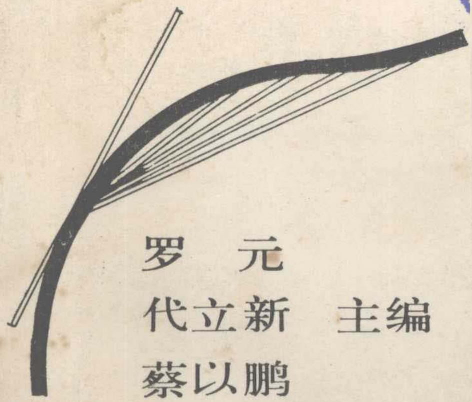
数学分析简明教程

路见可教授主审



罗　元
代立新　主编
蔡以鹏

数学分析简明教程

内容简介

全书分上下两册。上册内容有：函数，极限，函数的连续性，导数与微分，中值定理与导数的应用，实数的基本定理及闭区间上连续函数性质的证明，不定积分，定积分，定积分的应用等九章。

本书叙述细致，清晰准确，启发性强，范例较多，通俗易懂，便于自学。可作为师专、教院教材，或高师专科函授教材，也可作为工科院校（含军事院校）、职大、夜大、电大、卫电、中专教学参考书和中学教师进修自学用书。

数学分析简明教程

上　册

主编　罗　元　代立新　蔡以鹏

主审　路见可

责任编辑　韩瑞根

*

武汉工业大学出版社出版发行

新华书店湖北发行所经销

湖南省华容县印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：12.125　字数：266千字

1988年8月第1版　1988年8月第1次印刷

印数：1—7000

ISBN　7-5629-0091-4/O·0005

定价：3.30元

前　　言

本书是应师范专科学校、教育学院、高师专科函授教学的需要，根据有关《数学分析教学大纲》编写而成的，其中带• 号的内容是为适应师专、教院校内教学的需要而写进的，函授学员可不学这部分内容。

本书在初稿写出来后，先后开了四次审稿会，作过三次重大修改。在内容编排上由浅入深，由易到难，循序渐进；在文字叙述上力求通俗易懂，便于自学；阐述概念务求清晰准确，论证问题比较注意启发思路，并力求证法简捷、新颖；对抽象的问题注意尽量赋予具体化和几何直观的说明；例题较多，典型性强；习题选配难易适度，并附有答案。

本书编者（按姓氏笔划为序）有：

王心一　王良恩　王宗策　邓耀罗

代立新　冯孔荣　刘　洪　陈　芸

陈凤鸣　陈威生　李德明　李福谟

李乐成　吴楚清　罗　元　周宇光

周梦娟　张　鸣　金升鹏　高顺成

钱士武　廖茨辉　廖学余　蔡以鹏

此外，余传虎、张浩、范云升、高正兴等同志也参加过一些工作。

武汉大学数学系路见可教授主审了本书，对书稿进行了认真细致的审阅和修改，并改进了一些问题的提法和证明，使本书的质量得到了较大的提高，在此，谨致以崇高的敬意

和衷心的感谢。

本书在编写过程中，还得到了武汉大学数学系熊全淹教授、吴厚心教授以及江汉石油学院谭乃教授的热情指导，在此，一并表示衷心的感谢，

本书编者所在院校领导和数学科领导对本书的编写和出版给予了极大的支持，谨此致谢。

尽管我们得到了多方面的指导、支持和帮助，但由于我们水平有限，书中缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

1987年12月

目　录

第一章　函数……………………………………………………（1）
§1　函数概念…………………………………………………（1）
一、实数概述（1）　二、变量与函数（4）
习题（01）
§2　几类特殊的函数………………………………………（13）
一、有界函数（13）　二、单调函数　（15）
三、奇函数与偶函数（16）　四、周期函数（17）　习题（18）
§3　复合函数与反函数……………………………………（20）
一、复合函数（20）　二、反函数（21）
习题（26）
§4　初等函数…………………………………………………（27）
一、基本初等函数（27）　二、初等函数（33）
习题（35）
第二章　极限……………………………………………………（36）
§1　数列的极限………………………………………………（36）
一、数列极限的概念（36）　二、收敛数列的性质（46）
三、收敛数列的四则运算（51）　四、数列的收敛判别法
（57）　习题（63）
§2　函数的极限………………………………………………（66）
一、函数极限的概念（66）二、函数极限的性质（77）
三、函数极限与数列极限的关系（81）　四、两个重要极限（84）
习题（88）
§3　无穷小与无穷大………………………………………（91）
一、无穷小（91）　二、无穷小的比较（92）
三、无穷大（97）　习题（100）

第三章　函数的连续性……………………………（102）
§1　连续性概念……………………………（102）
一、函数在一点连续和在区间上连续的概念（102）
二、间断点及其分类（106）　习题（108）
§2　初等函数的连续性……………………（110）
一、连续函数的局部性质及运算（110）　二、初等函数的连续性（113）　习题（114）
§3　闭区间上连续函数的性质……………（115）
习题（131）
第四章　导数与微分……………………………（122）
§1　导数……………………………………（122）
一、问题的提出（122）　二、导数概念（123）
三、简单函数的导数（126）　四、不可导函数举例　（129）
习题（132）
§2　求导法则………………………………（133）
一、导数的四则运算（133）　二、反函数求导法则（135）
三、复合函数求导法则（137）　四、隐函数求导法则（141）
五、参数方程求导法则（142）　习题（144）
§3　微分……………………………………（148）
一、微分的概念（148）　二、微分运算法则（151）
三、微分在近似计算中的应用（154）　习题(156)
§4　高阶导数与高阶微分…………………（158）
一、高阶导数（158）　二、高阶微分（165）　习题（167）
第五章　中值定理与导数的应用………………（169）
§1　中值定理………………………………（169）
一、洛尔定理（169）　二、拉格朗日中值定理（172）
三、柯西中值定理（176）　习题（178）
§2　洛必达法则……………………………（180）

一、$\frac{0}{0}$型不定式（181）　二、$\frac{\infty}{\infty}$型不定式（184）
三、其它类型的不定式（185）　习题（189）
§3　泰勒公式 ……………………………………（190）
一、问题的提出（190）　二、泰勒公式（192）
三、几个基本初等函数的马克劳林公式（196）　习题（198）
§4　函数的单调性与极值 ……………………（199）
一、函数单调性的判别法（199）　二、极值判别法（202）
三、最大值与最小值求法（206）　习题（209）
§5　函数图象的讨论 …………………………（210）
一、曲线的凹凸性与拐点（210）　二、曲线的渐近线（214）
三、函数图象的讨论（217）　习题（220）
第六章　实数的基本定理及闭区间上连续函数性质的证明
……………………………………………………（222）
§1　实数的基本定理 …………………………（222）
一、闭区间套定理（223）　二、确界与确界存在定理（225）
三、聚点定理（228）　四、数列的柯西收敛准则（232）
五、有限覆盖定理（233）　习题（236）
§2　闭区间上连续函数性质的证明 …………（237）
习题（242）
第七章　不定积分 ……………………………………（243）
§1　不定积分概念与基本积分公式 …………（243）
一、原函数与不定积分（243）　二、基本积分表与积分线性运算法则（247）　习题（251）
§2　换元积分法与分部积分法 ………………（252）
一、换元积分法（252）　二、分部积分法（260）
习题（263）
§3　有理函数的积分 …………………………（265）
习题（274）

§ 4　三角函数有理式与简单无理函数的积分　(275)
一、$\int R(\sin x, \cos x)dx$型的积分(275)　二、$\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$型的积分(279)　三、$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$型的积分(280)　习题(283)
第八章　定积分……………………………………(285)
§ 1　定积分的概念……………………………………(285)
一、两个实例(285)　二、定积分概念(289)
习题(292)
§ 2　可积条件……………………………………(292)
一、大和与小和(293)　二、可积准则(297)
三、可积函数类(299)　习题(301)
§ 3　定积分的性质……………………………………(302)
习题(309)
§ 4　定积分的计算……………………………………(311)
一、用定义计算定积分(311)　二、微积分学基本定理(313)　三、定积分的换元积分法(316)
四、定积分的分部积分法(319)　习题(323)
§ 5　定积分的近似计算……………………………………(326)
一、梯形法(326)　二、抛物线法(328)　习题(330)
第九章　定积分的应用……………………………………(331)
§ 1　平面图形的面积……………………………………(331)
一、微元法(331)　二、直角坐标系下的面积公式(332)
三、极坐标系下的面积公式(337)　习题(338)
§ 2　平面曲线的弧长……………………………………(339)
一、弧长概念(339)　二、弧长公式(339)　习题(343)
§ 3　旋转体的体积和侧面积……………………………………(343)
一、已知截面面积函数的立体体积(343)　二、旋转体的体积

（345） 三、旋转体的侧面积（347） 习题（349）
§4 定积分在物理上的一些应用 ……………（350）
一、功（351） 二、液体压力（354） 三、重心（354）
习题（356）
习题答案 ……………………………………………………（358）

第一章 函 数

函数是数学分析研究的基本对象，因此课程的开始，本章将在中学的基础上，对函数进行系统复习，并作必要的补充和加深。

§1 函数概念

一、实数概述

数学分析中所用的数，如无特别声明，都指实数。我们知道，实数分为有理数与无理数。所有整数与分数统称为有理数，即凡能表示为分数p/q(p，q 为整数，$q\neq0$)形式的数称为有理数。不能表示为上述形式的数，如$\sqrt{2}$，π，$1+\sqrt{5}$等等，称为无理数。显然，有理数写成十进小数的形式，一定是有限十进小数或无限十进循环小数。由于有限十进小数可写成以0或以9为循环节的无限十进循环小数，因此，任一有理数都能表示为无限十进循环小数。由此可知，无理数写成十进小数的形式，必定是无限十进不循环小数。于是，任一实数都可用无限十进小数来表示。

实数集的性质 全体实数组成的集合称为实数集，记为R。下面列举实数集的一些主要性质：

1．**有序性** 即对任意两个实数a、b，有且仅有下列三个关系式之一成立：

$$a<b,\quad a=b,\quad a>b$$

2．**四则运算封闭性** 即对任意两个实数施行加、减、乘、除（除数不为零）运算，其结果仍是实数。

3．**稠密性** 即任意两个不相等的实数之间有有理数，也有无理数*。

4．**连续性** 借助数轴来直观地说，就是实数集恰好布满数轴既无重叠又无空隙，即任一实数都对应数轴上唯一的一点（以此实数为坐标的点）；数轴上的任一点都有唯一的实数（该点的坐标）与之对应。即实数与数轴上的点是一一对应的。

实数与数轴上的点之间的一一对应关系，把实数和数轴上的点统一起来了，这为数学分析中许多重要概念和定理的几何解释提供了基础，正因为这样，在今后的叙述中，常把"实数a"与"数轴上的点a"两种说法看作具有相同含义，而不加区别。

5．**实数的绝对值** 实数a的绝对值记为$|a|$，其定义为

$$|a|=\begin{cases} a & a\geqslant 0 \\ -a & a<0 \end{cases}$$

数a的绝对值$|a|$就是点a到原点o的距离。

由绝对值定义，直接推得下列性质1～5。

对任何实数a，恒有

1）$|a|\geqslant 0$

2）$|a|\geqslant a$，且$|a|\geqslant -a$，即$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$

3）$|a|=|-a|=\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}$

4）$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

---

*任意两个不相等的实数之间有有理数。称有理数集在实数集中的稠密性；任意两个不相等的实数之间有无理数。称无理数集在实数集中的稠密性。

5）$|1/b| = 1/|b|$　　　$(b\neq 0)$；并结合性质4可得

$$|a/b| = |a|/|b| \qquad (b\neq 0)$$

下面给出两个重要的绝对值不等式

6）$|a|\leqslant k \Longleftrightarrow -k\leqslant a\leqslant k$特别地，有

$$|a|<k \Longleftrightarrow -k<a<k$$

7） 对任意的数a和数b，恒有

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

证 上式是两个不等式的联写。先证

$$|a+b|\leqslant|a|+|b| \qquad (*)$$

由 $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$ 和 $-|b|\leqslant b\leqslant|b|$，得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|$$

再由性质(6)，得 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$

再证 $|a|-|b|\leqslant|a+b|$，即证 $|a|=|a+b|+|b|$

由于 $a=|a+b-b|=|(a+b)+(-b)|\leqslant|a+b|+|b|$

（据(•)式）。

从而有 $|a|-|b|\leqslant|a+b|$。由此可得

$$|a-b|\geqslant|a|-|b| \quad (\text{或} \quad |b|-|a|)$$

区间和邻域 实数集的任何一个子集，简称为一个数集，而区间和邻域是常用的数集。数集 $\{x\,|a<x<b\}$，称为以a、b为端点的开区间，记为(a,b)，即

$$(a,b)=\{x\,|a<x<b\}$$

数集$\{x\,|a\leqslant x\leqslant b\}$，称为以$a$、$b$为端点的闭区间，记为$[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\,|a\leqslant x\leqslant b\}$$

同理定义半开区间

$$(a,b]=\{x\,|a<x\leqslant b\}$$

和

$$[a,b)=\{x\,|a\leqslant x<b\}$$

以上区间都称为有限区间，同样定义下列无限（穷）区间

$$(a,+\infty)=\{x\,|x>a\}$$

$$[a,+\infty)=\{x\,|x\geqslant a\}$$

$$(-\infty,b)=\{x|\,x<b\}$$

$$(-\infty,b]=\{x\,|x\leqslant b\}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\,|-\infty<x<+\infty\}=\text{实数集}R$$

以点a为中心，长度为2δ的开区间$(a-\delta,a+\delta)$，称为点a的δ邻域，记作$U(a,\delta)$，简记作$U(a)$，其中点a称为邻域中心，δ称为邻域半径。

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 即$-\delta<x-a<\delta$等价于$|x-a|<\delta$，所以，

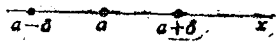


图1-1

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$$
$$=\{x|\,a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$$

即点a的δ邻域用不等式可表示为$a-\delta<x<a+\delta$ 或 $|x-a|<\delta$。几何表示如图1-1所示。

在a的δ邻域$(a-\delta,a+\delta)$内去掉a，称为点a的δ空心邻域，记作$U^0(a,\delta)$ 或 $U^0(a)$，即

$$U^0(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)-\{a\}=\{x\,|0<|x-a|<\delta\}.$$

二、变量与函数

1．常量与变量

一切事物都处在不断地运动变化之中，事物的运动，必然表现为某些量的变化。如长度、体积、重量、压力、温度、电压、电流等等，其中有的量在所考察过程中保持不变，有的量在所考察过程中可取不同的值，前者称为**常量**，

后者称为变量。应该注意，一个量是常量还是变量，要根据具体问题具体分析，如研究物体垂直下落时，就遇到以下的量：下落时间 t，下落高度 s，下落速度 v，重力加速度 g，空气阻力 f 等等。在这里，t、s、v 都是变量；严格说来，g 和 f 也是变量，但当精确度要求不太高时，g 可认为是常量($g=9.8$米/秒^2)，空气阻力也可忽略不计，即 $f=0$ 是常量。我们也可把常量看作变量的一种特殊情况，即在变化过程中恒取同一数值的变量。一个变量所能取到的全部数值所组成的数集称为这个变量的变域。

初等数学主要研究常量，高等数学主要研究变量。

2. 函数概念

在一个系统中，根据所研究问题的需要，往往出现几个变量。它们之间不是孤立的，而是相互联系、相互制约的，并按一定规律变化着。先看几例。

例1 自由落体的下落距离 s 与下落时间 t 由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

联系着，设落体着地时间为T，则对任意时间 $t\in[0,T]$，由(1)式都有距离 s 的一个值和它对应。

例2 气温T与时间t是相互联系的。把某天的气温变化

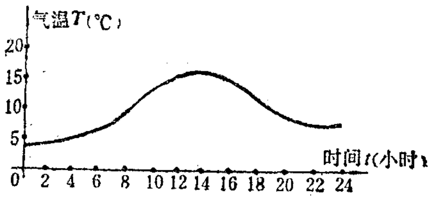


图1-2

描绘在记录纸上，如图1-2所示的曲线。

根据这个图，对于任意的时间$t\in[0,24]$，都有气温T的一个值和它相对应。

例3 在标准大气压下，温度T与水的体积V互相联系着。实测如下表：（部分T-V值）

温度°C	0	2	4	6	8	10	12	14	…
体积(cm^3)	100	99.990	99.987	99.990	99.998	100.012	100.032	100.057	…

对于任意的温度$T\in[0,100]$可通过实测得出体积V的一个值和它相对应。

上述三例，实际意义各不相同，变量之间相互联系的方式也不同，但它们的变化有一个共同的特征：当一变量变化时，按照某种规律另一变量也跟着变化，并且对于其中一变量在其变域内的每一个值，另一变量都有唯一的一个值与之对应。撇开变量的具体含义，这实质上就是两个数集（作为第一个变量的变域的数集与第二个变量所在的数集）之间的一种对应关系。上述特征抽象出来，便得到函数概念如下

定义 设有两个数集D和M，若按某一确定的对应关系f，对D内每一个数x都有M中的唯一的一个数y与之对应，则称f是定义在D上的函数，记作

$$f: D\longrightarrow M$$

与数x对应的数y称为f在x的函数值，记作$f(x)$，即$y=f(x)$。x称为自变量，y称为因变量。数集D称为函数f的定义域，全体函数值的集合称为函数f的**值域**，记作$f(D)$；即

$$f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}\subset M$$

根据定义不难看出，前面三例都是函数的实例。

为深入理解函数概念，作如下几点说明：

1）函数符号　符号“$f: D\to M$”表示定义在数集D上（其值落在M中）的函数 f，清楚明确，与表示从集合 D到集合M(D、M不一定是数集时)的映射 f 所用符号一致，因此在现代函数概念中常采用上述函数符号，但对讨论具体函数时用此符号就不方便了。由函数定义可知，定义域D和对应法则 f 是确定函数的两个要素（值域$f(D)$随D与f而定），从而定义在D上的函数f就可简记为

$$y=f(x)\quad x\in D$$

并简单地说成“函数$y=f(x)$”或“函数$f(x)$”。

习惯上，也称“y是x的函数”。

在同一问题中涉及到几个函数时，则使用的符号应有所区别，以避免混淆。如可用 $y=f(x),y=g(x),y=\varphi(x)$ 等等，也可用 $y=f_1(x),y=f_2(x)$这样的加下标的办法来以示区别。

由于确定函数的二个要素是定义域和对应法则，因此自变量和因变量选用什么记号来表示就无关紧要，如 $y=f(x),x\in D$与$u=f(t)$，$t\in D$表示同一个函数。

2）函数的表示法　函数的表示法就是表示对应法则f的方法，表示f通常有三种方法：(1) 解析法（又称公式法），就是用解析式子表示f。如例1，f是一组运算：$\frac{1}{2}g$ $(\quad)^2$，即t的平方乘以$\frac{1}{2}g$；再如函数$y=3x^4+x^2+5$，f是一组运算：$3(\quad)^4+(\quad)^2+5$。(2)图象法，就是用坐标平面上的图象表示f。如例2，f是图1-2所示的曲线。（3）