

关于地基应力、沉降计算方法的研究

陕西省冶金勘察设计院 王耀杰



陕西省科技交流站

关于地基应力 沉陷计算方法的研究

陕西省冶金勘文设计院

王耀杰

江苏工业学院图书馆
藏书章

陕西省科技交流站

一九七七年十月

目 录

引言.....	(1)
R. 明德林 (Mindlin) 空间课题的简介	(3)
圆形的均布荷载域作用在地基内部时的情况	(5)
环形均布荷载域作用在地基内部时的情况	(11)
矩形均布荷载域作用在地基内部时的情况	(12)
沉降的计标实例	(20)
附表 (一) —1, 2, 3	(23)
附表 (二) —1, 2, 3	(62)
结束语	(98)
主要参考文献	(99)

引 言

到目前为止, 计算地基的变形是以弗拉曼 (Flamant) 以及布西奈斯克 (Boussinesq) 关于土体中应力分布的平面课题和空间课题为依据的, 这些课题的解答是假定荷载作用在弹性半空间体的表面上 (地面上) 的。然而通常建筑物或构筑物的基础总是要有埋深的, 特别是对于一些高大建筑, 桥梁建筑, 水坝建筑, 码头建筑以及矿山建设等, 都要求将建筑物和构筑物的基础埋置在地基内部较深处。可是迄今为止, 设计工作者在设计这些深埋基础时, 仍然是以布西奈斯克, 弗拉曼理论为根据的。这样一来, 由于无埋深的理论不能正确的反映具有埋深的客观实际, 再加上地基土其它物理力学参数的不准确, 所以常常反映在设计效果上偏于保守, 即沉降的理论计算值远较实际观测值大, 特别对一些深埋基础更甚。为了解决这一问题, 国内外许多工程技术人员及土力学工作者进行了多方面的研究。比如苏联学者 К.Е.ЕГОРОВ, С.С.давыдов 等曾建议用有限厚度的压缩图式代替匀质弹性半无限体图式, 他们的结论是: 当这一虚拟层的厚度为 $13\sim 15^M$ 时, 计算结果与实际观测值相当接近。又如西德学者 Т.К.клеин 及 К.Фишер 建议采用变形模量随深度增大的计算模型……。总之, 关于变形 (沉降) 随基础的埋置深度衰减的原因目前在世界各国有很多假定, 由于篇幅关系, 这里不一一引论。

众所周知, 地基的沉降变形 W 主要是应力 σ 和形变模量 E 的函数, 即 $W = f(\sigma \cdot E)$ 。由这种观点出发, 我们认为 Т.К.клеин、К.Фишер 的建议从土体的基本物理力学参数的观点来说是有一定道理的。关于这个问题本文不去论及。在这里, 我们研究一下地基中的应力 σ 的变化规律, 进而研究由于应力 σ 的分布对地基沉陷的影响。

早在 1936 年, 美国学者, 明德林 (Mindlin) 已经推导出了集中荷载作用在半无限体内部时, 地基中应力和沉降的解。后来, 也曾有人主张用明德林理论来确定地基中应力和沉降, 在第二次世界大战以前, 英国建筑研究院 (Building Research Station) 在这一方面曾进行了一些必要的分析和计算, 但其结果一直未予发表。后来 1948 年在荷兰鹿特丹召开的第二届国际土力学会议上, 该院学者福克斯 (E.N.FOX) 发表了以明德林公式为基础, 计算矩形基础平均弹性沉降量的公式, 并对于 $\mu = 0.5$ 情况时, 制备了图表, 以便实用。1957 年, 我国华东水利学院徐志英同志发表了“以明德林 (Mindlin) 公式为根据的地基中垂直应力的计算公式”, 在该论文中求出了当地基内部作用着矩形均布荷载, 条形均布荷载时, 地基中的应力表达式, 同时还求出了圆形均布荷载作用在地基内部时, 圆心轴上地基中应力的表达式。1958 年徐志英、俞仲泉同志又发表了“深置圆形基础的沉陷计算”一文, 确定出了深置圆形柔性基础中心点和边缘点的沉陷量, 并制作了一些图表。但是由于这些解的数学形式特别复杂, 以及直接引用明德林公式所得的解计算出的沉陷系数还存在着这样或那样的问题, 所以至今, 这些成果还未被应用到工程实践中去。

本文在前人研究的基础上, 也是以明德林公式为依据, 建立并推导出了圆形均布荷载域、

环形均布荷载域作用在地心内部时，地基中应力和沉陷的一般关系式，为了克服诸关系式在求解时数学运算的困难和其运算结果数学表达式的复杂性，我们引用电子计算机的技术，分别算出了矩形、圆形、环形均布荷载作用在地基内部时，地基中应力、沉降的影响系数，并制成了表格，见附表（一）（二）以供参考。

本课题的研究是从1973年开始的，在研究的过程中始终得到了院党委、队党支部的重视，并给予了热情、积极的支持，特别是在“四人帮”对科学技术事业严重干扰和破坏的时期，院党委、队党支部坚持毛主席的革命路线，在物质上，时间上都给予了保证和适当的安排，才使得这一课题的研究顺利进行。

承西安交通大学向隆万同志协助本文的电算工作，在此附笔致谢。在成稿的过程中又得到本院诸同志，华东水利学院徐志英、俞仲泉同志，以及同济大学张守华同志，西安冶金建筑学院张迪民同志的指正，在此一并致谢。并向协助本文附表的抄录，清腾，复核和文中附图复描的同志们致谢。

R·明德林空间课题的简介

当竖向集中力 P 作用于深度为 h 处时, 根据图 (一) 所示的符号, 地基中应力, 沉降的表达式为:

$$\begin{aligned} \sigma_x = & -\frac{P}{8\pi(1-\mu)} \left[\frac{(1-2\mu)(z-h)}{R_1^3} - \frac{3x^2(z-h)}{R_1^5} + \frac{(1-2\mu)[3(z-h)-4\mu(z+h)]}{R_2^3} \right. \\ & - \frac{3(3-4\mu)x^2(z-h)-6h(z+h)[(1-2\mu)z-2\mu h]}{R_2^5} - \frac{3ohx^2z(z+h)}{R_2^7} \\ & \left. - \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2(R_2+z+h)} \left(1 - \frac{x^2}{R_2(R_2+z+h)} - \frac{x^2}{R_2^2} \right) \right] \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = & -\frac{P}{8\pi(1-\mu)} \left[\frac{(1-2\mu)(z-h)}{R_1^3} - \frac{3y^2(z-h)}{R_1^5} + \frac{(1-2\mu)[3(z-h)-4\mu(z+h)]}{R_2^3} \right. \\ & - \frac{3(3-4\mu)y^2(z-h)-6h(z+h)[(1-2\mu)z-2\mu h]}{R_2^5} - \frac{3ohy^2z(z+h)}{R_2^7} \\ & \left. - \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2(R_2+z+h)} \left(1 - \frac{y^2}{R_2(R_2+z+h)} - \frac{y^2}{R_2^2} \right) \right] \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & -\frac{P}{8\pi(1-\mu)} \left[-\frac{(1-2\mu)(z-h)}{R_1^3} + \frac{(1-2\mu)(z-h)}{R_2^3} - \frac{3(z-h)^3}{R_1^5} \right. \\ & - \frac{3(3-4\mu)z(z+h)^2-3h(z+h)(5z-h)}{R_2^5} - \frac{3ohz(z+h)^3}{R_2^7} \left. \right] \\ & \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = & -\frac{Py}{8\pi(1-\mu)} \left[-\frac{1-2\mu}{R_1^3} + \frac{1-2\mu}{R_2^3} - \frac{3(z-h)^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\mu)z(z+h)-3h(3z+h)}{R_2^5} \right. \\ & \left. - \frac{3ohz(z+h)^2}{R_2^7} \right] \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

$$\tau_{xz} = -\frac{px}{8\pi(1-\mu)} \left[-\frac{1-2\mu}{R_1^3} + \frac{1-2\mu}{R_2^3} - \frac{3(z-h)^2}{R_1^5} - \frac{3ohz(z+h)^2}{R_2^7} - \frac{3(3-4\mu)z(z+h)-3h(3z+h)}{R_2^5} \right] \dots\dots\dots (5)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{px \cdot y}{8\pi(1-\mu)} \left[- \frac{3(z-h)}{R_1^3} - \frac{3(3-4\mu)(z-h)}{R_2^3} - \frac{3\alpha h z(z+h)}{R_2^7} + \right. \\ \left. + \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2^3(R_2+z+c)} \left(\frac{1}{R_2+z+h} + \frac{1}{R_2} \right) \right] \dots\dots\dots (6)$$

竖向位移的表达式:

$$W = \frac{P}{16\pi G(1-\mu)} \left[\frac{3-4\mu}{R_1} + \frac{8(1-\mu)^2 - (3-4\mu)}{R_2} + \frac{(z-h)^2}{R_1^3} + \right. \\ \left. + \frac{(3-4\mu)(z+h)^2 - 2hz}{R_3^3} + \frac{6hz(z+h)^2}{R_2^5} \right] \dots\dots\dots (7)$$

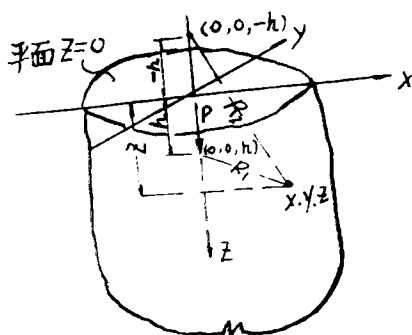
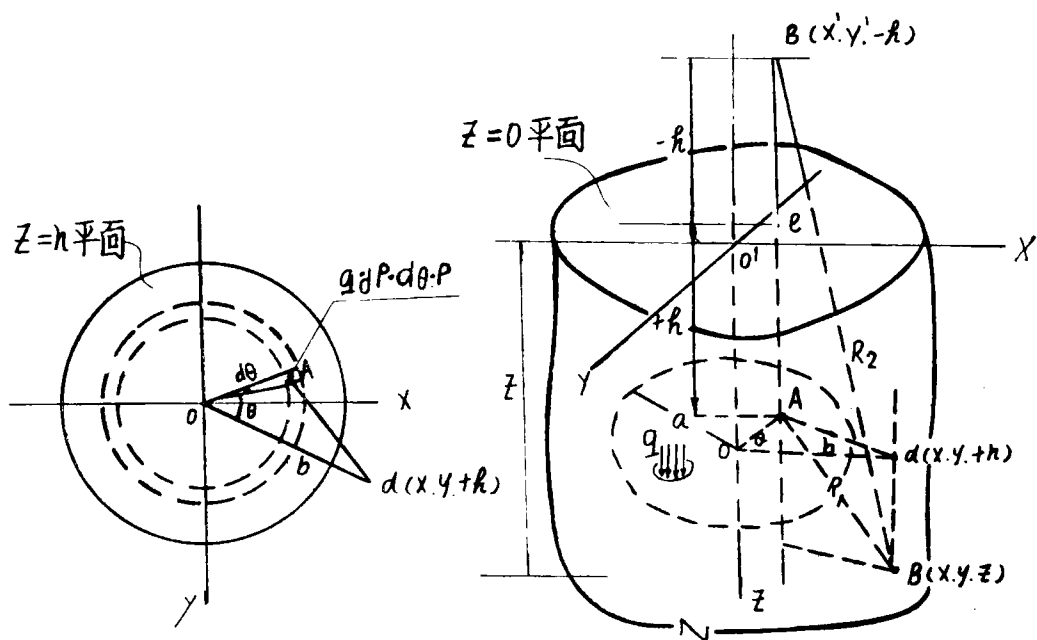


图 (一) 土体内集中力作用略图

圆形的均布荷载域作用在地基内下时的情况

在基础的设计中，在很多情况下需要将圆形的均布荷载埋置在地基内部某一深度处，如图（二）。这时，均布荷载 q 作用在半径为 a ，圆心为 O 的圆面积上，而且这个荷载的圆面积位于距地表以下 h 处的地基内部。要求确定地基中任意点 $\beta(x, y, z)$ 处的应力及位移。



图（二） 圆形荷载域作用在土体内略图

首先通过 $\beta(x, y, z)$ 点作一竖直线，于 $+h$ 平面交于 $d(x, y, +h)$ 点，在 $z = +h$ 的平面内联接 od ，并令 $od = b$ ，然后再通过微面积 $\rho \cdot d\rho \cdot d\theta$ 的形心 A 点作一铅直线 BA ，该线和 $z = 0$ 的地表面交于 e 点，和 $z = -h$ 的平面交于 $B(x', y', -h)$ 点，联接 βA ，令 $\beta A = R_1$ ，联接 βB ，令 $\beta B = R_2$ ，这样以来， A 点处的荷载 $P = q \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta$ ，该荷载对地基 $\beta(x, y, z)$ 点处所产生的应力，沉降可直接引用 $R \cdot$ 明德林的解，但注意这里的 R_1 及 R_2 分别为：

$$R_1 = \sqrt{(z-h)^2 + b^2 + \rho^2 - 2b\rho\cos\theta}$$

$$R_2 = \sqrt{(z+h)^2 + b^2 + \rho^2 - 2b\rho\cos\theta}$$

将 R_1 、 R_2 代入 $R \cdot$ 明德林的诸解中，并按 θ 角由 0 到 2π 范围内积分，再对 ρ 由 0 到 a 范围内积分，即可求得圆形面荷载 q 作用下地基中任意 $\beta(x, y, z)$ 点的应力及位移的表达式，为简便计，这里着重研究竖向应力及位移，其它分量这里不再写出：

$$\sigma_z = -\frac{q}{8\pi(1-\mu)} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho \left[-\frac{(1-2\mu)(z-h)}{[(z-h)^2 + b^2 + \rho^2 - 2b\rho\cos\theta]^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{(1-2\mu)(z-h)}{[(z+h)^2 + \rho^2 + b^2 - 2b\rho\cos\theta]^{3/2}} - \frac{3(z-h)^3}{[(z-h)^2 + b^2 + \rho^2 - 2b\rho\cos\theta]^{5/2}} - \right. \\ \left. - \frac{3(3-4\mu)z(z+h)^2 - 3h(z+h)(5z-h)}{[(z+h)^2 + b^2 + \rho^2 - 2b\rho\cos\theta]^{5/2}} - \right. \\ \left. - \frac{30hz(z+h)^3}{[(z+h)^2 + b^2 + \rho^2 - 2b\rho\cos\theta]^{7/2}} \right] d\rho \cdot d\theta \dots\dots\dots (8)$$

$$W = \frac{q}{16\pi G(1-\mu)} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho \left[\frac{3-4\mu}{[(z-h)^2 + b^2 + \rho^2 - 2b\rho\cos\theta]^{1/2}} + \right. \\ \left. + \frac{8(1-\mu)^2 - (3-4\mu)}{[(z+h)^2 + b^2 + \rho^2 - 2b\rho\cos\theta]^{1/2}} + \frac{(z-h)^2}{[(z-h)^2 + b^2 + \rho^2 - 2b\rho\cos\theta]^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{(3-4\mu)(z+h)^2 - 2hz}{[(z+h)^2 + b^2 + \rho^2 - 2b\rho\cos\theta]^{3/2}} + \frac{6hz(z+h)^2}{[(z+h)^2 + b^2 + \rho^2 - 2b\rho\cos\theta]^{5/2}} \right] \cdot d\rho \cdot d\theta \\ \dots\dots\dots (9)$$

在 (8) 式中, 若令 $b=0$, 然后进行积分, 则可得到在圆心轴上 σ_z 的最终表达式为:

$$\sigma_z = -\frac{q}{4(1-\mu)} \left\{ \frac{(1-2\mu)(z-h)}{[(z-h)^2 + a^2]^{1/2}} - 2(1-\mu) - \frac{(1-2\mu)(z-h)}{[(z+h)^2 + a^2]^{1/2}} + \right. \\ \left. + \frac{(1-2\mu)(z-h)}{z+h} + \frac{(z-h)^3}{[(z-h)^2 + a^2]^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{(3-4\mu)z(z+h)^2 - h(z+h)(5z-h)}{[(z+h)^2 + a^2]^{3/2}} - \right. \\ \left. - \frac{(3-4\mu)z(z+h)^2 - h(z+h)(5z-h)}{(z+h)^3} + \right. \\ \left. + \frac{6hz(z+h)^3}{[(z+h)^2 + a^2]^{5/2}} - \frac{6hz}{(z+h)^2} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

式 (10) 稍加整理, 完全同徐志英同志在 1957 年所求得圆形荷载情况下, 圆心轴上地基

中的应力表达式。

在 (10) 式中, 当 $h=0$ 时, 即可得到荷载作用在地基表面上时, 地基中的应力解, 此解同布西奈斯克的解完全一致。

$$\sigma_z = q \left[1 - \frac{z^3}{[z^2 + a^2]^{3/2}} \right] \dots\dots\dots (11)$$

同理我们令 $h=0$, $b=0$ 代入 (9) 式, 可求得圆形荷载域作用在地面上时, 圆心 O 点处的总位移为:

$$W = \frac{2(1-\mu^2) \cdot q \cdot a}{E} \dots\dots\dots (12)$$

这就充分说明, 由荷载作用在地基表面时布氏所求得解, 仅是同样荷载作用在地基内部时明氏解的特例。

(8) 式和 (9) 式是一个椭圆积分, 无论是数学表达式还是求解技巧方面都是非常复杂, 且难度较大的, 甚至一般的解析解根本无法求出, 过去许多学者所发表的有关论文, 如上所述, 都是在特殊情况下的解。为了克服这一困难, 我们采用电子计算机的技术, 并在 DJS-14 机上分别计算出了应力和沉降的影响系数, 现将计算过程简述如下 (框图及程序从略)。

为方便计, 将 (8) 式和 (9) 式表示成如下形式:

$$\sigma_z = q \cdot c_1 \int_0^\pi \int_0^a \rho \left[\frac{\beta_1}{R_1^3} + \frac{\beta_2}{R_2^3} + \frac{\beta_3}{R_1^5} + \frac{\beta_4}{R_2^5} + \frac{\beta_5}{R_2^7} \right] d\rho \cdot d\theta \dots\dots\dots (8')$$

$$W = \frac{q}{E} \cdot c_2 \int_0^\pi \int_0^a \rho \left[\frac{\alpha_1}{R_1} + \frac{\alpha_2}{R_2} + \frac{\alpha_3}{R_1^3} + \frac{\alpha_4}{R_2^3} + \frac{\alpha_5}{R_2^5} \right] d\rho \cdot d\theta \dots\dots\dots (9')$$

$$\text{式中 } c_1 = \frac{1}{4\pi(1-\mu)}; \quad c_2 = (1+\mu) \cdot c_1, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)};$$

$$\beta_1 = (1-2\mu)(z-h);$$

$$\beta_2 = -(1-2\mu)(z-h);$$

$$\beta_3 = 3(z-h)^3$$

$$\beta_4 = 3(3-4\mu)z(z+h)^2 - 3h(z+h)(5z-h);$$

$$\beta_5 = 30hz(z+h)^3;$$

$$\alpha_1 = 3-4\mu;$$

$$\alpha_2 = 8(1-\mu)^2 - (3-4\mu);$$

$$\alpha_3 = (z-h)^2;$$

$$\alpha_4 = (3-4\mu)(z+h)^2 - 2hz;$$

$$\alpha_5 = 6hz(z+h)^2;$$

$$R_1, R_2, \text{同前};$$

现设圆形荷载域半径 $a = 1$ ，对于 (8') 和 (9') 二式我们研究如下类形积分的计算，

$$I(b, Z, n) = \int_0^1 \int_0^\pi \frac{\rho \cdot d\rho \cdot d\theta}{[z^2 + b^2 + \rho^2 - 2b\rho \cos\theta]^{\frac{1}{2} + n}} \dots\dots\dots (13)$$

对于 $b = 0$ 的特殊情况，⑬式可直接积分，

$$I(o, z, n) = \int_0^1 \int_0^\pi \frac{\rho \cdot d\rho \cdot d\theta}{(z^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2} + n}} = \pi \int_0^1 \frac{\rho \cdot d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2} + n}}$$

$$\therefore I(o, z, o) = [(z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - z]\pi$$

$$I(o, z, 1) = \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{(z^2 + 1)^{1/2}} \right] \pi$$

$$I(o, z, 2) = \left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z^2 + 1)^{3/2}} \right] \frac{\pi}{3}$$

$$I(o, z, 3) = \left[\frac{1}{z^3} - \frac{1}{(z^2 + 1)^{5/2}} \right] \frac{\pi}{5}$$

记 $I_i(z) = I(o, z, i)$

则 (3') (9') 式可写成如下形式：

$$\sigma_z = q \cdot c_1 \cdot [\beta_1 I_1(z-h) + \beta_2 I_2(z+h) + \beta_3 I_2(z-h) + \beta_4 I_2(z+h) + \beta_5 I_3(z+h)] = q \cdot k \sigma \dots\dots\dots (14)$$

式中：

$$k \sigma = c_1 [\beta_1 I_1(z-h) + \beta_2 I_2(z+h) + \beta_3 I_2(z-h) + \beta_4 I_2(z+h) + \beta_5 I_3(z+h)] \dots\dots\dots (14)$$

$$W = \frac{q}{E} \cdot 1000 \cdot c_2 \cdot [\alpha_1 I_o(z-h) + \alpha_2 I_o(z+h) + \alpha_3 I_1(z-h) + \alpha_4 I_1(z+h) +$$

$$+ \alpha_5 I_2(z+h)] = \frac{q}{E} \cdot 1000 \cdot K_w \dots\dots\dots (15)$$

式中：

$$K_w = c_2 [\alpha_1 I_o(z-h) + \alpha_2 I_o(z+h) + \alpha_3 I_1(z-h) + \alpha_4 I_1(z+h) + \alpha_5 I_2(z+h)] \dots\dots\dots (15')$$

式 (14') (15') 就是基础中心轴线上，地基中应力和沉降的影响系数的表达式。

当 $b \neq 0$ 时，对于 θ 是椭圆积分，我们采用先对 ρ 积分，然后用变步长的辛普生积分程序，计算 (13) 式的近似值，精确到小数后第四位数字。

对于 ρ 积分，可用以下积分公式：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(2cx + b + 2\sqrt{c} \sqrt{a + bx + cx^2})$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} &= \frac{1}{c} \sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \\
\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{3/2}} &= \frac{2(2cx+b)}{(4ac-b^2)\sqrt{a+bx+cx^2}} \\
\int \frac{xdx}{(a+bx+cx^2)^{3/2}} &= \frac{-1}{c \cdot (a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{3/2}} \\
\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{n+\frac{1}{2}}} &= \frac{2(2cx+b)}{(2n-1)(4ac-b^2)(a+bx+cx^2)^{n-\frac{1}{2}}} + \\
&+ \frac{8(n-1)c}{(2n-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{n-\frac{1}{2}}} \\
\int \frac{x \cdot dx}{(a+bx+cx^2)^{n+\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{(1-2n) \cdot c \cdot (a+bx+cx^2)^{n-\frac{1}{2}}} - \\
&- \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{n+\frac{1}{2}}} .
\end{aligned}$$

并记

$$\begin{cases}
L = \sqrt{z^2 + b^2} \\
M = b \cdot \cos \theta \\
N = \sqrt{z^2 + b^2 + 1 - 2b \cos \theta} \\
P = \frac{1}{z^2 + b^2 \sin^2 \theta}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
G(z, b, \theta, n) = \int_0^1 \frac{d\rho}{(z^2 + b^2 - 2b\rho \cos \theta + \rho^2)^{n+\frac{1}{2}}} \\
F(z, b, \theta, n) = \int_0^1 \frac{\rho \cdot d\rho}{(z^2 + b^2 + \rho^2 - 2b\rho \cos \theta)^{n+\frac{1}{2}}}
\end{cases}$$

由以上所给的积分公式及记号，不难推出：

$$(16) \quad \begin{cases}
G(z, b, \theta, 0) = \ln \left(\frac{N-M+1}{L-M} \right) \\
G(z, b, \theta, 1) = P \left(\frac{1-M}{N} + \frac{M}{L} \right) \\
G(z, b, \theta, 2) = \frac{-P}{3} \left[\frac{1-M}{N^3} + \frac{M}{L^3} + 2G(z, b, \theta, 1) \right] \\
G(z, b, \theta, 3) = \frac{-P}{5} \left[\frac{1-M}{N^5} + \frac{M}{L^5} + 4G(z, b, \theta, 2) \right]
\end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} F(z, b, \theta, 0) = N - L + M \cdot G(z, b, \theta, 0) \\ F(z, b, \theta, 1) = -\frac{1}{N} + \frac{1}{L} + M \cdot G(z, b, \theta, 1) \\ F(z, b, \theta, 2) = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{N^3} - \frac{1}{L^3} \right) + M \cdot G(z, b, \theta, 2) \\ F(z, b, \theta, 3) = -\frac{1}{5} \left(\frac{1}{N^5} - \frac{1}{L^5} \right) + M \cdot G(z, b, \theta, 3) \end{cases}$$

通过以上的推导，式 (13) 显然可表示成如下形式了。

$$I(b, z, n) = \int_0^\pi F(z, b, \theta, n) d\theta \quad \dots\dots\dots (18)$$

现在就变成对 θ 的积分问题了，我们用 simpson 法积分 (18) 式，将 $I(b, z, n)$ 编成过程，对应不同的参数 μ, h, z, b ，即可算出 K_σ 和 K_w 。其最终表示式如下：

$$(19) \quad \begin{cases} K_\sigma = C_1 [\beta_1 \cdot I(b, u, 1) + \beta_2 \cdot I(b, v, 1) + \beta_3 I(b, u, 2) + \\ \quad \beta_4 I(b, v, 2) + \beta_5 I(b, v, 3)] \\ K_w = C_1 (1 + \mu) [\alpha_1 I(b, u, 0) + \alpha_2 I(b, v, 0) + \alpha_3 I(b, u, 1) \\ \quad + \alpha_4 I(b, v, 1) + \alpha_5 (b, v, 2)] \end{cases}$$

式中 $u = z - h$
 $v = z + h$

其它符号同前：

在 (19) 式中，当 $z = h$ 即 $u = 0$ 时，被积函数出现奇点，但可以验证，对于 K_σ, K_w 来说，都是可去奇点，应力和沉降并不趋向无穷大，而是有确定值的。但是在这里，无论应力值还是沉降值都是由基底和其相接触的地基共同工作特征来决定的，即此时应力问题就变成确定接触压力问题了，所以我们无需探求出精确值来，故将这一数学验证的推演过程略去。

应力和沉降的最后表达式为：

$$\sigma = q \cdot K_\sigma \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$W = q \cdot \frac{1000}{E} K_w = \frac{1000}{E} \cdot q \cdot K_w \quad \dots\dots\dots (21)$$

应力影响系数 K_σ 和沉降影响系数 K_w 见附表 (一)。这里需要指出沉降 W 以毫米计。

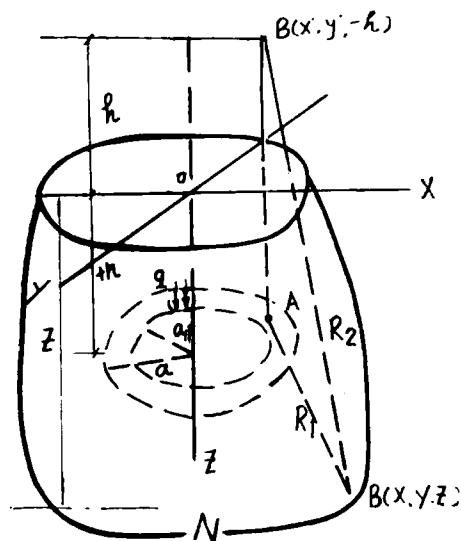
环形均布荷载域作用在地基内时的情况

在很多情况下，需要将环形均布荷载域埋置在地基内部某一深度处，如图（三），即荷载作用在外径为 $2a$ ，内径为 $2a_1$ 的环面上，在这种荷载作用情况下，地基中任一点 $B(x, y, z)$ 处的应力 σ_z 和沉降 W_z 可分别按半径为 a 及半径为 a_1 二个荷载强度为 q 的圆面均布荷载对该点所产生的应力，沉降值之差来确定，其表达式为：

$$\sigma_z = q \cdot (K_{\sigma a} - K_{\sigma a_1}) \dots\dots\dots (22)$$

$$W_z = \frac{1000 q}{E} (K_{wa} - K_{wa_1}) \dots\dots\dots (23)$$

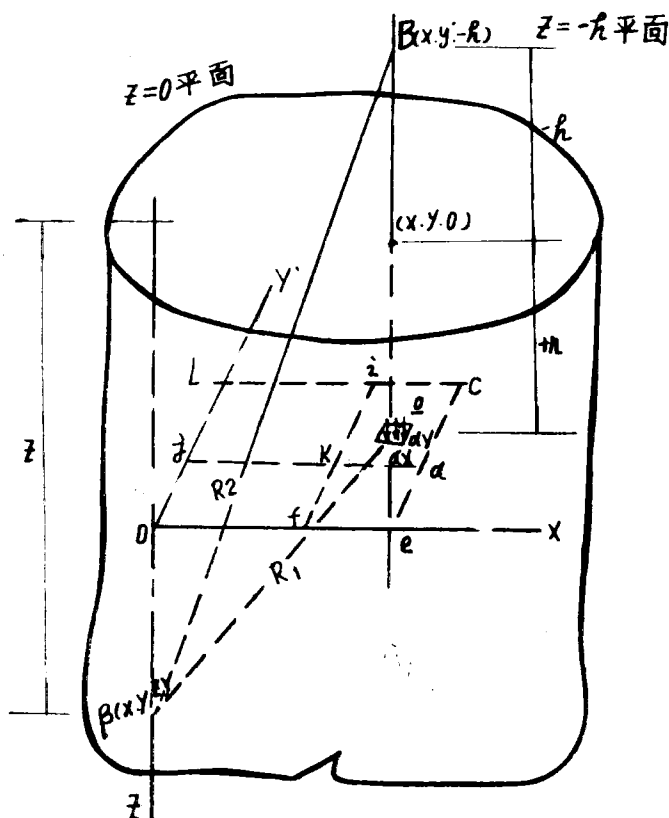
具体系数见附表（一）



图（二）土体内环形荷载略图

矩形均布荷载域作用在地心内下时的情况

大量的工程实践需要将矩形的均布荷载域埋置在地基内部某一深度处如图（四）。在这种情况下，我们来确定地基中任意一点 $\beta(x, y, z)$ 的应力和沉降。



图（四）土体内矩形荷载作用略图

首先通过 $\beta(x, y, z)$ 点作一竖直线，与 $z = +c$ 平面交于 O 点，再在 $+c$ 平面内以 O 点为一角点作矩形 $oLce$ ，并假设在该矩形面积上的荷载强度为 q ，那么我们可以引用大家所熟知的角点法来确定 $\beta(x, y, z)$ 点的应力、沉降。

在矩形面积上任取一微元面积 $dF = dx, dy$ ，在 dF 上总的荷载为 q, dx, dy ，这样以来可用图示所建立的关系，并引用 R ·明德林公式可直接得到以下的表达式，并注意这里：

$$R_1 = [(z - h)^2 + x^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$R_2 = [(z + h)^2 + x^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}$$

则

$$\begin{aligned} \sigma_{z(oL\bullet\bullet)} &= \frac{q}{8\pi(1-\mu)} \left[\beta_1 \iint_{oL\bullet\bullet} \frac{dx \cdot dy}{[(z-h)^2 + x^2 + y^2]^{3/2}} + \right. \\ &\quad + \beta_2 \iint_{oL\bullet\bullet} \frac{dx \cdot dy}{[(z+h)^2 + x^2 + y^2]^{3/2}} + \beta_3 \iint_{oL\bullet\bullet} \frac{dx \cdot dy}{[(z-h)^2 + x^2 + y^2]^{5/2}} + \\ &\quad + \beta_4 \iint_{oL\bullet\bullet} \frac{dx \cdot dy}{[(z+h)^2 + x^2 + y^2]^{5/2}} + \beta_5 \iint_{oL\bullet\bullet} \frac{dx \cdot dy}{[(z+h)^2 + x^2 + y^2]^{7/2}} \\ &= q \cdot K\sigma \dots \dots \dots (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{oL\bullet\bullet} &= \frac{(1+\mu)q}{8\pi E(1-\mu)} \left[\alpha_1 \iint_{oL\bullet\bullet} \frac{dx \cdot dy}{[(z-h)^2 + x^2 + y^2]^{1/2}} + \right. \\ &\quad + \alpha_2 \iint_{oL\bullet\bullet} \frac{dx \cdot dy}{[(z+h)^2 + x^2 + y^2]^{1/2}} + \alpha_3 \iint_{oL\bullet\bullet} \frac{dx \cdot dy}{[(z-h)^2 + x^2 + y^2]^{3/2}} + \\ &\quad + \alpha_4 \iint_{oL\bullet\bullet} \frac{dx \cdot dy}{[(z+h)^2 + x^2 + y^2]^{3/2}} + \alpha_5 \iint_{oL\bullet\bullet} \frac{dx \cdot dy}{[(z+h)^2 + x^2 + y^2]^{5/2}} \\ &= \frac{1000}{E} \cdot q \cdot K_w \dots \dots \dots (25) \end{aligned}$$

在 (24) 和 (25) 式中, 我们令 $oe = a$, $oL = b$, 并令长边为 a , 短边为 b , 即 $\frac{a}{b} \geq 1$; 且

以 $\frac{a}{b}$ 代 a , $\frac{z}{b}$ 代 z , $\frac{h}{b}$ 代 h , 这样以来, 对于 (24) 和 (25) 我们可计算以下的积分形式:

令

$$I(a, z, n) = \int_0^a \int_0^1 \frac{dx \cdot dy}{[x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}+n}} \dots \dots \dots (26)$$

$$\text{并记 } C_1 = \frac{1}{8\pi(1-\mu)} \quad C_2 = C_1 \cdot (1+\mu)$$

其它符号同 (8'), (9') 则有:

$$K_\sigma = C_1 \{ \beta_1 \cdot I[a, (z-h), 1] + \beta_2 \cdot I[a, (z+h), 1] + \beta_3 \cdot I[a, (z-h), 2] + \\ + \beta_4 \cdot I[a, (z+h), 2] + \beta_5 \cdot I[a, (z+h), 3] \} \dots \dots \dots (27)$$

$$K_w = C_2 \{ \alpha_1 \cdot I[a, (z-h), 0] + \alpha_2 \cdot I[a, (z+h), 0] + \alpha_3 \cdot I[a, (z-h), 1] + \\ + \alpha_4 \cdot I[a, (z+h), 1] + \alpha_5 \cdot I[a, (z+h), 2] \} \dots \dots \dots (28)$$

因此,只要算出 $n=0, 1, 2, 3$, 时的 I 值,即可算出 K_0, K_∞ 。

当 $n=1$, 由熟知的积分公式和三角变换,不难推出:

$$\begin{aligned} I(a, z, 1) &= \int_0^a dy \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \int_0^a \frac{dy}{(y^2 + z^2)\sqrt{y^2 + z^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{z} \operatorname{tg}^{-1} \frac{a}{z\sqrt{a^2 + z^2 + 1}} \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

当 $n=0$, 直接积分较难,可采用带参变量积分的技巧:

$$\begin{aligned} I(a, z, 0) &= \int_0^a dy \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \text{ 先对 } x \text{ 分部得} \\ &= \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2 + z^2}} + \int_0^a \int_0^1 \frac{x^2 \cdot dx \cdot dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \dots\dots\dots (30a) \end{aligned}$$

同理对 y 分部可得

$$I(a, z, 0) = \int_0^1 \frac{a \cdot dx}{\sqrt{x^2 + a^2 + z^2}} + \int_0^a \int_0^1 \frac{y^2 \cdot dx \cdot dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \dots\dots\dots (30b)$$

再将 30a, 30b 二式相加,并整理可得

$$\begin{aligned} I(a, z, 0) &= \ln \frac{a + \sqrt{1 + a^2 + z^2}}{\sqrt{1 + z^2}} + a \ln \frac{1 + \sqrt{1 + a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \\ &\quad - z^2 I(a, z, 1) \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

将 (29) 式代入 (30) 式,其最终结果为:

$$\begin{aligned} I(a, z, 0) &= \ln \frac{a + \sqrt{1 + a^2 + z^2}}{\sqrt{1 + z^2}} + a \ln \frac{1 + \sqrt{1 + a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \\ &\quad - z \operatorname{tg}^{-1} \frac{a}{z\sqrt{a^2 + z^2 + 1}} \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

当 $n=2, 3$ 时也一样:

$$I(a, z, 2) = \frac{1}{3z^2} \left[I(a, z, 1) + \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + z^2}} \left(\frac{1}{1 + z^2} + \frac{1}{a^2 + z^2} \right) \right] \dots\dots (32)$$

$$\begin{aligned} I(a, z, 3) &= \frac{1}{5z^2} \left[3I(a, z, 2) + \frac{a}{3(1 + a^2 + z^2)^{3/2}} \left(\frac{3}{1 + z^2} + \frac{3}{a^2 + z^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2}{(1 + z^2)^2} + \frac{2}{(a^2 + z^2)^2} \right) \right] \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

最后将 (29), (31), (32), (33) 代入 (27) 及 (28) 二式,并任意给定 μ, h, z, a 即可算