# 数学方法与应用

刘淑环　主编
刘淑环　刘崇丽　闫红霞　肖　滢　编著

清华大学出版社

# 数学方法与应用

刘淑环　主编
刘淑环　刘崇丽　闫红霞　肖　滢　编著

清华大学出版社
北京

## 内容简介

该书是为高等院校文科专业的本科生和数学爱好者编写的一本应用数学教科书。共有十个专题，内容包括数学文化、函数及其应用、随机性问题的概率分析、常见随机变量的概率分布及应用、期望值准则的决策分析、数据的描述性统计与分析、线性相关与回归分析、经济法律问题的博弈分析、数学建模方法以及 MATLAB 软件的简单应用。

该书以读者已经具备的数学基础或容易接受的高等数学知识作为基准。各专题尽量避免繁琐的数学计算及深奥的理论证明，重点针对经济学、管理学、法学等领域及生活实际中的大量实例展开专题探讨，介绍既有趣又有用的现代数学新思想、新方法与新内容。目的是提高文科专业学生的数学素质，开阔视野，使学生在学习数学时能有意识地着眼于数学思想、数学方法的广泛应用，并培养文科专业的学生借助数学软件应用现代数学方法分析问题、解决问题的创新意识。

本书可作为政、法、文、史、哲等专业应用数学课程教学改革试验教材，也可作为数学爱好者的数学参考书，还可作为文科高等院校教师讲授高等数学课程的教辅材料。



图书在版编目（CIP）数据

数学方法与应用/刘淑环主编；刘淑环等编著. —北京：清华大学出版社，2008.6
ISBN 978-7-302-17479-0

Ⅰ. 数…　Ⅱ. ①刘…　②刘…　Ⅲ. 高等数学—数学方法—高等学校—教材　Ⅳ. O13-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 057622 号

责任编辑：佟丽霞　赵从棉
责任校对：王淑云
责任印制：何　芊
出版发行：清华大学出版社　　地　址：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　邮　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：三河市兴旺装订有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170×230　印　张：12.25　字　数：258 千字
版　次：2008 年 6 月第 1 版　　印　次：2008 年 6 月第 1 次印刷
印　数：1～4000
定　价：19.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：026929－01

# 前　言

## PREFACE

“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日月之繁，无处不用数学。”数学既是自然科学、技术科学的基础，同时随着社会的发展与技术的进步，数学在经济科学、社会科学、人文科学的发展中也发挥着越来越大的作用。政治、法律、经济等领域中的专业问题，也已从单纯的定性研究转变为与定量研究相结合的研究方式。因此数学素质应成为当代文科大学生必须具备的一种基本素质，数学的思想、方法也应成为人文专业的大学生必须掌握的一门工具。

数学思想和方法在各学科领域的重要性已有目共睹，各高校也都适时地在文科专业开设了相应的高等数学课程。然而在人文专业开设高等数学课程应考虑文科专业的学科特点及学生的实际，否则，不但起不到数学教育的作用，相反还会增加学生的负担，不利于数学思想和方法对人文学科领域的渗透及应用，也不利于文科专业学生数学素质的培养。

目前，已出版的文科高等数学教材基本都包括传统的微积分、线性代数、概率论与数理统计三部分内容，这就需要有足够的学时作保证。而已出版的应用数学教材，大多都是根据理工专业的学科特点而编写，需要读者具备深厚的高等数学基础。因此，编写一本适于学时少、对数学要求不高的文科专业使用的应用数学教材就尤显重要。本书的四位作者，经过近20年对文科高等数学的教学研究与教学实践，在此方面作了一些尝试。

本教材的一个显著特点就是内容的多样性与选择性，体系安排新颖。专题内容的多样性，可调动读者了解数学、使用数学方法的积极性与兴趣；其选择性，一方面可使教师能根据实际情况灵活地把握各专题的教学深度，也可使学生能根据自己的兴趣及专业需求进行有选择的深层次的探讨。本教材在参考大量文献的同时，形成了如下特色。

（1）教材内容的选择着重数学方法的实用性、先进性与趣味性。教材内容的选择、安排，不是简单地将高等数学内容进行删减、增加，而是紧密结合政法等人文专业的学科特点，对经典内容进行有机整合，重

点介绍先进的、应用广泛的数学思想和数学方法，以及数学软件在政治、法学、经济、管理等领域的应用，拓宽读者解决这些领域专业问题的研究思路。

(2) 教材体系安排以专题形式展开，新颖独特。每一个专题都以问题引出—模型建立—问题解决—结果分析为主线，有利于对学生思维的启发与引导，提高文科专业学生的数学人文素养，使数学思维延伸至一般的思维。同时，教师还可根据课时情况灵活安排各专题所要求的深度与广度。

(3) 采用案例教学，拓展了数学应用于政治学、法学、管理学等领域的实例范围。本教材力求从读者熟悉的事物与现象出发，采用案例式教学，将数学素质的培养有机地融合在案例的讲解中，突出数学思想的介绍及数学方法的应用，使读者感受到应用数学知识、数学方法解决实际问题的乐趣，增加读者应用数学方法解决问题的意识和能力。案例的选择，既参考了国内外大量的参考书中涉及的具有典型意义的问题，同时也有作者多年教学研究的结晶。

(4) 充分利用计算机技术，借助数学软件解决实际问题。利用数学软件教学，可使学生脱离繁琐的数学计算、严密的理论推导，而把重点转变为对实际问题的模型建立及解决方法的探讨分析上。书中介绍了常用的社会科学统计软件包 SPSS 的简单使用和优化计算工具 MATLAB 软件，目的在于培养学生的动手操作能力，提高学生利用数学软件进行学习并进行初步科学研究的能力。

(5) 为理解、巩固所介绍的数学方法及其应用，书后附有适量习题。各专题后都安排有背景丰富的习题供学生选做，以达到教材正文与习题相配，理论与方法相宜。为配合读者的学习，书后附有部分专题的习题答案。

总之，本书在强调培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力和运算能力之外，更注重培养学生运用所学的数学方法去分析问题和解决问题的能力。相信读者在阅读此书后，能开阔思路，增强分析问题、解决问题的能力。

本书的初稿体系是在中国政法大学校级教改项目“政法专业应用数学教材编写与修订改革研究”中所确立的，具体的编写组织工作及本书的统稿由刘淑环负责。各专题内容经过编写人员的共同讨论、多次修改，最终定稿。参加编写的有刘淑环(专题一、二、三、四、五、六、七、八)、刘崇丽(专题二、三、五、八)、闫红霞(专题二、三、四、五、六)、肖滢(专题二、九、十)。书后附表由闫红霞完成，部分习题答案由刘淑环、闫红霞、肖滢共同提供。

在本书的编写过程中，参考了大量文献，吸收了各兄弟院校高等数学教材中的一些新颖例题，借鉴了国内经济、管理、法学等专业中用数学方法解决问题的成功案例，同时也参考了从国外翻译过来的一些著作中的精华，在此深表感谢。同时，本书的编写，得到了中国政法大学教务处、中国政法大学科学技术教学部的支持，在此一并致谢。

编写本书的目的，是试图为学时少(不超过 68 学时)且对数学理论要求不高

的政法等人文专业的读者提供一本比较合适的应用数学教材。尽管作者有良好的愿望，但由于这一工作的难度较大，加之作者水平有限，书中肯定会存在各方面的问题。为体现文科专业应用数学教学的一种改革模式，我们希望能抛砖引玉。对书中不当之处，恳切希望广大读者和各位同仁批评指正，以期不断完善。

编　者

2007 年 12 月

# 目录

CONTENTS

# 专题一 数学文化

> 数学是人类文化中一个深刻而强有力的部分。在大多数科学里，一代人要推倒另一代人所修筑的东西，一些人所树立的，另一些人要加以摧毁。只有数学，每一代人都能在其旧的建筑上添一层楼。

在人们的印象中，数学就是一大堆的公式、定理、命题、演算……，许多人都认为深奥的数学理论背后更多的是抽象、枯燥，从而敬而远之。但实际上，数学背后有着丰富多彩的文化，具有独特的文化内涵。在西方，数学被作为一种文化、一种文明的象征受到尊重，拥有悠久的历史。《西方文化中的数学》的作者克莱因说："在西方文明中，数学一直是一种主要的文化力量。"数学一旦脱离了丰富的文化基础，自然就会简化成一系列的演算技巧，变得枯燥、乏味。

人们常常把数学比喻为一棵枝繁叶茂的大树，它包含着并且继续生长出越来越多的分支。本专题无力去展现数学科学灿烂文化的全貌，仅尝试透过数学文化中几个方面内容的介绍，带领读者去探究数学概念、理论诞生的源头，追寻它们发展的轨迹；见证数学学科发展中的重要事件，感悟科学的真谛，体会数学独特的魅力。希望通过本专题的简单介绍，能激发读者对数学文化的兴趣，加深对数学思想的理解，体会数学文化对人类文明的重要作用。

## 一 数学文化的特点

数学是历史最悠久的人类知识领域之一。从远古屈指计数到现代高速电子计算机的发明，从量地测天到抽象严密的公理化体系，在5000余年的数学历史长河中，重大数学思想的诞生与发展，构成了科学史上最富有理性的

题材。

与其他知识体系相比,数学是一门历史性或者说累积性很强的科学。重大的数学理论总是在继承和发展原有理论的基础上建立起来的,它们不仅不会推翻原有的理论,而且总是包容原先的理论。例如,数的理论演进就表现出明显的累积性;在几何中,非欧几何可以看成是欧氏几何的拓展;溯源于初等代数的抽象代数并没有使前者被淘汰;现代分析中的函数、导数、积分等概念的推广均包含了古典定义作为其特例……。可以说,在数学的进化过程中,几乎没有发生过彻底推翻前人建筑的情况。

数学科学作为一种文化,不仅是整个人类文化的重要组成部分,而且始终是推进人类文明的重要力量。数学科学在人类文明史上的这种特殊地位,是由数学作为一种文化的特点决定的。

首先,数学以抽象的形式,追求高度精确、可靠的知识。数学的抽象舍弃了事物的其他一切方面,而仅保留某种关系和结构;同时,数学的概念及数学方法也是抽象的。从古希腊时代起,数学就使用一种特有的逻辑推理规则,来达到确定无疑的结论。这种推理模式赋予数学以其他科学不能比拟的精确性,成为人类思维的一种典范,并日益渗透到其他知识领域,这就是数学影响人类文化的突出方面之一。

其次,数学的另一个特点是用数学方法解决问题的普适性。在对宇宙世界和人类社会的探索中,数学追求的是最大限度地建立一般性模型,而不是仅仅停留在对个别事例的解决。如三角形的面积等于二分之一的底乘以高,若仅适用特殊的三角形,那在数学上是毫无意义的。这种追求解决问题的一般性算法的倾向,使数学具有了广泛的适用性。还没有哪一门科学在广泛应用上能与数学相比。数学越来越成为一种普遍的科学语言和工具,在推动其他科学和整个人类文化的进步方面起着不可替代的巨大作用。

最后,数学作为一种创造性活动,还具有艺术的特征,这就是对美的追求。英国数学家和哲学家罗素(B. Russell,1872—1970)说过:“数学不仅拥有真理,而且拥有至高无上的美——一种冷峻严肃的美,即就像是一尊雕塑。……这种美没有绘画或音乐那样华丽的装饰,它可以纯洁到崇高的程度,能够达到严格的只有最伟大的艺术才能显示的完美境界。”这种形式高度抽象的美,即逻辑形式与结构的完美。以简洁与形式完美为目标的追求,是数学影响人类文化的又一个重要因素。

正是由于数学作为一种文化的上述特征,它对整个人类文明产生了不容置疑的巨大影响。

## 二、数学悖论与数学的三次危机

数学的严格基础,自古希腊以来就是数学家们追求的目标。这样的追求,在20世纪以前曾经历过两次巨大的考验,即古希腊不可公度量的发现和17、18世纪关于微积分基础的争论,而19世纪末分析严格化的最高成就——集合论,似乎给数学家们带来了一劳永逸摆脱基础危机的希望。庞加莱甚至在1900年的巴黎国际数学家大会上宣布:“现在我们可以说,完全的严格性已经达到了!”但就在第二年,英国数学家罗素却以一个简单明了的集合论“悖论”,打破了人们的上述希望,引起了对数学基础的新的争论。

### (一)数学推理与数学悖论的概念

由一个或几个已知的判断(前提),推导出一个未知结论的思维过程就是推理。一个推理由前提和结论两部分组成,推理所依据的判断称为前提,从前提通过推理得到的新判断称为结论。数学中常用的推理有归纳推理(由特殊性前提推出普遍性结论的推理)、类比推理(由特殊性前提推出特殊性结论的推理)和演绎推理(由普遍性前提推出特殊性结论的推理)三种。

数学虽然历来被视为严格、和谐、精确的典型学科,但数学的发展从来不是完全直线式的,它的体系并不是永远和谐的,而是常常会出现悖论。悖论是指这样的推理过程:它看上去是合理的,但结果却得出了矛盾。悖论在很多情况下会违反排中律,得到一个矛盾命题。即由命题的真,可以推出该命题为假;由命题的假,又可以推出该命题为真。

例如,在世界文学名著《唐·吉诃德》中有这样一个故事:

唐·吉诃德的仆人桑乔·潘萨跑到一个小岛上,成了这个岛的国王。他颁布了一条奇怪的法律:每一个到达这个岛的人都必须回答一个问题:“你到这里来做什么?”如果回答对了,就允许他在岛上游玩,而如果答错了,就要把他绞死。对于每一个到岛上来的人,或者是尽兴地玩,或者是被吊上绞架。有多少人敢冒死到这个岛上去玩呢?一天,有一个胆大包天的人来了,他照例被问了这个问题,而这个人的回答是:“我到这里来是要被绞死的。”请问桑乔·潘萨是让他在岛上玩,还是把他绞死呢?

如果这个人回答得正确,则应该让他在岛上游玩,但却与他说“要被绞死”的话不相符合,因此就应该被绞死。而如果他回答得不正确,则应该被绞死,但结果却与他说的“要被绞死”相符,那么他说的就是对的。既然他答对了,就不该被绞死,而应该让他在岛上玩。

小岛的国王发现，他的法律无法执行，因为不管怎么执行，都将使法律受到破坏。他思索再三，最后让卫兵把这个人放了，并且宣布这条法律作废。这是一个悖论的典型例子。

## （二）三个著名的数学悖论

一些看起来好像正确，但却与直觉和日常经验相矛盾的命题，就是悖论。在数学的发展过程中出现过很多著名的悖论。

**1. 芝诺悖论——神行太保阿基里斯永远追不上乌龟**

芝诺是古希腊埃利亚学派的一个代表人物，可认为是第一个提出悖论的人。其中有一个著名的悖论：神行太保阿基里斯永远追不上乌龟。

神行太保阿基里斯与乌龟之间举行一场赛跑。如果让乌龟在阿基里斯前100m开始，假定阿基里斯的速度是乌龟的10倍。比赛开始，当阿基里斯跑了100m时，乌龟前于他10m；当阿基里斯跑完下一个10m时，乌龟仍前于他1m……。因此无论阿基里斯怎样跑，乌龟永远都在阿基里斯前面的一段距离处，虽然阿基里斯的速度快于乌龟，且阿基里斯越追越近，但总也追不上乌龟。

那么，阿基里斯真的追不上乌龟吗？当然不是，这显然是一个悖论。芝诺悖论的关键是使用了两种不同的时间测度。原来，我们用来测量时间的任何一种“钟”都是依靠一种周期性的过程作标准的，如太阳每天的东升西落、一年四季的推移、钟摆的运动等。人们正是利用它们循环或重复的次数作为时间的测量标准，用这种重复性过程测得的时间称为“芝诺时”。芝诺悖论的产生原因，就在于“芝诺时”不可能度量阿基里斯追上乌龟后的现象。

例如，当阿基里斯在第 $n$ 次到达乌龟在第 $n$ 次的起始点时，“芝诺时”记为 $n$，这样在“芝诺时”为有限的时刻，阿基里斯总是落在乌龟的后面。但是在我们的钟表上，假如阿基里斯跑完100m用了1min，那么他跑完10m只要6s，跑完1m只需0.6s，实际上，他只需要 $1\frac{1}{9}$ min就可以追上乌龟了。因此，在芝诺时达到无限后，正常计时仍可以进行，只不过芝诺的“钟”已经无法度量它们了。

**2. 康托尔悖论——部分之和大于整体**

康托尔被誉为19世纪末20世纪初德国伟大的数学家，是集合论的创立者。他有一个著名的“部分之和大于整体”的无限集合悖论，表示如下：

自然数集合 $A$：$1,2,3,4,\cdots,n,\cdots$

奇数集合 $B$：$1,3,5,7,\cdots,2n-1,\cdots$

偶数集合 $C$：$2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots$

问题是：奇数集合包含多少个奇数？偶数集合包含多少个偶数？

由于在集合 $A$ 中的每一个自然数，都可以与集合 $B$ 的每个奇数以及集合 $C$ 的每个偶数相对应，直到无限，因此三个集合 $A$、$B$、$C$ 中的数字实际是一样多的，即用 $A=B=C$ 表示。

然而自然数集合包括奇数集合与偶数集合，故又有 $A=B+C$。而若 $A=B=C$，则 $B+C>A$，即自然数集合中所包含的数字个数少于其组成部分的偶数集合以及奇数集合中的数字个数的和。因此结论是：整体并不大于它的一部分，而它的各部分之和却可能大于其整体。

康托尔的理论，特别是一一对应的方法造成的无穷中的悖论，使得康托尔引进了令人感到神秘莫测的无穷大概念，并试图回答一些涉及无穷量的数学难题，例如“整数究竟有多少？”、“一个圆周上有多少点？”、“0～1 之间的数比 1 寸长线段上的点还多吗？”等。而“整数”、“圆周上的点”、“0～1 之间的数”等都是集合，对这些问题的研究就产生了集合论。康托尔是第一个建立起完整的逻辑结构的人，在这种结构中，他提出一个超限数的序列，这就是无穷大的级。

从能够加以描述的集合来说，无穷大的级有三个，全体整数序列相当于它的第一级，所有实数的集合较高一级，相当于第二级，而所有函数的集合又较高一级，相当于第三级，但到此我们就必须止步了。

**3. 罗素悖论——理发师悖论**

著名数学家罗素曾提出如下的理发师悖论：

在某个城市中有一位理发师，他的广告词是这样写的：“本人的理发技艺十分高超，誉满全城。我将为本城所有不给自己刮脸的人刮脸，我也只给这些人刮脸。我对各位表示热诚欢迎！”来找他刮脸的人络绎不绝，自然都是那些不给自己刮脸的人。可是，有一天，这位理发师从镜子里看见自己的胡子长了，他本能地抓起了剃刀。那么这位理发师能不能给他自己刮脸呢？

如果他不给自己刮脸，他就属于“不给自己刮脸的人”，他就应该给自己刮脸；而如果他给自己刮脸呢？他又属于“给自己刮脸的人”，他就不该给自己刮脸。这显然是一个悖论。

罗素的这条悖论使集合理论产生了危机。

罗素悖论（理发师悖论）让人们发现数学这座辉煌大厦的基础部分存在着一条巨大的裂缝。德国的著名逻辑学家弗里兹在他的关于集合的基础理论完稿交付打印时，收到了罗素关于这一悖论的信。他立刻发现，自己忙了很久得出的一系列结果被这条悖论搅得一团糟。他只能在自己著作的末尾写道：“一个科学家所碰到的最倒霉的事，莫过于在他的工作即将完成时却发现所干的工作的基础崩溃了。”