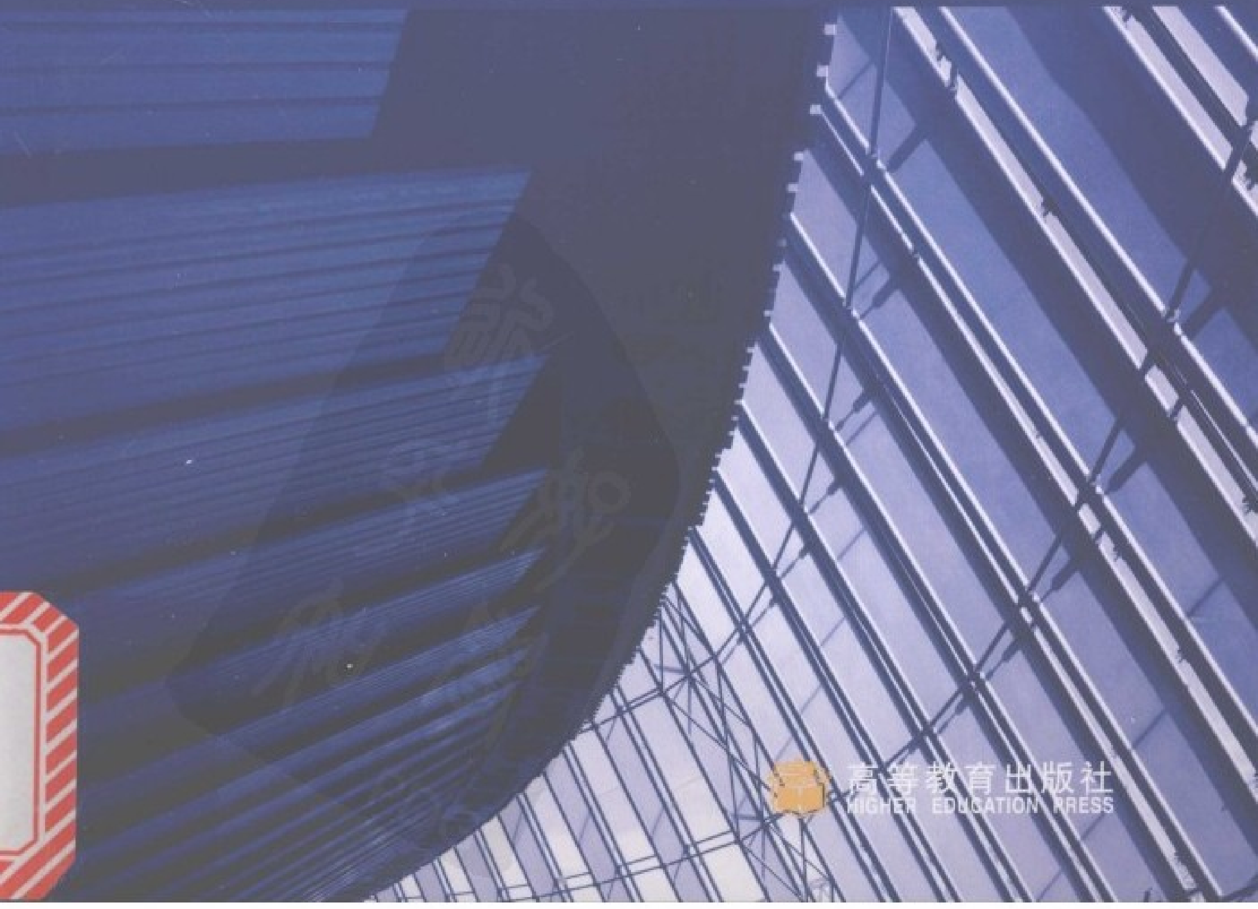
金融数学丛书

金融衍生产品定价的数学模型与案例分析

□ 姜礼尚　徐承龙　任学敏　李少华　等著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

金融数学丛书

金融衍生产品定价的数学模型与案例分析

□ 姜礼尚　徐承龙　任学敏　李少华　等著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目（CIP）数据

金融衍生产品定价的数学模型与案例分析/姜礼尚等著. —北京：高等教育出版社，2008.6
ISBN 978-7-04-023981-2

Ⅰ.金… Ⅱ.姜… Ⅲ.金融-经济数学-数学模型-案例-分析 Ⅳ.F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 048224 号

策划编辑 赵天夫 **责任编辑** 蒋 青 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 朱 静
版式设计 陆瑞红 **责任校对** 王 雨 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	人民教育出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2008年6月第1版
印　　张	19.25	**印　　次**	2008年6月第1次印刷
字　　数	330 000	**定　　价**	39.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 23981-00

序　　言

拙作《期权定价的数学模型和方法》(高等教育出版社) 自 2003 年出版至今已有 4 年. 它的英译本《Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing》(World Scientific Publishing) 已在 2005 年出版. 国内很多高校数学系已把它作为本科生和研究生教材, 在金融数学专业的高年级大学生和研究生中讲授, 反映良好. 2008 年初该书的第二版已由高等教育出版社出版.

在衍生证券定价的领域中, 偏微分方程方法已被愈来愈多的学者所接受, 它的影响正在逐渐扩大. 为了进一步提高这门课程的教学质量, 使得教师和学生能把这门课教好, 学好, 用好, 有必要进一步加深关于随机分析方法与偏微分方程方法之间的相互联系的认识, 做到相互沟通, 互相启发, 把偏微分方程方法的应用提高到一个新水平. 同时要强调理论联系实际, 应用 Black-Scholes-Merton 期权定价理论对金融、保险、投资等各个领域中提出的各种实际案例 (产品定价、风险分析和管理决策) 进行分析研究, 以便达到加深理解, 服务社会的目的. 本书就是按照这个理念编写的.

本书分成两大篇: 理论篇与案例篇. 前者可以作为《期权定价的数学模型和方法》的发展和延伸. 全篇集中阐明随机分析中 Brown 运动及相关知识与偏微分方程之间的天然联系, 以及 Black-Scholes 期权定价模型的后续研究和发展. 由我们研究所的一些教师和他们指导下的研究生, 结合实际案例所撰写的学术论文组成了本书的案例篇. 这里主要涉及国内一些金融和保险部门在近年来推

目　　录

理论篇　期权定价的偏微分方程模型和方法

理　论　篇

期权定价的偏微分方程模型和方法

姜礼尚

引　言

本篇是按照《期权定价的数学模型和方法》一书的延伸和发展的理念来编写的, 不具有作为一本教材应有的系统性与自封性, 并假设读者对《期权定价的数学模型和方法》一书是熟悉的, 已具有期权定价中的偏微分方程模型和方法的初步知识. 在此基础上, 本文把注意力集中在阐明随机分析中鞅方法与偏微分方程方法之间的相互联系, 以及 Black-Scholes 模型的后续发展等方面. 力图进一步展示偏微分方程方法在期权定价理论中的应用.

本篇的安排如下: 在第一章进行期权定价历史回顾以后, 第二章我们即进入本文的重点, 详细介绍了倒向 Kolmogorov 方程和 Feynman-Kac 公式, 首次逸出时间与吸收边界条件等基本理论, 以及它们在期权定价中的应用, 全面展示了偏微分方程方法在 Black-Scholes-Merton 期权定价理论中的重要作用, 并从选取适当变量代换简化定解问题的角度, 阐明计价单位转换这个随机分析技巧在偏微分方程方法中的实施. 第三章在跳 - 扩散模型下导出了期权定价模型, 这是一个带有非局部积分项的抛物型方程的定解问题, 通过引进 Green 函数, 把它转化为等价积分方程组, 由此得到了级数形式解, 并在跳量是对数正态分布随机变量的假设下, 导出了 Merton 公式. 在第四章, 对于 Vasicek,Cox-Ingersoll-Ross 以及 Hull-White 等随机利率模型, 建立了零息票和欧式期权定价的数学模型, 并由 Vasicek 和 Hull-White 模型得到了欧式期权定价公式, 必须指出: 转换计价单位在这里起到了关键作用. 第五章建立了随机波动率模型和开关式波动率模型

下欧式期权的定价模型和相应的定价公式, 对于只能给出波动率变化范围, 而没有明确表达式的不确定波动率问题, 建立了期权的证券组合的定价模型, 这是一个完全非线性抛物型方程 ——Black-Scholes-Barenblatt 方程. 我们对它作了一些初步的定性分析. 第六章在比例交易费的假设下, 按照 Leland 的思路, 导出了期权的证券组合的定价模型, 它同样是一个 Barenblatt 型的完全非线性抛物型方程. 在单个欧式期权情形, 我们讨论了它与 Black-Scholes 方程的关系.

第一章　历史回顾

§1.1　Black-Scholes-Merton 的前期工作

期权作为股票的衍生物, 它的定价问题很早就受到人们的关注. 1900 年 H. Poincaré 的学生 Louis Bachelier 在他的博士论文 "Théorie de la Spéculation"(投机交易理论) ([3]) 中首次提出股票价格的运行可以通过 Brown 运动来刻画. 基于这个数学模型, 即股价 S_t 适合随机微分方程

$$dS_t = \sigma dW_t, \tag{1.1}$$

这里 W_t 是标准 Brown 运动, $E(dW_t) = 0$, $Var(dW_t) = dt$; 他得到了看涨期权 (call option) 的期权金 V_0 的定价公式

$$\begin{aligned} V_0 &= E((S_T - K)^+ | S_0 = S) \\ &= (S - K)N\left(\frac{S-K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}N'\left(\frac{K-S}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 K 是期权的敲定价 (strike price), T 是到期日 (expirate date),

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha.$$

用现在的眼光来评价 Bachelier 的工作, 公式 (1.2) 给出了期权的风险中性价格, 但忽视了现金的时间价值 —— 贴现率, 并有以下两点明显的缺憾:

1. 由模型 (1.1) 给出的股价 S_t 可能出现负值.

2. 由公式 (1.2) 给出的期权金价格可以超过当日股价 S.

Case Sprenkle (1961) 和 Paul Samuelson (1964) 相继对股价 S_t 的模型进行了修正, 以股票价格的回报 (return) $\frac{dS_t}{S_t}$ 代替 dS_t, 即假设 S_t 适合几何 Brown 运动:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \rho dt + \sigma dW_t. \tag{1.3}$$

由 Itô 公式, 上述随机微分方程可改写为

$$d\ln S_t = \left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t.$$

虽然 $\ln S_t$ 可以为负, 但作为股价 S_t 本身恒正. 这样就克服了 Bachelier 的模型 (1.1) 所带来的缺点.

基于 S_t 的模型 (1.3), C. Sprenkle 通过引入风险厌恶度 Z (degree of risk aversion), 得到了看涨期权定价公式 ($S_0 = S$) ([27])

$$V_0 = e^{\rho t} SN(d_1) - (1 - Z)KN(d_2), \tag{1.4}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{K} + \left(\rho + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{1.5}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \tag{1.6}$$

James Boness ([4]) 在 C. Sprenkle 工作的基础上, 进一步考虑了现金贴现率, 并假定它与股票的回报率 ρ 相同, 从而在 S_t 适合几何 Brown 运动 (1.3) 的假设下, 得到期权金表达式

$$V_0 = e^{-\rho T} E((S_T - K)^+ | S_0 = S) = SN(d_1) - e^{-\rho T} KN(d_2). \tag{1.7}$$

其中 d_1, d_2, 的定义见 (1.5) (1.6).

P. Samuelson ([25]) 进一步扩大了 J. Boness 的工作. 假定期权与股票有不同的期望回报率, 它们分别是 ω 和 ρ, 看涨期权定价 (1.7) 被修改为

$$V_0 = e^{-\omega T} E((S_T - K)^+ | S_0 = S) = e^{(\rho - \omega)T} SN(d_1) - e^{-\omega T} KN(d_2). \tag{1.8}$$

其中 d_1, d_2, 的定义见 (1.5) (1.6).

公式 (1.4)、(1.7) 和 (1.8) 都不是风险中性的, 它们都依赖于股票的期望回报率 ρ 和期权的期望回报率 ω. 这说明在当时, 所有学者包括卓越的经济学家 P. Samuelson 在内, 一方面认识到应对不确定收益要进行贴现, 但另一方又因贴现率的无法确定而困惑. 事实上, 贴现率的大小反映了投资人对风险资产在未来变化的预期, 准确地说, 它本身就是不可预断的 (problematic).

由 Fisher Black, Myron Scholes 和 Robert Merton 发展起来的方法完全跳出了贴现率这个怪圈, 使期权定价的发展进入了一个崭新的时代.

§1.2 Black-Scholes-Merton 的突破性进展

期权定价的突破性进展产生于上世纪 60 年代末, 70 年代初. 自 1965 年开始, F. Black 从事关于认股权证定价的研究, 与传统方法不同, 他希望在一些简单的假设下: 1. 忽略交易费, 2. 借贷款利率相同且是常数, 3. 股票价格运行适合具有常数波动率 (volatility) 的几何 Brown 运动, 能得到一个只依赖于股价以及以上这些参数的认股权证的定价公式. 他通过无风险对冲技巧, 建立了认股权证定价适合的偏微分方程 (即 Black-Scholes 方程). 他曾花了很长时间去解这个方程, 但是没有取得成功, 正如他后来在一篇文章中所说: “我有一个应用数学博士学位, 但我从来没有花很多时间在微分方程上, 不知道求解这类问题的标准方法, 我对物理有一点初步的认识, 但是不知道这个方程与热传导方程有紧密的联系.” ([7]) 当时, 虽然他还不知道如何求解, 但是从偏微分方程的形式可以看出, 认股权证的价格与股票的期望收益率无关! 为此使他 (包括以后加入这项研究的 M. Scholes 和 R. Merton) 感到非常迷惑不解 (“That fascinated me”). 1969 年, M. Scholes 到了 Boston, 他与 Black 开始了合作, 并很快取得进展, 得到了期权定价公式 ——Black-Scholes 公式. 1970 年春天, Black, Scholes 和 Merton 围绕此公式的经济含义展开了讨论. 终于在一个星期六的下午, Merton 将期权定价的最后一部分工作补充了进来: 即套利. Merton 认识到只有在不存在套利机会的条件下, 期权价值才可以用此公式来计算. 用现在的话来说, 就是在完全市场假设下, Black-Scholes 公式与无套利原理是等价的. 事实上, 若假定股票的期望收益率是无风险利率 r 时, 那么相应的股票期权的期望收益率亦必然是无风险利率. 这样, 他们利用 Sprenkle 公式 (即在公式 (1.8) 中, 令 $\rho=\omega=r$), 再次导出 Black-Scholes 公式. Black 后来回忆此段往事时说: “我和 Scholes 写的论文关键部分是有关套利的讨论, 这个讨论帮助我们导出了认股权证的定价公式, 它是由 Bob (Merton 爱称) 给出的, 因此这篇论文应称为 Black-Scholes-Merton