概念之一，它有极其丰富的实际背景和广泛的应用．在本章中，学生将通过大量实例，经历由平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的过程，理解导数概念，了解导数在研究函数的单调性、极值等

性质中的作用，初步了解定积分的概念，为以后进一步学习微积分打下基础．通过本章的学习，学生将体会导数的思想及其丰富内涵、感受导数在解决实际问题中的作用，了解微积分的文化价值．

本章的重点是了解导数概念的实际背景和几何意义，掌握一些函数的求导方法，利用导数研究函数的单调性，会求不超过三次的多项式函数的极值和在闭区间上的最值，并用导数解决一些优化问题．难点是导数概念，导数与函数单调性的关系，优化问题的数学建模，以及定积分的概念．

本章教材的主要特点是：

1．突出导数概念产生的实际背景．

教材通过大量实例，让学生经历由平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的过程，从中理解导数概念．教材中没有出现函数极限的形式化定义，并且默认基本初等函数在其定义域内处处可导，这样处理教材，既回避了极限理论的难点，又让学生体会到导数的思想及其内涵，掌握微积分的基本方法．

2．突出导数的工具作用，增强导数的应用意识．

历史上，微积分就是伴随着物理学和数学的研究需要应运而生的．用微积分的方法，成千上万的问题被一举突破．教材在介绍了导数的概念和运算后，着重探讨导数在研究函数的单调性、极值、最值中的工具作用，并进一步将导数应用于解决生活中的优化问题，如利润最大、用料最省、效率最高等问题，反映出数学的应用价值．

3．注重数学思想方法的渗透．

本章教材包含着丰富的数学思想方法，例如从具体到抽象、从有限到无限的转化思想，函数的思想，数形结合的思想等等，通过这些数学思想方法的渗透，提高学生的数学思维品质，有助于学生对客观事物中隐含的数学模式进行思考和做出判断，形成理性思维．

4．本章注重数学与文化的联系．

微积分的创立是人类科学文化史上的一件大事，是数学发展中的一座里程碑，它的发展与应用标志着近代数学时期的到来．恩格斯认为，微积分的发现是人类精神的伟大胜利．教材粗略地再现了微积分发现、发展的历史进程，有助于学生了解数学对推动社会发展的作用，了解数学的科学思想体系和美学价值，了解数学家的创新精神，逐步形成正确的数学观．

三、课时安排建议

本章教学时间约需 **24** 课时，具体分配如下（仅供参考）：

4.1　导数概念

4.1.1	问题探索——求自由落体的瞬时速度	1 课时
4.1.2	问题探索——求作抛物线的切线	1 课时
4.1.3	导数的概念和几何意义	2 课时

4.2　导数的运算

4.2.1　几个幂函数的导数　1 课时

4.2.2　一些初等函数的导数表　1 课时

4.2.3　导数的运算法则　2 课时

4.3　导数在研究函数中的应用

4.3.1　利用导数研究函数的单调性　2 课时

4.3.2　函数的极大值和极小值　1 课时

4.3.3　三次函数的性质：单调区间和极值　2 课时

4.4　生活中的优化问题举例　2 课时

4.5　定积分与微积分基本定理

4.5.1　曲边梯形的面积　1 课时

4.5.2　计算变力所做的功　1 课时

4.5.3　定积分的概念　2 课时

4.5.4　微积分基本定理　2 课时

小结与复习　3 课时

四、教学建议

1．对导数概念的教学应注意从实例出发，并且只要求学生“了解”导数的概念．教材通过运动物体瞬时速度概念的建立及计算方法得出：运动物体在任意时刻 t 的瞬时速度 $v(t)$ 就是平均速度 $v(t,\ d)=\dfrac{f(t+d)-f(t)}{d}$ 在 d 趋于 0 时的极限．又用割线的斜率 $k(u,\ d)=\dfrac{f(u+d)-f(u)}{d}$ 在 d 趋于 0 时的极限 $k(u)$ 作为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(u,\ f(u))$ 处的切线的斜率．由上述实例抽象出导数的概念：差商（平均变化率）$\dfrac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ 在 d 趋于 0 时的极限称为函数 f 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$．教材没有出现导数和极限的精确定义，而是通过实例让学生体会极限的思想，了解导数的实质：导数即函数的瞬时变化率．

导数的几何意义是：函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数值 $f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,\ f(x_0))$ 处的切线的斜率．要区别“在点 P 处的切线”与“过点 P 的切线”．在点 P 处的切线，P 点是切点，若切点 P 坐标为 $(x_0,\ y_0)$，则切线方程为：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$．过点 P 处的切线，P 点可以是切点，也可以不是切点．光滑曲线在其上一点处的切线只有一条，而过其上一点处的切线可以不止一条．曲线的切线与曲线可以有不止一个公共点．

2．导数的运算重点在于熟记教材给出的基本初等函数的导数公式，掌握导数的四则运算法则及形如 $f(ax+b)$ 的简单复合函数的求导．几个幂函数的导数的计算只是为了复习导数的定义，它们都已包含在公式 $(x^a)'=ax^{a-1}$ 中，不必花费太多的时间．重点应放在学生

较难掌握的求导法则：$(f(x)g(x))'=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$，$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f(x)g'(x)-g(x)f'(x)}{f^2(x)}$及$(f(ax+b))'=af'(ax+b)$. 以上各个导数公式及求导法则的推导都涉及函数极限的运算，不要求学生掌握．可让学生适当多做一些简单函数的求导题，尤其是如$y=x\tan(\pi x-1)$，$y=\frac{\sin(1+2x)}{x}$一类综合应用求导公式和法则的函数的求导问题，使学生在应用中熟记求导公式与法则.

3. 导数在研究函数中的应用突出显示了导数的工具作用．教学时应把重点放在导数符号与函数增减性的关系和函数极值的求法，特别是利用导数求三次函数的单调区间和极值上.

首先应启发学生观察同一坐标系中函数$f(x)$的图象与导函数$f'(x)$的图象之间的关系，从中发现、归纳出导数符号与函数增减性的关系．教材用导数取代差分来解释利用导数的正负判断函数增减性的法则，这是因为必修中是用差分来定义函数的增减性．如果用传统教材中单调性的定义，如对某一区间(a, b)内的任意两点x_1，x_2，当$x_1<x_2$，都有$f(x_1)<f(x_2)$，则称$f(x)$是(a, b)内的增函数，可以这样解释：记$h=x_2-x_1$，因为$x_1<x_2$，所以$h>0$，“$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}>0$”与“当$x_1<x_2$，都有$f(x_1)<f(x_2)$”是等价的．不过差分$h>0$并不能保证导数$f'(x)>0$（只能推出导数$f'(x)\geqslant 0$）．我们的结论是：在某个区间内，若$f'(x)>0$，则函数递增；若$f'(x)<0$，则函数递减.

4. 函数的极值是函数的局部性质，函数的最值是函数的整体性质．教材用函数$f(x)$在某个开区间(u, v)上的最大值（最小值）来定义$f(x)$的一个极大值（极小值），这个极大值（极小值）只是$f(x)$在含极值点的区间(u, v)上的最大值（最小值），并不一定就是$f(x)$在整个定义域上的最大值（最小值）．同时，极大值不一定大于极小值，极小值也不一定小于极大值．这些都可以让学生通过观察函数的图象得到直观的认识.

按照函数极值的定义，若在区间(u, c)上$f'(x)>0$，在区间(c, v)上$f'(x)<0$，则$f(x)$在区间$(u, c]$上递增，在区间$[c, v)$上递减，从而$f(x)$在$x=c$处取得极大值．反之，若在区间(u, c)上$f'(x)<0$，在区间(c, v)上$f'(x)>0$，则$f(x)$在区间$(u, c]$上递减，在区间$[c, v)$上递增，从而$f(x)$在$x=c$处取得极小值．由导数的正负确定函数的增减性，又由函数的增减变化确定函数的极值和极值点，这就是用导数判断函数极值的方法.

基本初等函数在其定义域内都是连续的、可导的．导数的符号在极值点左右从正变负或从负变正必定要经过导数等于0的时刻，因此在极值点$x=c$处必有$f'(c)=0$．但是$f'(c)=0$只是$x=c$是函数极值点的必要条件，而不是充分条件，还要看导数在$x=c$的两侧是否变号.

5. 特别注重用导数研究三次函数的性质.

三次函数分成两类：

一类导函数非负（非正），即导函数的 $\Delta\leqslant 0$，相应的三次函数在 $\mathbf{R}$ 上单调递增（递减）；没有极值点，图象与 x 轴只有一个交点（三次方程只有一个解）.

另一类导函数的 $\Delta>0$，相应的三次函数有两个极值点（一个极大值，一个极小值），三个单调区间（两增一减，或两减一增）. 当极大值 <0 或极小值 >0 时，图象与 x 轴只有一个交点（三次方程只有一个解）；当极大值 $=0$ 或极小值 $=0$ 时，图象与 x 轴有两个交点（三次方程有两个解）；当极大值 >0 且极小值 <0 时，图象与 x 轴有三个交点（三次方程有三个解）.

如图 4－1 所示.

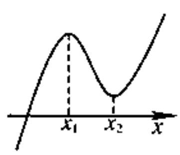
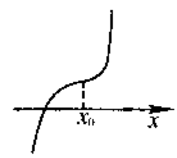
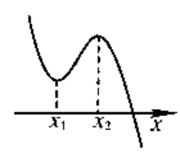
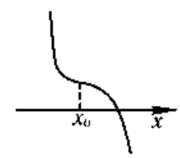
三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$（$a\neq 0$）的图象（$\Delta=4(b^2-3ac)$）			
$a>0$		$a<0$	
$\Delta>0$	$\Delta\leqslant 0$	$\Delta>0$	$\Delta\leqslant 0$
			

图 4－1

研究三次函数的性质一定要结合其导函数（二次函数）的图象，找出导函数的零点及正值区间和负值区间，从而确定三次函数的单调区间和极值点、极值，进而大致画出三次函数的图象，这样对三次函数的性质就认识得十分清楚了.

三次函数在其定义域（$-\infty$，$+\infty$）上没有最大值和最小值. 如果有极值，则只有一个极大值和一个极小值，并且极大值总是大于极小值. 在确定的闭区间 $[a, b]$ 上，三次函数一定有最大值和最小值. 只要先求出三次函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的所有极值（极大值或极小值），再与两个端点值 $f(a)$，$f(b)$ 比较，其中最大的就是最大值，最小的就是最小值.

6. "生活中的优化问题举例"一节是导数的具体应用问题，教材通过值利润最大、用料最省、效率最高等优化问题的解决，让学生体会导数在解决实际问题中的工具作用.

解决此类优化问题，首先要指导学生认真读题，正确理解题意，找出题目中出现的各个已知量和未知量，分析它们之间的函数关系，进而写出目标函数. 这个过程体现了函数和方程的思想以及数学建模思想. 写出正确的目标函数后，实际问题转化为数学问题：求函数的最大值或最小值. 相比以前所用的求最值的特殊方法，如判别式法、均值不等式法、线性规划法、二次函数配方法等，导数是更有力的工具，是更具普遍性的通性通法.

正如以上所说，求函数在一个区间上的最值，要先求出函数在这个区间内的所有极值，再与端点处的函数值比较，从而确定函数的最大值或最小值. 如果函数在我们所讨论的区间（开或闭或半开半闭）内只有一个极值，那么极大值就是最大值，极小值就是最小值，此时最值不会在端点处取到.

求出目标函数的最值后，要回到实际问题中去，对我们得到的数学问题的结果作出实际意义的解释.

7. 定积分的概念是教学中的一个难点，《普通高中数学课程标准（实验）》（以下简称《课标》）只要求“初步了解定积分的概念”. 重点应通过求曲边梯形的面积、变力做功等实例，让学生从问题情景中了解定积分的实际背景，借助几何直观体会定积分的基本思想. 由于缺少极限的必要知识，不可能给定积分作出严格意义上的数学定义. 通过求曲边梯形面积等实例来了解定积分的概念，不但易于被学生接受，也可以让学生经历微积分发现、发展的历程，体会从具体到抽象、从有限到无限以及化整为零、化曲为直等数学思想方法.

教材 4.5.1 节中曲边梯形的面积 $S=\frac{3}{4}$ 的证明较为难懂. 其实只要证明曲线 $y=x^2$（$0\leqslant x\leqslant 1$）和 x 轴之间的曲边形的面积 $Q=\frac{1}{3}$. 仍然把区间 $[0, 1]$ n 等分，记 $x_0=0$，$x_1=\frac{1}{n}$，$x_2=\frac{2}{n}$，$x_3=\frac{3}{n}$，…，$x_{n-1}=\frac{n-1}{n}$，$x_n=1$，则

$$
\begin{aligned}
Q(n)&=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2)d\\
&=\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\\
&=[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\cdot\frac{1}{n^3}.
\end{aligned}
$$

利用 $(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$，

得到 $3k^2=(k+1)^3-k^3-3k-1$，

所以

$$
\begin{aligned}
&3\cdot 1^2=2^3-1^3-3\cdot 1-1,\\
&3\cdot 2^2=3^3-2^3-3\cdot 2-1,\\
&3\cdot 3^2=4^3-3^3-3\cdot 3-1,\\
&\cdots\cdots\\
&3(n-1)^2=n^3-(n-1)^3-3(n-1)-1.
\end{aligned}
$$

将以上各式相加，得

$$3[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]=n^3-n-3[1+2+3+\cdots+(n-1)].$$

注意到

$$
\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+(n-1)&=\frac{1}{2}[1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+(n-1)+\\
&\qquad(n-2)+\cdots+1]\\
&=\frac{1}{2}n(n-1),
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
3[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]&=n^3-n-\frac{3}{2}n(n-1)\\
&=\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n),
\end{aligned}
$$

$$Q(n)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2n^3-3n^2+n}{n^3}=\frac{1}{3}-\frac{3n-1}{6n^2},$$

$$\left|Q(n)-\frac{1}{3}\right|=\frac{3n-1}{6n^2}<\frac{1}{n}.$$

又因为 $|Q-Q(n)|<\frac{1}{n}$，所以$\left|Q-\frac{1}{3}\right|<\frac{2}{n}$.

当 n 充分大时，$\frac{2}{n}$ 可以小于任何给定的正数，这表明$\left|Q-\frac{1}{3}\right|$比任何一个正数都小，因此 $Q=\frac{1}{3}$，从而 $S=Q+1=\frac{4}{3}$.

8. 积分是微分的逆运算．利用微积分基本定理计算函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，关键是找到一个函数 $F(x)$，满足 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微并且 $F'(x)=f(x)$，则 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$．这里 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个"原函数"．连续函数 $f(x)$ 的原函数不是唯一的，因为 $F(x)+c$（c 是常数）的导函数都是 $f(x)$，但这并不妨碍计算 $F(b)-F(a)$．教材只要求会求幂函数的原函数，即若 $f(x)=x^n$，取 $F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$，则 $F'(x)=x^n=f(x)$．又根据导数的运算法则，多项式函数的原函数也会求了．例如 $f(x)=1+x^2$，取 $F(x)=x+\frac{1}{3}x^3$；$v(t)=a+bt$，取 $F(t)=at+\frac{1}{2}bt^2$；$f(x)=\frac{cmM}{x^2}$，取 $F(x)=-\frac{cmM}{x}$（c，m，M 是常数），等等．

五、评价建议

1．重视对学生导数学习过程的评价．

导数一章蕴含着丰富的极限思想，从有限到无限的转化是学生数学学习中继从常量到变量之后的又一次飞跃．《课标》仅要求学生了解导数概念，体会导数的思想内涵，会求简单函数的导数，并将导数工具应用于研究一些简单函数（例如不超过三次的多项式函数）的性质，解决一些实际生活中的优化问题．教材既没有介绍必要的极限知识，也没有给出精确的导数定义，更没有对导数理论作深入的研究，仅仅停留在"了解"、"体会"的层面．因此评价既要注意学生对导数的基本运算、基本方法的掌握，更要重视对学生学习过程的评价，要考查学生能否从实际背景中抽象出导数、积分的初步概念，考查学生能否将导数作为工具应用于研究函数性质、解决实际问题．

2．重视对学生学习能力的评价．

导数一章的学习将十分客观地反映出学生的学习能力，评价中要考查学生能否正确地了解导数的极限思想，理解导数的几何意义，能否自觉地运用导数工具研究函数的性质，能否把实际问题转化为数学问题后正确应用数学知识解决问题．学生对极限思想的了解与体会、对从有限到无限的思维方式的转换肯定表现出很大的差异，有一个长短不一的过程，因此评价中要注意肯定学生学习中的发展与进步、特点与优点．

3．重视对学生学习方法的评价．

导数一章十分注意通过实例让学生了解导数的意义，教学时可以鼓励学生自主学习、合作学习，自己举出一些教材之外的例子，加深对于导数就是瞬时变化率的理解，例如物理中速度对时间的变化率就是加速度；回忆以前研究函数单调性、求函数最值的各种特殊方法并与导数方法比较，从中体会导数的作用．对学生这种既有独立思考，又有合作探究的学习方法适时加以鼓励，努力让学生能在学习中得到成功的体验，促进学生学习能力的发展．

4.1 导数概念

4.1.1 问题探索——求自由落体的瞬时速度

教材说明

教材从伽利略发现自由落体的运动定律的例子入手，通过了解牛顿计算瞬时速度的思维方式，结合具体事例，向学生渗透了“由近似到精确”，“由有限到无限”的极限思想方法，并给出了瞬时速度的数学概念及其计算方法．

教学目标

（一）知识与技能

1．能够求解变速运动物体的瞬时速度．

2．初步了解导数的意义．

（二）过程与方法

1．通过实例，了解瞬时速度与平均速度的辩证关系，体会用极限思想研究变量的思维方法．

2．在学习过程中，培养学生思维的严谨性和语言表达能力．

（三）情感、态度与价值观

以学生为主体进行教学设计，让学生有机会参与创新、发现，真正成为学习的主体．

教材分析

1．重点

(1) 瞬时速度的概念；

(2) 瞬时速度的计算方法.

2. 难点

(1) 用数学语言准确描述瞬时速度；

(2) 正确使用极限思想方法求解变速运动物体的瞬时速度；

(3) 对导数概念的初步了解.

3. 对“瞬时速度”概念的理解

我们在物理学中学习直线运动的速度时，曾涉及过瞬时速度的一些知识. 物理教材中首先指出，运动物体经过某一时刻（或某一位置）的速度，叫作瞬时速度，然后从实际测量角度，结合汽车速度计的使用，对瞬时速度做了说明.

为了让大家更好地理解瞬时速度，物理教材有如下的阐述：

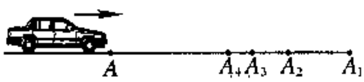


图 4－2

图 4－2 表示一辆做变速运动的汽车，我们要确定汽车经过 A 点时的瞬时速度. 从 A 点起取一小段位移 AA_1，求出汽车在这段位移上的平均速度，这个平均速度可以近似地表示汽车经过 A 点时的快慢程度. 从 A 点起所取的位移越小，比如取 AA_2，AA_3，AA_4 等，汽车在该段时间内的速度变化就越小，所得的平均速度就越能较精确地描述汽车经过 A 点的快慢程度. 当位移足够小（或时间足够短）时，测量仪器就已经分辨不出匀速运动与变速运动的差别，可以认为汽车在这段时间内运动是匀速的，所得的平均速度就等于汽车经过 A 点的瞬时速度了.

物理课上对瞬时速度只给出了直观的描述，有了极限的工具后，才能给瞬时速度以精确的定义. 本节是由物体在一段时间内运动的平均速度的极限来定义瞬时速度的.

4. 关于极限法

所谓极限法，是指用极限概念分析问题和解决问题的一种数学方法. 极限法的一般步骤可概括为：对于被考察的未知量，先设法构思一个与它有关的变量，确认这个变量通过无限过程的结果就是所求的未知量，最后用极限计算来得到所要的结果. 极限法不同于一般的代数方法，代数中的加、减、乘、除等运算都是由两个数来确定另一个数，而在极限法中则是由无限个数来确定一个数.

正如坐标法是解析几何的基本方法一样，极限法是微积分的基本方法，微积分中的一系列重要概念，如：函数的连续性，导数以及定积分等都是借助于极限法定义的. 如果要问“微积分是一门什么学科”，那么可以概括地说：“微积分是用极限法来研究函数的一门学科.”

本节的难点是对导数概念的理解. 导数的概念比较抽象，其定义方法学生也不大熟悉. 而在高中阶段，没有必要在导数与微分概念的严谨性，知识的系统性上花过多的时间与精

力. 所以在本小节的教学中，应结合大量的“非匀速直线运动物体的瞬时速度”的实际背景，从物理学方面入手，引导学生感受极限法思想，让学生掌握运用定义求解非匀速直线运动物体的瞬时速度，从而为后续学习中能够理解导数概念打好基础.

例 运动员从 10 m 高台跳水时，从腾空到进入水面的过程中，不同时刻的速度是不同的. 设起跳 t s 后运动员相对于水面的高度为 $H(t)=-4.9t^2+6.5t+10$，用代数推导方法计算在 2 s 时运动员的速度（瞬时速度），再用数值计算列表观察检验计算的结果.

分析 首先，我们可以从物理学的角度来看瞬时速度，知道运动物体经过某一时刻（或某一位置）的速度，叫作瞬时速度. 那么，如何考虑这一时刻（或这一位置）的时间与位移呢？这在常量数学中显然是无能为力的. 为此，我们采用逼近的思想方法，先求第 2 s 末到第（$2+d$）s 末的平均速度$\overline{v_2}$，然后将其作为第 2 s 末的瞬时速度的近似值，随着 d 的缩小，近似值的精确度在提高（即第 2 s 末到第（$2+d$）s 末的时间间隔在缩小，也就是$\overline{v_2}$与第 2 s 末的瞬时速度的误差在缩小）. 当 d 趋于 0 时，这个误差也趋于 0. 所以，我们可以很自然地将$\overline{v_2}$的极限值作为第 2 s 末的瞬时速度. 这种方法学生初次接触，为了能让学生更好地理解，教学过程中要将“逼近”的过程展现给学生，如本题在求 2 s 左右的平均速度时，分别将时间间隔取为 0.1，0.01，0.001，0.000 1，0.000 01，并将结果列表. 这样做，一方面有利于比较，另一方面则让学生得到对极限法思想的直观感受. 同时教材中给出了求瞬时速度的书写格式，要求学生通过模仿练习掌握利用定义求解的基本格式.

第二次数学危机

17 世纪由牛顿和莱布尼茨建立起来的微积分学，由于在自然科学中的广泛应用，揭示了许多自然现象，而被高度重视. 但在持续的一二百年内，这门科学却缺乏令人信服的严格的理论基础，存在着明显的逻辑矛盾. 例如：对于 $y=x^2$ 而言，根据牛顿的流数计算法，有：

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^2, \quad ①$$

$$x^2+\Delta y=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2, \quad ②$$

$$\Delta y=2x\Delta x+(\Delta x)^2, \quad ③$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x, \quad ④$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x. \quad ⑤$$

在上面的推导过程中，从③到④，要求 Δx 不等于零，而从④到⑤，又要求 Δx 等于零.

正因为在无穷小量中存在着这种矛盾，才引起当时颇具影响的红衣大主教贝克莱对无穷小量的抨击. 1734 年贝克莱在其所著的一本书名为《分析学家》的小册子里说，Δx 为“逝去的鬼魂”. 意思是说，在微积分中有时把 Δx 作为零，有时又不为零，自相矛盾. 贝克莱的指责，在当时的数学界中引起混乱，这就是第二次数学危机的爆发.

在无穷小量的危机中，无穷小量顶住了各种形式的责难，以自己不可取代的应用优势发挥着巨大的作用. 经过了一个多世纪之后，最终在以零为极限的序列中找到了位置. 从 19 世纪下半叶开始，极限理论逐渐取代了无穷小量的方法，并且在分析基础理论中具有统治地位，这样自然而然地解决了第二次数学危机.

4.1.2 问题探索——求作抛物线的切线

本小节从大家所熟悉的斜抛、平抛运动的轨迹入手，通过探求抛物线的切线的做法，结合具体事例，向学生渗透了“由近似到精确”，“由有限到无限”的极限思想方法，并给出了连续曲线在某一点处切线斜率的求法.

（一）知识与技能

1. 了解过曲线上一点的切线与曲线割线之间的辩证关系.

2. 能够求解过曲线上一点切线的斜率.

（二）过程与方法

1. 借助超级画板，直观了解过曲线上一点切线的实际意义.

2. 通过实例，了解曲线的切线与割线的辩证关系，体会用极限思想研究变量的思维方法.

（三）情感、态度与价值观

1. 养成用联系变化的观点和应用数学的意识.

2. 培养自身的创新意识和不断探求新问题的能力.

1. 重点

（1）曲线的切线的概念；