2009版

数学考研

新干线

线性代数

张永怀

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

2009 版

数学考研新干线

线 性 代 数

张永怀

西安交通大学出版社

内容简介

本书各章均包括考试内容讲解、常考题型解题方法与技巧、练习题及练习题答案与提示。

不论是内容讲解，还是常考题型都特别注意各部分内容的联系与渗透，既注重介绍知识内容，又力图提高读者的应试水平。

本书既可作为考研基础、强化、冲刺等各阶段的参考书，也可作为非数学类专业的本、专科生的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学考研新干线　线性代数/张永怀编. —西安：西安交通大学出版社，2008.3

(数学 135 系列. 数学考研新干线)

ISBN 978-7-5605-2441-2

Ⅰ.线…　Ⅱ.张…　Ⅲ.线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料

Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 043357 号

书　　名　数学考研新干线　线性代数
主　　编　张永怀
责任编辑　叶涛

出版发行　西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行部)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　西安新视点印务有限责任公司

开　　本　787mm×1 092mm　1/16　**印张** 8.625　**字数** 197 千字
版次印次　2008 年 3 月第 2 版　2008 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-2441-2/O·258
定　　价　14.60 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy31@126.com

2009版前言

——从2008年考试中的几道题谈起

无论是在本书中，还是在辅导课中，我都一再强调，线性代数的核心内容是矩阵、向量，必须将其方方面面都要理解掌握，只有这样才能对线性代表的整个内容做到驾轻就熟，现以2008年的几道线性代数试题为例，跟大家作个交流.

1.（2008年数学一、二、三、四）

已知非零矩阵 $\boldsymbol{A}$，满足 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{E}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的单位矩阵，则（　）.

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆　　(B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆　　(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

解法一（直接法，需对矩阵运算及逆矩阵概念很熟，本书中有类似的例子，如例2.25、例2.28）依题意有 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^3=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)$，则 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆；又 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^3=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)$，则 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 也可逆，故选(C).

解法二（特例排除法，需记住一些特殊矩阵，并用来进行逻辑推断）取三阶位移矩阵（参见本书例2.23）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，显然 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，而 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$；又 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 及 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 显然均可逆；因本题是单项选择题，即四个选项中，有且仅有一个是正确的，而对于现今给定的满足已知条件的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 选项(A)、(B)、(D)均不对，故只有选(C).

解法三（利用特征值，需会利用课程的特点——各部分内容经常是互渗的）因 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值 λ 必满足 $\lambda^3=0$，于是 $\boldsymbol{A}$ 只有特征值 $\lambda=0$，故矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 只有特征值 $1-0=1$，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 只有特征值 $1+0=1$，即 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 均可逆.

2.（2008年数学二、三、四）

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为（　）.

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

解（需知道**两个实对称矩阵合同的充要条件**是它们的正、负特征值的个数要对应相同）因 $|\boldsymbol{A}|=-3<0$，则 $\boldsymbol{A}$ 恰有正、负特征值各一个，而 $\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}=3>0$，$\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}=3>0$，$\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3>0$，故(A)、(B)、(C)均不对，选(D)（实际上，因 $\begin{vmatrix}1&-2\\-2&1\end{vmatrix}=-3<0$，则矩阵 $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$ 恰有正、负特征值各一个）.

3.（2008年数学二、三、四）

设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $-1,1$,对立的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;(2)令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

(1) 证(利用反证法)假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,因由题设知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 必线性无关,则必有 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示(且表示法唯一),设 $\boldsymbol{\alpha}_3=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$,于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2$,即 $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$,亦即 $\boldsymbol{\alpha}_3=-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-1)\boldsymbol{\alpha}_2$,而 $k_2=k_2-1$ 显然不可能,故与上述表示法唯一相矛盾,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 必线性无关.

(2) 解(要会运用简单的矩阵分块运算)因 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$(此中手法辅导课中经常强调,本书中也有许多例题,如例 1.13、例 1.14、例 3.10、例 3.21、例 5.6 等),又由(1)知 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$可逆,故 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,所以$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

4. (2008 年数学一、二、三、四)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2a&1&0&\cdots&0&0&0\\a^2&2a&1&\cdots&0&0&0\\0&a^2&2a&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2a&1&0\\0&0&0&\cdots&a^2&2a&1\\0&0&0&\cdots&0&a^2&2a\end{pmatrix}$

满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{B}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

(1) 证明:$|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$;(2) a 为何值时,方程组有唯一解,求 x_1;(3) a 为何值时,方程组有无穷多解,求通解.

解 (1) 属于矩阵行列式的计算,且是三对角形(参见本书例 1.12)

证法一(化为上三角形)

$$|\boldsymbol{A}|\xlongequal[\substack{r_3-\frac{2}{3}ar_2\\ \vdots\\ r_n-\frac{n-1}{n}ar_{n-1}}]{r_2-\frac{a}{2}r_1}\begin{vmatrix}2a&1&0&\cdots&0&0&0\\0&\frac{3}{2}a&1&\cdots&0&0&0\\0&0&\frac{4}{3}a&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\frac{n-1}{n-2}a&1&0\\0&0&0&\cdots&0&\frac{n}{n-1}a&1\\0&0&0&\cdots&0&0&\frac{n+1}{n}a\end{vmatrix}\xlongequal{\text{上三角形}}(n+1)a^n$$

证法二(展开递推)记$|\boldsymbol{A}|=D_n$,按第1列展开,得

$D_n=2aD_{n-1}+a^2(-1)^{2+1}\widetilde{D}\xlongequal{\widetilde{D}\text{按第1行展开}}2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$,于是

$D_n-aD_{n-1}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=a^{n-2}(D_2-aD_1)=a^n$,则

$D_n=a^n+aD_{n-1}=a^n+a(a^{n-1}+aD_{n-2})=\cdots=(n-1)a^n+a^{n-1}D_1=(n+1)a^n$.

(2)由(1)知,当$a\neq0$时,$|\boldsymbol{A}|\neq0$,则矩阵$\boldsymbol{A}$可逆,此时方程组有唯一解.

解法一(利用Cramer法则)因将$|\boldsymbol{A}|$中的第1列换为$\boldsymbol{B}$时的行列式按第1列展开即得D_{n-1},而由(1)知,$D_{n-1}=na^{n-1}$,故由Cramer法则得

$$x_1=\frac{D_{n-1}}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n}=\frac{n}{(n+1)a}.$$

解法二(利用矩阵分块运算及行初等变换,当考生万一忘记了Cramer法则,但若对矩阵、向量很熟,则下面的解法虽较解法一复杂得多,但却也充分展现出线性代数形式规律的美感)此时,方程组的唯一解为$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$,现将$\boldsymbol{A}^{-1}$按列分块,记为$\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,则方程组的解为

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1\xlongequal{\text{记作}}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\text{于是知 } x_1=a_{11}.$$

现对矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$作一系列行初等变换最终可得$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$,由(1)的证法一知,对$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$先作行初等变换(有先后次序):$r_2-\frac{a}{2}r_1,r_3-\frac{2}{3}ar_2,r_4-\frac{3}{4}ar_3,\cdots,r_n-\frac{n-1}{n}ar_{n-1}$,则其中$\boldsymbol{E}$的第1列会变为

$$\boldsymbol{\xi}=(1,-\frac{1}{2}a,\frac{1}{3}a^2,-\frac{1}{4}a^3,\cdots,(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}a^{n-2},(-1)^{n-1}\frac{1}{n}a^{n-1})^{\mathrm{T}}$$

再作行初等变换:$\frac{1}{2a}r_1,\frac{2}{3a}r_2,\frac{3}{4a}r_3,\frac{4}{5a}r_4,\cdots,\frac{n-1}{na}r_{n-1},\frac{n}{(n+1)a}r_n$,则$\boldsymbol{\xi}$会变为:

$$\boldsymbol{\eta}=(\frac{1}{2a},-\frac{1}{3},\frac{1}{4}a,-\frac{1}{5}a^2,\cdots,(-1)^{n-2}\frac{1}{n}a^{n-3},(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}a^{n-2})^{\mathrm{T}}$$

最后作(有次序):$r_{n-1}-\frac{n-1}{na}r_n,r_{n-2}-\frac{n-2}{(n-1)a}r_{n-1},\cdots,r_2-\frac{2}{3a}r_3,r_1-\frac{1}{2a}r_2$,此时,$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$中的$\boldsymbol{A}$已化为$\boldsymbol{E}$,则$\boldsymbol{\eta}$就变为$\boldsymbol{A}^{-1}$的第1列$\boldsymbol{\alpha}_1$,得到过程如下:

$a_{n1}=(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}a^{n-2},a_{n-1,1}=(-1)^{n-2}\frac{1}{n}a^{n-3}-\frac{n-1}{na}a_{n1}=(-1)^{n-2}\frac{2}{n+1}a^{n-3},a_{n-2,1}=(-1)^{n-3}\frac{1}{n-1}a^{n-4}-\frac{n-2}{(n-1)a}a_{n-1,1}=(-1)^{n-3}\frac{3}{n+1}a^{n-4},\cdots,a_{41}=(-1)^3\frac{n-3}{n+1}a^2,a_{31}=\frac{1}{4}a-\frac{3}{4a}a_{41}=(-1)^2\frac{n-2}{n+1}a,a_{21}=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3a}a_{31}=(-1)^1\frac{n-1}{n+1}$,最终有$a_{11}=\frac{1}{2a}-\frac{1}{2a}a_{21}=\frac{n}{(n+1)a}$.

(3) **解** 显然,当$a=0$时,$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=n-1<n$,方程组有无穷多解.此时,原方程组即为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\text{设 } x_1 \text{ 为任意常数,此即为通解.}$$

第 1 版前言

本书的终极目标是使读者朋友能在较短的时间里大幅度提高线性代数知识水平及应试能力。

每一位学习过线性代数课程的朋友可能都会有一个共同的感受：内容少、较抽象、联系紧、频渗透。对，正因如此，可能有很多朋友感觉“害怕”线性代数，但考试中约 22%的份额又不容忽视。

编者首先告诉朋友们，行列式是几乎贯穿整个线性代数内容的工具，经常会用到，但对非数学类的，不会要求对行列式有很高的计算及应用技巧；矩阵及向量是线性代数的基础核心内容，掌握好这两部分内容是至关重要的，由此，作为线性代数重要内容的线性方程组的理论则迎刃而解；最后，特征值(特征向量)及二次型实际是前面内容的应用。

编者依据考试大纲及在考研辅导班授课的经验，并结合近年来的命题特点编写了此书。本书从头至尾都尽可能多地关注各部内容的联系与渗透，对于很多典型题经常给出几种分析解法，相信通过这样的训练，必能使读者在做题时能迅速给出最有效快捷的解题方法，最终取得好成绩。

感谢西安交通大学出版社的支持，对亲人及朋友的勉励也深表谢意。最后，欢迎广大读者朋友不吝指正，以使本书日臻完善！

张永怀

2007 年 3 月底于西安交通大学

目　录

第一章　行列式

考试内容讲解

1. 行列式的概念

关于行列式的定义，大部分教材是引进排列逆序概念之后，给出行列式定义，但也有部分教材不介绍排列逆序概念，而是利用递归法引入行列式定义.

考试大纲中关于行列式的考试要求是"1. 了解行列式的概念，掌握行列式的性质；2. 会应用行列式性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式."故大家不必在行列式定义方面过多纠缠.

例 1.1　计算 3 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$.

解

$$\begin{aligned}D&=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}\\&=1\times(5\times9-6\times8)-2\times(4\times9-6\times7)+3\times(4\times8-5\times7)\\&=-3-2\times(-6)+3\times(-3)\\&=0\end{aligned}$$

例 1.2　设 $n\geqslant2$，证明：如果一个 n 阶行列式 D 中元素均为 1 或 -1，则 D 的绝对值必为偶数.

证　$n\geqslant2$ 时，

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

因为 $a_{ij_i}=1$ 或 $-1(i=1,2,\cdots,n)$，所以和式 $n!$ 项中的每一项均为 1 或 -1. 设其中有 k 项为 1，则其余 $n!-k$ 项为 -1，从而

$$D=k+(n!-k)(-1)=2k-n!$$

由于 $n\geqslant2$ 时，$n!$ 是偶数，故 D 的绝对值必是偶数.

2. 行列式的性质

(1) 转置不变(所以下面的各条性质对行也成立).

(2) 换列反号(即交换某两列，则行列式值反号).

(3) 同列得零(即某两列相同的行列式值为零，此为(2)之推论).

(4) 倍列性质(即某一列所有元素都乘以同一数 k，等于用 k 乘此行列式).

(5) 列成比例值为零(由(3)、(4)即知).

(6) 拆列分配(即某一列元素均是两数之和,则可拆为两行列式之和).

(7) 倍加不变(即将某列的倍数加到另一列,行列式值不变).

例 1.3 计算 3 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ db & -dc & de \\ fb & fc & -fe \end{vmatrix}$.

解 $D=adf\begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix}=abcdfe\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$=4abcdef$

例 1.4 计算行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

解 $$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_3} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-2)r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+2r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{定义}]{\text{由行列式}} -1\times(-1)\times 2=2$$

例 1.5 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kl} \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ & \mathbf{0} & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{l1} & \cdots & b_{ll} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{ll} \end{vmatrix}$$

证明:$D=D_1D_2$.

证 对 D_1 作一系列运算(Ⅰ)r_i+sr_j,将 D_1 化为上三角形,设为

$$\begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & p_{kk} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{依性质(7)}} D_1$$

对 D_2 作一系列运算(Ⅱ)r_m+tr_n,将 D_2 化为上三角形,设为

$$\begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1l} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & q_{ll} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{依性质(7)}} D_2$$

于是,对 D 的前 k 行作运算(Ⅰ),再对后 l 行作运算(Ⅱ),则有

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} & d_{11} & \cdots & d_{1l} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & p_{kk} & d_{k1} & \cdots & d_{kl} \\ & & & q_{11} & \cdots & q_{1l} \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & q_{ll} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk}q_{11}\cdots q_{ll}=D_1D_2$$

3. $\boxed{\text{行列式按行(列)展开}}$

(1) 余子式　在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}.

(2) 代数余子式　$(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

(3) 行列式按行(列)展开法则　设有 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则有以下结论：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases},\quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

例 1.6　设行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

(1) 求第 4 行各元素余子式之和；(2) 求第 4 行各元素代数余子式之和.

解　(1) **方法 1°**　直接计算 $M_{4j}(j=1,\cdots,4)$，可得 $\sum\limits_{j=1}^{4} M_{4j}=-28$.

方法 2°　$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(-7)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-28$$

(2) **方法 1°**　直接计算 $A_{4j}=(-1)^{4+j}M_{4j}(j=1,\cdots,4)$，可得 $\sum\limits_{j=1}^{4} A_{4j}=0$.

方法 2°　$$\sum_{j=1}^{4} A_{4j}=\frac{1}{2}(2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+2A_{44})$$

$$=\frac{1}{2}(a_{21}A_{41}+a_{22}A_{42}+a_{23}A_{43}+a_{24}A_{44})=0$$

方法 3° $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0$

注： M_{ij} 和 A_{ij} 均与元素 a_{ij} 的取值无关，而只与 a_{ij} 所处位置有关，例 1.6 中(1)方法 2°，及(2)方法 2°、方法 3°正是利用了这一点，从而使问题简化，运算量大大减小.

4. 常用特殊行列式

(1) 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

(2) 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2,n-1}&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\cdots&0&0\\a_{n1}&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&a_{1n}\\0&0&\cdots&a_{2,n-1}&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&a_{n-1,2}&\cdots&a_{n-1,n-1}&a_{n-1,n}\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(3) 分块上(下)三角行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1m}&c_{11}&\cdots&c_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mm}&c_{m1}&\cdots&c_{mn}\\0&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1m}&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mm}&0&\cdots&0\\d_{11}&\cdots&d_{1m}&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\d_{n1}&\cdots&d_{nm}&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1m}\\\vdots&&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mm}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}.$$

(4) n 阶范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&x_1&x_1^2&\cdots&x_1^{n-1}\\1&x_2&x_2^2&\cdots&x_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&x_n^2&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$$

显然，当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 两两不等时，$V_n\neq 0$.

5. $\boxed{\text{克拉默(Cramer)法则}}$

若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

则方程组有唯一解：$x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$，其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是将系数行列式 D 中的第 j 列的元素用方程组右端的常数项替代后所得行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}b_iA_{ij}\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

注：①此处的线性方程组的方程个数与未知量个数相同.

②上面方程组右端的常数项均为零时，称为齐次线性方程组. 显然，此时当 $D\neq 0$ 时，它就只有零解(若它有非零解，则必 $D=0$)，实际上，在后面将有：它有非零解 $\Leftrightarrow D=0$.

例 1.7 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+3x_3+4x_4=0 \\ x_1+\lambda^2x_2+3^2x_3+4^2x_4=0 \\ x_1+\lambda^3x_2+3^3x_3+4^3x_4=0 \\ (9+\lambda)x_1+10x_2+(7+\lambda)x_3+(6+\lambda)x_4=0 \end{cases}$$

有非零解，则 $\lambda=$________.

解 依题意，必有

$$0=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 3 & 4 \\ 1 & \lambda^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & \lambda^3 & 3^3 & 4^3 \\ 9+\lambda & 10 & 7+\lambda & 6+\lambda \end{vmatrix}\xlongequal[\text{性质(4)}]{r_4+r_1}(10+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 3 & 4 \\ 1 & \lambda^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & \lambda^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_2\leftrightarrow r_3 \\ r_1\leftrightarrow r_2}]{r_3\leftrightarrow r_4}-(10+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 3 & 4 \\ 1^2 & \lambda^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1^3 & \lambda^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}\text{（范德蒙德行列式）}$$

$$=-(10+\lambda)(\lambda-1)(3-1)(4-1)(3-\lambda)(4-\lambda)(4-3)$$

$$=-6(10+\lambda)(\lambda-1)(3-\lambda)(4-\lambda).$$

所以，$\lambda=-10$，或 $\lambda=1$，或 $\lambda=3$，或 $\lambda=4$.

6. 方阵的行列式及与行列式有关的若干重要结论

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则有

(1) $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$ $(k\in\mathbf{R})$，$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$.

(2) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{BA}|$.

(3) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ $(\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})$.

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆($|\boldsymbol{A}|\neq 0$)，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$，此时，$\boldsymbol{A}^*$ 也可逆，$(\boldsymbol{A}^*)^*$ 也可逆，而 $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}^*|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$，于是，$|(\boldsymbol{A}^*)^*|=|\boldsymbol{A}|^{(n-1)^2}$.

(5) 若方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $|\boldsymbol{A}|=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$.

(6) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似(有可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$)，则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

(7) 若 $\boldsymbol{A}$ 为奇数阶反对称矩阵($\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$)，则 $|\boldsymbol{A}|=0$.

(8) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵($\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$)，则 $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 -1.

例 1.8　设有方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&3\\-2&-3&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix},$$

求 $|\boldsymbol{C}|$.

解　将 $\boldsymbol{C}$ 的第 3 列依次与其第 2 列、第 1 列作交换得 $\boldsymbol{C}_1$，再将 $\boldsymbol{C}_1$ 的第 4 列依次与其第 3 列、第 2 列作交换得 $\boldsymbol{C}_2$，再将 $\boldsymbol{C}_2$ 的第 5 列依次与其第 4 列、第 3 列作交换得 $\boldsymbol{C}_3$，则

$$\boldsymbol{C}_3=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}.$$

于是，根据性质，则有 $|\boldsymbol{C}|=(-1)^{2\times 3}|\boldsymbol{C}_3|=(-1)^{2\times 3}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

又因为 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶反对称矩阵，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$，故 $|\boldsymbol{C}|=0$.

例 1.9　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，2，3，而 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^*-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=$________.

解　依题意，$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|=1\times 2\times 3=6$，所以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均可逆，而 $\boldsymbol{B}^*=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}=6\boldsymbol{B}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=6\boldsymbol{A}^{-1}$，于是

$$|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^*-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=|3\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}|=3^3|\boldsymbol{A}^{-1}||\boldsymbol{B}^{-1}|=3^3\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{3}{4}$$

或

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^*-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|&=|\frac{1}{6}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*-\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*|=(\frac{1}{12})^3|\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{B}^*|\\&=\frac{1}{12^3}\cdot|\boldsymbol{A}|^{3-1}|\boldsymbol{B}|^{3-1}=\frac{1}{12^3}\times 6^2\times 6^2=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

注：行列式没有这样的性质：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$($\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵)，切不可乱用.

常考题型解题方法与技巧

题型一　数字型行列式

例 1.10　设

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0&0&0\\\frac{1}{4}&0&0&0&0\\0&0&0&0&\frac{1}{5}\end{vmatrix}$$

则行列式$|\boldsymbol{A}|$中所有元素的代数余子式之和 $\sum\limits_{i=1}^{5}\sum\limits_{j=1}^{5}A_{ij}=$________.

解　若将每一个 A_{ij} 都求出来，则计算较繁琐，而由于$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，所以，只要求得 $\boldsymbol{A}^*$，即得所要结果. 因为$|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{5}\cdot(-1)^{5+5}\cdot(-1)^{\frac{4(4-1)}{2}}\cdot\frac{1}{4!}=\frac{1}{5!}$，所以

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{5!}\begin{bmatrix}0&0&0&4&0\\0&0&3&0&0\\0&2&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&5\end{bmatrix}.$$

故　$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}A_{ij}=\frac{1}{5!}(1+2+3+4+5)=\frac{15}{5!}=\frac{1}{8}.$$

例 1.11　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1&1+a_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}.$$

解法一　（行和相等）

$$D_n\xlongequal[(i=2,\cdots,n)]{c_1+c_i}\left(1+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1&a_2&\cdots&a_n\\1&1+a_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_2&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,\cdots,n)]{c_i+(-a_i)c_1}\left(1+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1+\sum_{i=1}^{n}a_i$$