《高等数学》(三版)
解题构思与技巧

《高等数学》(三版)

解题构思与技巧

(上)

主　编　孙续元
副主编　龙天健
　　　　邵学新
　　　　文　钊

(京)新登字 148 号

内容提要

《高等数学(三版)解题构思与技巧》(上下)根据高等院校非数学专业普遍使用的《高等数学》(三版)(同济大学主编、高等教育出版社出版)编写而成,旨在帮助使用该教材的大学生及相当水平的学习者提高解题水平,增强应试能力。

本书分上下两册,上册从第一章至第七章,与《高等数学》(三版)上册相对应;下册从第八章至第十二章,与《高等数学》(三版)下册相对应。本书的突出特点是:以简洁明快的结构分项列举《高等数学》(三版)要点、重点、难点;针对重难点,布置例题,每题均以"解题构思"为首,引导读者分析题意,构造解题方法,纠正易见易犯错误;采用提示和给出最终答案相结合的办法,提供《高等数学》(三版)部分习题答案。

《高等数学》(三版)解题构思与技巧(上)
孙续元　主编
*
北京广播学院出版社出版发行
(北京定福庄 1 号)
中科院武汉分院科技印刷厂
各地新华书店经销
*
787×1092 毫米　32 开本
1995 年 12 月第一版　1995 年 12 月第一次印刷
印张:22.3　字数:730 千字
印数:1—10 000
ISBN 7-81004-583-0/O·18
定价:19.60 元(本册 9.80 元)

前　言

高等数学是文理各科专业学习的必修课程。学好高等数学，解题是关键；而解题的成败，则在于对题意的分析理解，对解题方案的构思，对解题技巧的掌握。《高等数学(三版)解题构思与技巧》(上下)，就是为了帮助非数学专业本、专科学生能更快更好地熟悉高等数学的基本知识，准确地抓住解题关键，清晰地辨明解题思路，以目前全国高等院校最通用的教材——同济大学主编、高等教育出版社出版的《高等数学》(三版)的知识内容框架为依托编著的。

《高等数学(三版)解题构思与技巧》(上下)在内容安排上紧扣教材的内容，在章节篇目的编排上与教材保持同步。本书主要特点有三：以简洁明快的结构分项列举《高等数学》(三版)要点、重点、难点，此为其一；针对重难点，布置例题，每题均以"解题构思"为首，引导读者分析题意，构造解题方法，纠正易见易犯错误，此为其二；采用提示和给出最终答案相结合的办法，提供《高等数学》(三版)部分习题答案，以使读者通过对此类篇章的阅读使用，有效地提高解题水平，此为其三。本书以要点重点难点为经，以精解例题为纬，立体地、多方位地勾画出高等数学的奥秘所在。读者使用本书，只要按照"先读题，再自答，最后看构思"的程序去做，一定会事半功倍。

本书内容深入浅出，解题构思叙述详尽，结构严谨，可作为非数学专业高等数学教学参考用书和自学用书。

《高等数学(三版)解题构思与技巧》(上下)选题由武汉科源技术信息公司严汛、王里策划，全书由武汉大学孙续元副教授主持编著。黄光谷先生在本书的审校方面做了一些工作，在此表示诚挚的谢意。

本书上册从第一章至第七章，与《高等数学》(三版)上册相对应；下册从第八章至第十二章，与《高等数学》(三版)下册相对应。

作　者

目　录

第一章　函数与极限

一　要点·重点·难点

(一) 要点

1. 实数及实数的集合

高等数学用到的集合主要是数集,如果没有特别声明,所提到的数都是实数.

2. 区间和邻域

(1) 区间是一类数集.

(2) 区间的分类方法主要是:按端点的去留,可划分为开区间、闭区间、半开区间;再按区间端点的性状,划分为有限区间和无限区间.

(3) 点的 δ 邻域,是一个经常用到的概念.

3. 常量和变量

4. 函数及有特殊性质的函数

(1) 函数的定义,及与定义有关的自变量、因变量、定义域、值域等概念的数学表达方式和运用,如 $y=[x]$.

(2) 函数的有界性,有界函数和无界函数.

(3) 函数的单调性,单调增加的函数和单调减少的函数.

(4) 函数的奇偶性,奇函数、偶函数和非奇非偶函数.

(5) 函数的周期性及周期函数.

5. 反函数

6. 基本初等函数及初等函数

(1) 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

(2) 复合函数.

(3) 初等函数.

7. 极限

(1) 高等数学中有各种形式的极限. 设 P 是实数或 n 维实数空间中的点，当 P 经某一指定过程趋于极限状态时，说 $f(P)$ 以 A 为极限，是指 $|f(P)-A|$ 任意小. 这是粗略的说法. 教材中就数列和函数分别给出了严格的极限概念.

(2) 无穷小，无穷大，无穷小的比较，常用的等价无穷小概念.

(3) 极限的性质，唯一性，有界性和保号性.

(4) 两个有关极限的充要条件：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A;$$

$$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(\lim\alpha=0).$$

(5) 极限存在的准则：

准则 Ⅰ：单调有界的变量必有极限；

准则 Ⅱ：如果数列 x_n,y_n 及 z_n 满足：

① $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n\qquad(n=1,2,\cdots)$；

② $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=a,\ \lim\limits_{n\to+\infty} z_n=a$，

则数列 x_n 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$.（此准则俗称"两边夹"）

(6) 两个重要的极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

(7) 极限的运算法则.

8. 函数的连续性和函数的间断

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续；在 x_0 处左连续；在 x_0 处右连续.

*(2) 函数 $f(x)$ 在区间 Ⅰ 上一致连续的定义.

(3) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，第一类间断点，第二类间断点的概念.

(4) 连续和极限的关系.

函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，反之不真.

(5) 连续函数的性质.

闭区间上的连续函数具有以下性质：

在该区间，该函数必有最大值和最小值；在该区间，该函数一定有界；设该区间为 $[a,b]$，且 $f(a)\neq f(b)$，$\forall\, c$，c 是 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一个数，$\exists\,\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=c$. 特别地，当 $f(a)\cdot f(b)<0$

时，必有 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi) = 0$. 此称为介值定理.

(6) 连续函数的运算.

连续函数的和、差、积、商(除去分母为 0 的点)乃是连续函数；连续函数的复合函数仍是连续函数；每个初等函数在其定义域内是连续函数.

（二）重点

1. 函数的概念、性质及初等函数的运算

2. 极限的概念及运算

3. 极限存在的准则和两个重要极限的证明及应用

4. 无穷小的概念及无穷小的比较

5. 函数的连续性、间断点的概念及性质

6. 闭区间上的连续函数及其性质

（三）难点

1. 正确建立极限和连续的概念，熟练地运用 ε—δ 语言描述基本概念的要点和性质

例如：$f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$，只要 $|x - x_0| < \delta$ $\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

$f(x)$ 定义在区间 (a,b) 上，$f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续 $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$，只要 $|x - x_0| < \delta$，就有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 对于 (a,b) 上一切点 x_0 都成立.

2. 各类型函数的定义域、值域的计算和函数解析式、函数图象的描述

如：符号函数 $y = \mathrm{sgn}x$ 的函数表达式为：

$$y = \mathrm{sgn}x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ -1, & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

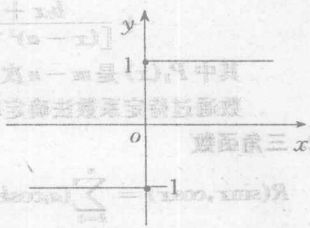


图 1－1　$y = \mathrm{sgn}x$ 的图象

定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $W = \{-1, 0, 1\}$，以及对于任何实数 x，下列关系成立：$x = \mathrm{sgn}x \cdot |x|$. 它的图象如图 1－1 所示.

3. 数列极限和函数极限的证明和运算.

在证明题中，要求极为熟练地运用不等式的概念并依据极限的 ε—δ 语

言解答、判断极限的存在与否;是否以某个由题目所指定的数量为极限;论证某个对象的极限不存在等问题.

二　重难点问题精解

(一) 初等函数的性质及其运算题精解

初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算及复合而得的函数,解题中应注意以下各种思路的灵活运用.

1. 有理函数

(1) 多项式函数:$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n(n\geqslant 0)$,$n$ 次多项式的图象称为 n 次抛物线.多项式函数又称为有理整函数,在高等数学中,常用多项式逼近的方法近似其它函数.

(2) 有理分式:$f(x)=P(x)/Q(x)$,$P(x)$、$Q(x)$ 各为 m、n 次多项式,$n\geqslant 1$.在今后求高阶导数、原函数,以及级数的展开、求和等有关有理函数的分析运算中,常常运用以下的分解技巧:

将 $Q(x)$ 作分解:$Q(x)=(x-a)^k[(x-\alpha)^2+\beta^2]^l\cdots$,则 f 有唯一部分分式分解:

$$f(x)=P_1(x)+\frac{a_k}{(x-a)^k}+\cdots+\frac{a_1}{x-a}$$

$$+\frac{b_lx+c_l}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^l}+\cdots+\frac{b_1x+c_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\cdots,$$

其中 $P_1(x)$ 是 $m-n$ 次多项式,$m<n$ 时,$P_1(x)=0$.式中各系数通过待定系数法确定取值.

2. 三角函数

$R(\sin x,\cos x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 称为“三角多项式”.应掌握化 $\sin^n x$ 和 $\cos^n x$ 为三角多项式的方法.在三角函数中,最基本的三角函数都可以通过 $\sin x$ 得到转化.如 $\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$,$\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$,三角多项式 $R(\sin x,\cos x)$ 是由基本三角函数通过有理函数 $P(u,v)$ 构成.

3. 指数函数

任何指数函数a^x都可表达成$e^{x\ln a}$这种形式(该式中,$a^x(a>0,a\neq1)$为指数函数).

4. 对数函数与反三角函数

5. 双曲函数是由指数函数复合而成的,因此,反双曲函数能以对数形式来表达.一个函数和它的反函数各自所满足的恒等式可以相互诱导求得.如:$e^{x+y}=e^x\cdot e^y\Leftrightarrow\ln(xy)=\ln x+\ln y(x>0,y>0)$,但应注意各自的定义域.

[例 1] 设 $f(x+y,x-y)=\dfrac{\arcsin(x^2-y^2)}{\sqrt{\ln(4xy)}}$,求 $f(x,y)$ 及其定义域.

解题构思

(1) 利用变量替换,设$u=x+y,v=x-y$,可求得$u^2-v^2=4xy,uv=x^2-y^2$,再通过$f(u,v)$换回$f(x,y)$.

(2) 在同一个问题中,用同一个"f"来表达的函数,如函数$f(u,v)$和函数$f(x,y)$,是同一个函数,只是在解题过程中,为推导方便起见而用不同的字母表达相同的自变量.

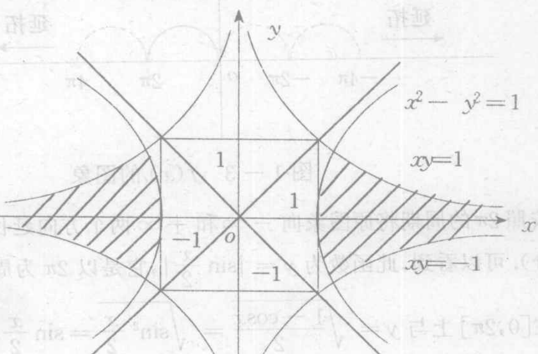


图 1－2　$f(x,y)$ 的定义域

[解] 令$u=x+y,v=x-y$得$u^2-v^2=4xy,uv=x^2-y^2$.由$f(u,v)=\dfrac{\arcsin(uv)}{\sqrt{\ln(u^2-v^2)}}$,得$f(x,y)=\dfrac{\arcsin(xy)}{\sqrt{\ln(x^2-y^2)}}$,其中,因$(x,y)$满足

$|xy|\leqslant 1, x^2-y^2>1$，所以 $f(x,y)$ 的定义域由曲线 $xy=\pm 1$ 和 $x^2-y^2=1$（不含 $x^2-y^2=1$ 上的点）所围成. 如图 1－2 所示（图中阴影区域为定义域）.

［例 2］设 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}\ (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$. 将 $f(x)$ 之定义域扩大到 $(-\infty,+\infty)$，使之成为以 2π 为周期的偶函数.

解题构思

观察所给的函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$，它的表达式可以变成 $\sqrt{\sin^2\dfrac{x}{2}}=\sin\dfrac{x}{2}$. 由于 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$，所以可在直角坐标系中直接作出其图象，此后的事，则要从图上找到答案. 事实上，用函数各种性质的几何意义帮助理解题意，寻求解题途径是高等数学中常用的方法，本题在这方面提供了一个很好的例证.

［解］由 $\dfrac{1-\cos x}{2}=\sin^2\dfrac{x}{2}\ (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$，得 $f(x)=\sqrt{\sin^2\dfrac{x}{2}}=\sin\dfrac{x}{2}\ (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$. 作图象如下（如图 1－3）.

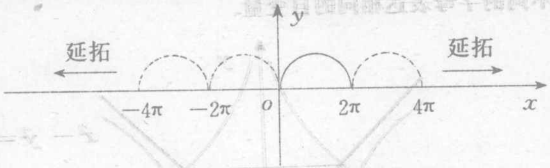


图 1－3　$f(x)$ 的图象

按照 2π 的周期将原图象向 $-\infty$ 和 $+\infty$ 两个方向延长（见图中虚线部分）. 可以看到，此函数为 $y=\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$，它是以 2π 为周期的偶函数，且在 $[0,2\pi]$ 上与 $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}=\sqrt{\sin^2\dfrac{x}{2}}=\sin\dfrac{x}{2}\ (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ 重合.

［例 3］证明函数 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 分别在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 与 $[1,+\infty)$ 上有界.

解题构思

$f(x)$ 是由基本初等函数 x 和 e^x 的反函数运算后构成的初等函数. 虽不能直接判断 $f(x)$ 在指定区间上是否单调,但 $\lg x$ 与 x 分别在相应的区间上单调递增. 一般地说,在闭区间 $[a,b]$ 上单调的函数 $\varphi(x)$,其上下界分别为 $\varphi(a)$ 和 $\varphi(b)$(谁为上界,谁为下界,由 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的递变性来定). 在此构思下,可以解答本题目.

[解] 若 $x\in[\frac{1}{2},1]$,则 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$, $1\leqslant\frac{1}{x}\leqslant 2$,从而有 $\lg\frac{1}{2}\leqslant\lg x\leqslant\lg 1=0$,又由 $\lg x\leqslant 0$ 可得

$$2\lg\frac{1}{2}\leqslant 2\lg x\leqslant\frac{\lg x}{x}\leqslant\lg x\leqslant 0,$$

所以 $f(x)=\frac{\lg x}{x}$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上有界,且上界为 0,下界为 $2\lg\frac{1}{2}$.

若 $x\in[1,+\infty)$,因为 $\frac{\lg x}{x}\geqslant 0$,故 0 是 $\frac{\lg x}{x}$ 的下界. 下面讨论它在 $[1,+\infty)$ 上是否有界. 为此,可通过直观判断,考虑 $\frac{\lg x}{x}$ 是否小于或等于 1(因为当 x 充分大时,应有 $\lg x\leqslant x\Rightarrow\frac{\lg x}{x}\leqslant 1$). 事实上,$\forall\ x\in[1,+\infty)$,$\exists\ n\in N$($N$ 是自然数集),使 $n\leqslant x<n+1$. 那么有

$$10^x\geqslant 10^n=(1+9)^n>1+9n>1+n>x,$$

所以 $\lg x<x$ 成立,即 $\frac{\lg x}{x}<1$, $\frac{\lg x}{x}$ 在 $[1,+\infty]$ 上有界.

[例 4] **作下列函数的图象**

(1) $y=[x]\cdot|\sin\pi x|$;　　(2) $y=x+\sqrt{x}\,\mathrm{sgn}(\sin\pi x)$.

解题构思

函数的表达方式主要有解析表达式、列表式和图象式、文字述说式这几种,而要分析研究某个函数的性质和特征,最好是各种表达方式都能用上. 解析式可以帮助人们了解和掌握函数的量的变化关系,列表式可以列出函数在局部对应量中的具体数值,图象式可以帮助人们通过几何直观建立函数的概念,文字述说可以引导人们综合认识函数的性质. 其中,学会用简图勾画正确的函数图象,对解答问题和观察研究对象有很重要的意义. 本例的作用正在如此. 具体说来,绘制函数的图形,应按以下步骤来完成:

(1) 充分认识、掌握好最简单,且是最基本的各类函数的图形,如幂函

数、指数函数、对数函数、三角函数、$\mathrm{sgn}x$、$[x]$，等等，熟悉它们各自的性质，包括定义域、值域、奇偶性、对称性等等. 很多较为复杂的函数的图象，都与这些既简单又基础的函数的图象和性质有内在的联系. 更有可能就是这些简单图象的和或者积.

(2) 具体绘作图象 $y = f(x)$ 的基础工作. 首先是确定该函数的存在域 $X = \{x\}$，再从其存在域 $\{x\}$ 中筛取具有典型意义的自变数值 x_1, x_2, $\cdots$, x_n，所谓典型意义，包括以下的含义：① 与坐标系特殊位置相关的点(如原点、轴上点、轴对角线上点等等)；② 所取自变量值保证是充分密集的. 其次，是按照已选定的自变数点计算出各自对应的函数 $y_i = f(x_i)(i = 1,2,\cdots,n)$，列出对应数值表. 最后，在按对应数值表提供的数值特征信息的指导下布列坐标平面 Oxy(包括原点的位置、坐标轴的长度、坐标单位的长度及范围等)，在 Oxy 上绘出一系列的点 $P_i(x_i, y_i)(i = 1,2,\cdots,n)$，并用线把各点按其相互对应的位置关系连接成图形. 必须注意的是，此图形仅仅是"图形"，并不是函数 $y = f(x)$ 的真正图象. 注意到，可以认为此连线的位置和形态蕴含着函数 $y = f(x)$ 图象中的许多中间点的位置和图象的形态.

(3) 函数 $y = f(x)$ 图象的确定. 为了得到正确的图形，应当分析和列示出该函数的一般性质. 这些性质是勾绘图象态势的制约条件. 它们包括：① 解方程式 $f(x) = 0$，找到该函数图象的所有形如 $(x_k, 0)$ 的点，这些点都是函数值为 0 的点，它们制约函数图象与 Ox 相交；② 确定使函数为正或为负的变化区域，这是制约函数与 Ox 轴位置关系的自变数范围；③ 尽可能地说明函数以单调关系表现的区间(如单调递增或单调下降等)；④ 正确判断与自变数存在无限趋势关系的制约条件(如临界点，无穷远点等)，指明函数在此种情况下的发展态势；⑤ 注意函数关于定义域内的自变数的点和定义域外的 X 轴上点的交界关系(如含端点否，含某线段否等)；⑥ 其它与函数图象有关系的辅助图形的位置及其与函数图象的位置关系(如对称线(或点)，渐近线(或点)，外围线(或点)，内承线(或点)等). 依照这些制约条件，勾绘出正确的函数图象来.

[解] (1) $y = [x] \cdot |\sin\pi x|$.

当 $x = k(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，$y = 0$.

当 $n < x < n + 1$(n 为自然数) 时，$y = n|\sin\pi x|$.

所以，该数的图象具有以下特征：

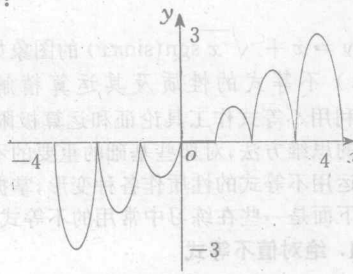


图1—4

① 函数以 $x=k(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 各自变数点为分段点，函数图象在这些点与 X 轴相交，并在各相邻两点的区段内以 n 倍的正弦值变化，特别地，在 $x\in[0,1]$ 区间上，由于 $[x]=0$，所以 $y=0$，图象为 X 轴上的一段直线段.

② 因为 y 中有 $|\sin\pi x|$ 限制 $\sin\pi x$，所以函数的正负完全由 x 值的正负来确定，即在 X 轴正向上，函数图象在 X 轴的上方；在 X 轴的负向上，函数图象在 X 轴的下方.

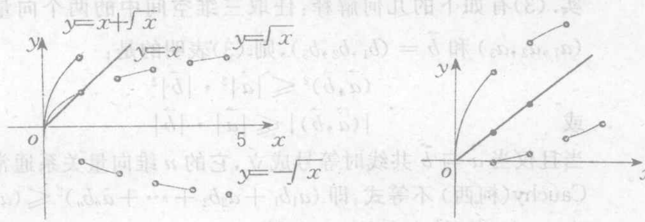
$y=[x]\cdot|\sin\pi x|$ 的图象如图 1－4 所示：

［解］(2) 分四步走：$\sin\pi x\to \operatorname{sgn}(\sin\pi x)\to \sqrt{x}\operatorname{sgn}(\sin\pi x)\to x+\sqrt{x}\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$.

当 $2k<x<2k+1(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时，因 $\sin\pi x>0$，所以 $\operatorname{sgn}(\sin\pi x)=1$，因而 $y=x+\sqrt{x}$.

当 $2k+1<x<2k+2$ 时，$y=x-\sqrt{x}$.

$y=\sqrt{x}\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$ 的图形可描述如图 1－5(1) 中黑粗线所示. 其中在 $y=x$ 上的一支系 $y=x+\sqrt{x}$ 的一段.



(1) $y=\sqrt{x}\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$ 图象　(2) $y=x+\sqrt{x}\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$ 的图象

图1－5