运筹与管理科学丛书 2

博弈论与非线性分析

俞 建 著

科学出版社
www.sciencep.com

运筹与管理科学丛书 2

博弈论与非线性分析

俞 建 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书主要应用非线性分析的理论和方法，对博弈论中Nash平衡点的存在性，尤其是稳定性进行深入研究. 由于平衡点的研究与最优化问题、不动点问题、变分与拟变分不等式问题等都有密切联系，本书也对这些非线性问题进行了统一且有一定深度的研究. 内容包括：拓扑空间与度量空间、集值分析、不动点定理与Ky Fan不等式、Nash平衡点的存在性、Arrow-Debreu定理、Nash平衡点集和若干非线性问题解集的通有稳定性、非线性问题解的通有唯一性、Nash平衡点集和若干非线性问题解集本质连通区的存在性、有限理性与平衡点集的稳定性、良定问题.

本书可作为基础数学、应用数学及经济管理有关专业的高年级本科生或研究生教材，也可供从事数学及经济管理专业的工作者研究参考.

图书在版编目(CIP)数据

博弈论与非线性分析/俞建著. —北京：科学出版社，2008

(运筹与管理科学丛书；2)

ISBN 978-7-03-020720-3

I. 博… II. 俞… III. ①对策论-研究 ②非线性-泛函分析-研究 IV. O225 O177.91

中国版本图书馆CIP数据核字(2008) 第186182号

责任编辑：赵彦超／责任校对：陈玉凤
责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年2月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008年2月第一次印刷 印张：15
印数：1—3 000 字数：273 000

定价：40.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《运筹与管理科学丛书》序

运筹学是运用数学方法来刻画、分析以及求解决策问题的科学. 运筹学的例子在我国古已有之, 春秋战国时期著名军事家孙膑为田忌赛马所设计的排序就是一个很好的代表. 运筹学的重要性同样在很早就被人们所认识, 汉高祖刘邦在称赞张良时就说道:"运筹帷幄之中, 决胜千里之外."

运筹学作为一门学科兴起于第二次世界大战期间, 源于对军事行动的研究. 运筹学的英文名字 Operational Research 诞生于 1937 年. 运筹学发展迅速, 目前已有众多的分支, 如线性规划、非线性规划、整数规划、网络规划、图论、组合优化、非光滑优化、锥优化、多目标规划、动态规划、随机规划、决策分析、排队论、对策论、物流、风险管理等.

我国的运筹学研究始于 20 世纪 50 年代, 经过半个世纪的发展, 运筹学队伍已具相当大的规模. 运筹学的理论和方法在国防、经济、金融、工程、管理等许多重要领域有着广泛应用, 运筹学成果的应用也常常能带来巨大的经济和社会效益. 由于在我国经济快速增长的过程中涌现出了大量迫切需要解决的运筹学问题, 因而进一步提高我国运筹学的研究水平、促进运筹学成果的应用和转化、加快运筹学领域优秀青年人才的培养是我们当今面临的十分重要、光荣、同时也是十分艰巨的任务. 我相信,《运筹与管理科学丛书》能在这些方面有所作为.

《运筹与管理科学丛书》可作为运筹学、管理科学、应用数学、系统科学、计算机科学等有关专业的高校师生、科研人员、工程技术人员的参考书, 同时也可作为相关专业的高年级本科生和研究生的教材或教学参考书. 希望该丛书能越办越好, 为我国运筹学和管理科学的发展做出贡献.

袁亚湘

2007 年 9 月

前　言

我们知道, 博弈论是随着 von Neumann 和 Morgenstern 在 1944 年出版的名著《博弈论与经济行为》[1] 而宣告诞生的. 他们主要研究了矩阵博弈: 设局中人 1 有 m 个策略 $\{a_1,\cdots,a_m\}$, 局中人 2 有 n 个策略 $\{b_1,\cdots,b_n\}$, 局中人 1 选择策略 a_i, 局中人 2 选择策略 b_j, 局中人 1 从局中人 2 得到的支付为 c_{ij}, 因为所有 $c_{ij}(i=1,\cdots,m;$ $j=1,\cdots,n)$ 构成一个矩阵, 这一博弈就称为矩阵博弈. 每个局中人都是理性的, 都希望能获得最大的利益, 因此, 如果存在 $i^*\in\{i=1,\cdots,m\}$, $j^*\in\{j=1,\cdots,n\}$, 使

$$c_{i^*j^*}=\max_{1\leqslant i\leqslant m}c_{ij^*},$$

$$c_{i^*j^*}=\min_{1\leqslant j\leqslant n}c_{i^*j}.$$

则局中人 1 选择策略 a_{i^*}, 局中人 2 选择策略 b_{j^*}, 博弈就形成平衡, 因为谁也不能通过单独改变自己的策略而使自己获得更大的利益, 可惜并不能保证这样的 i^* 和 j^* 一定会存在. 在这种情况下, 每个局中人都将尽最大努力不让对手猜出自己将采取的策略, 他们可以用随机方法来确定自己的策略. 将 $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$ 和 $B=\{b_1,\cdots,b_n\}$ 分别称为局中人 1 和局中人 2 的纯策略集, 而将 $X=\left\{x=(x_1,\cdots,x_m):x_i\geqslant 0,\sum\limits_{i=1}^m x_i=1\right\}$ 和 $Y=\left\{y=(y_1,\cdots,y_n):y_i\geqslant 0,\sum\limits_{i=1}^n y_i=1\right\}$ 分别称为局中人 1 和局中人 2 的混合策略集 (X 和 Y 分别是局中人 1 和局中人 2 在 A 和 B 上的所有概率分布的集合). 如果局中人 1 选择混合策略 $x=(x_1,\cdots,x_m)\in X$, 局中人 2 选择混合策略 $y=(y_1,\cdots,y_n)\in Y$(理解为局中人 1 以 x_1 的概率选择纯策略 $a_1,\cdots,$ 以 x_m 的概率选择纯策略 a_m; 局中人 2 以 y_1 的概率选择纯策略 $b_1,\cdots,$ 以 y_n 的概率选择纯策略 b_n), 并假定他们的选择是独立的, 则局中人 1 从局中人 2 得到的期望支付为 $\sum\limits_{i=1}^m\sum\limits_{j=1}^n c_{ij}x_iy_j$. 如果存在 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_m^*)\in X$, $y^*=(y_1^*,y_2^*,\cdots,y_n^*)\in Y$, 使

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}x_i^*y_j^*=\max_{x\in X}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}x_iy_j^*,$$

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}x_i^*y_j^*=\min_{y\in Y}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}x_i^*y_j,$$

则称 (x^*, y^*) 是此矩阵博弈的一个鞍点或一个解或一个平衡点. 此时, 局中人 1 选择混合策略 x^*, 局中人 2 选择混合策略 y^*, 博弈就形成平衡, 因为谁也不能通过单独改变自己的策略来使自己获得更大的利益. von Neumann 证明了对任何矩阵博弈, 鞍点必存在.

因矩阵博弈的鞍点必存在, 则容易证明

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_iy_j=\min_{y\in Y}\max_{x\in X}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_iy_j.$$

这一结果称为最大最小定理.

年轻的 Nash 对 von Neumann 矩阵博弈的模型在两个方面作了推广：将 2 个局中人推广到 n 个局中人, 尤其是将支付的零和 (局中人支付之和等于零) 推广到非零和 (局中人支付之和可以不为零), 这种博弈称为 n 人有限非合作博弈. 有限是指每个局中人的纯策略均为有限个; 非合作是指不允许局中人结盟, 也不允许局中人对他们的支付进行再分配. 以两人有限非合作博弈 (双矩阵博弈) 为例来说明：设 $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$ 和 $B=\{b_1,\cdots,b_n\}$ 分别是局中人 1 和局中人 2 的纯策略集, 如果局中人 1 选择纯策略 a_i, 局中人 2 选择纯策略 b_j, 局中人 1 和局中人 2 得到的支付分别为 c_{ij} 和 d_{ij}(因所有 c_{ij} 和 d_{ij} 分别构成两个矩阵, 故这一博弈就称为双矩阵博弈), 未要求对任意 $i=1,\cdots,m$ 和任意 $j=1,\cdots,n$ 都有 $c_{ij}+d_{ij}=0$, 这是矩阵博弈的要求, 允许对某些 i 和 j 有 $c_{ij}>0$, $d_{ij}>0$, 此种情况称为双赢. 这样, 如果局中人 1 选择混合策略 $x=(x_1,\cdots,x_m)\in X$, 局中人 2 选择混合策略 $y=(y_1,\cdots,y_n)\in Y$, 则局中人 1 和局中人 2 得到的期望支付分别是 $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}x_iy_j$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}d_{ij}x_iy_j$, 如果存在 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_m^*)\in X$, $y^*=(y_1^*,y_2^*,\cdots,y_n^*)\in Y$, 使

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_i^*y_j^*=\max_{x\in X}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_iy_j^*,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_i^*y_j^*=\max_{y\in Y}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_i^*y_j,$$

则称 (x^*, y^*) 为此双矩阵博弈的一个 Nash 平衡点, 此时, 无论是局中人 1 还是局中人 2, 谁都不能通过单独改变自己的策略而使自己获得更大的利益. Nash 证明了对任何 n 人有限非合作博弈 (双矩阵博弈为其特例), 平衡点必存在. 与矩阵博弈的鞍点一样, n 人有限非合作博弈的平衡点一般也不具有唯一性.

博弈论与经济学的关系极为密切, von Neumann 等在《博弈论与经济行为》中就指出：“博弈论是建立经济行为的最恰当的方法”. 在此之后, 博弈论不断有所发展, 尤其是从 20 世纪 70 年代中期之后更是发展迅速. 1994 年, 在 von Neumann 等

人的名著出版整整 50 年后, Nobel 经济奖授予 Harsanyi, Nash 和 Selten 三位博弈论学者, 主要是因为他们三人在非合作博弈平衡分析的研究中作出了开创性的贡献, 也正是因为这次获奖, 才确认了博弈论对经济理论的核心重要性. 2005 年, Nobel 经济奖又授予 Aumann 和 Schelling 两位博弈论学者, 主要是因为他们二人在冲突与合作的研究中作出了开创性的贡献. 应该指出, 1996 年、2001 年和 2007 年 Nobel 经济奖获得者的获奖工作虽然属于信息经济学的领域, 但是在他们的研究中都成功地应用了博弈论的思想和方法.

博弈论与经济学的关系极为密切, 这是可以理解的, 但是博弈论与非线性分析的关系又如何呢? 二者也是非常密切的.

首先, 在文献 [1] 中, von Neumann 是应用凸分析中的凸集分离定理证明矩阵博弈鞍点存在性的, 而在 1937 年发表的一篇重要论文中[2], 他应用了以下引理:

设 $X \subset R^m$, $Y \subset R^n$ 是两个非空有界闭凸集, $A, B \subset X \times Y$ 是两个非空闭集. 如果 $\forall x \in X$, $A(x) = \{y \in Y : (x,y) \in A\}$ 是非空凸集, $\forall y \in Y$, $B(y) = \{x \in X : (x,y) \in B\}$ 是非空凸集, 则 $A \cap B \neq \varnothing$.

在文献 [3], [4] 中, Nash 则分别应用了 Brouwer 不动点定理和 Kakutani 不动点定理来证明 n 人有限非合作博弈平衡点的存在性.

Brouwer 不动点定理　设 $C \subset R^n$ 是非空有界闭凸集, 映射 $f : C \to C$ 连续, 则存在 $x^* \in C$, 使 $x^* = f(x^*)$.

Kakutani 不动点定理　设 $C \subset R^n$ 是非空有界闭凸集, 从 C 到 C 中非空子集的集值映射 F 上半连续, 且 $\forall x \in C$, $F(x)$ 是 C 中的非空闭凸集, 则存在 $x^* \in C$, 使 $x^* \in F(x^*)$.

我们知道, Kakutani 不动点定理是应用 Brouwer 不动点定理来证明的, 它也是 Brouwer 不动点定理的推广[5], 而 Kakutani 不动点定理与 von Neumann 引理也是等价的[6]. 这样, 无论是 von Neumann 还是 Nash, 两位大师对博弈论研究的奠基之作就与凸分析、集值映射、不动点定理, 与非线性分析紧密联系在一起了.

在文献 [1] 之后, 很快就有工作将矩阵博弈推广到两人零和博弈.

设 X 和 Y 分别是局中人 1 和局中人 2 的策略集, 当局中人 1 选择策略 $x \in X$, 局中人 2 选择策略 $y \in Y$, 则局中人 1 从局中人 2 获得的支付为 $f(x,y)$(此时局中人 2 从局中人 1 获得的支付为 $-f(x,y)$, 支付和为零, 故称为两人零和博弈). 如果存在 $x^* \in X$, $y^* \in Y$, 使

$$f(x^*, y^*) = \max_{x \in X} f(x, y^*),$$
$$f(x^*, y^*) = \min_{y \in Y} f(x^*, y),$$

则称 (x^*, y^*) 为此两人零和博弈的平衡点, 此时 $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$, 有

$$f(x, y^*) \leqslant f(x^*, y^*) \leqslant f(x^*, y),$$

即 (x^*, y^*) 是 f 在 $X \times Y$ 中的鞍点.

在文献 [3], [4] 之后, 很快也就有工作将 n 人有限非合作博弈推广到以下 n 人非合作博弈与广义博弈.

n 人非合作博弈: 设 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ 是局中人的集合, $\forall i \in N$, 设 X_i 是第 i 个局中人的策略集, $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$, $f_i : X \to R$ 是第 i 个局中人的支付函数. $\forall i \in N$, 记 $\hat{i} = N \backslash i$. 如果存在 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) \in X$, 使 $\forall i \in N$, 有

$$f_i(x_i^*, x_{\hat{i}}^*) = \max_{u_i \in X_i} f_i(u_i, x_{\hat{i}}^*),$$

则称 x^* 为此 n 人非合作博弈的 Nash 平衡点.

广义博弈: 设 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ 是局中人的集合, $\forall i \in N$, 设 X_i 是第 i 个局中人的策略集, G_i 是第 i 个局中人的可行策略映射, 它是从 $X_{\hat{i}}$ 到 X_i 中非空子集的集值映射, $f_i : X \to R$ 是第 i 个局中人的支付函数. 如果存在 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) \in X$, 使 $\forall i \in N$, 有 $x_i^* \in G_i(x_{\hat{i}}^*)$, 且

$$f_i(x_i^*, x_{\hat{i}}^*) = \max_{u_i \in G_i(x_{\hat{i}}^*)} f_i(u_i, x_{\hat{i}}^*),$$

则称 x^* 为此广义博弈的平衡点. 显然, 如果 $\forall i \in N$, $\forall x_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}}$, 有 $G_i(x_{\hat{i}}) = X_i$, 则广义博弈的平衡点即为非合作博弈的 Nash 平衡点.

1954 年, Arrow 和 Debreu[7] 正是应用广义博弈平衡点的存在性证明了数理经济学中一般均衡的存在性. Arrow 和 Debreu 也主要是因为这一杰出的工作而分别在 1972 年和 1983 年获得 Nobel 经济奖.

当然, 在何种假设条件下, 以上两人零和博弈、n 人非合作博弈和广义博弈的平衡点存在, 这必须应用非线性分析的理论和方法深入研究.

另一方面, 我们知道, 无论是 von Neumann 还是 Nash, 在他们的模型中都假设每个局中人都是完全理性的, 是绝顶聪明的, 是不会犯错误的, 他们都能够在各自策略集中选择对自己最为有利的策略. 这一假设太理想太苛刻了, 而早在 1958 年, Simon (1978 年 Nobel 经济奖获得者) 就提出了 "有限理性" 及寻求 "满意解" 的概念[8]. 1975 年, Selten[9] 更提出了 Nash 平衡点的精炼问题, 仍以双矩阵博弈为例来说明.

Selten 假设局中人 1 和局中人 2 都不是完全理性的, 而是有限理性的, 是可能犯错误的, 在他们作出决策时可能会发生某种 "颤抖". 设 $\varepsilon > 0$ 足够小 (满足 $m\varepsilon < 1$, $n\varepsilon < 1$), 而

$$X(\varepsilon) = \left\{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) : x_i \geqslant \varepsilon, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}$$ 是扰动博弈中局中人 1 的策略集,

$Y(\varepsilon)=\left\{y=(y_1,y_2,\cdots,y_n):y_i\geqslant\varepsilon,\sum_{j=1}^{n}y_i=1\right\}$是扰动博弈中局中人 2 的策略集.
扰动博弈必存在 Nash 平衡点 $(x(\varepsilon),y(\varepsilon))$, 如果 (x^*,y^*) 是当 $\varepsilon_k\to 0$ 时 $(x(\varepsilon_k),y(\varepsilon_k))$ 的一个极限点, 即 (x^*,y^*) 是当局中人 1 和局中人 2 犯错误的概率逐渐减小, "颤抖"逐渐消失时被扰动博弈平衡点的极限点, 则称 (x^*,y^*) 是原博弈的一个完美平衡点. Selten 证明了完美平衡点必存在. 这种经扰动而回复的平衡点, 当然具有一种稳定性. 用这种方法, Selten 就删除了一些不稳定的平衡点, 使太多的 Nash 平衡点得到了一种精炼.

在 Selten 之后, 考虑到各种形式的颤抖和扰动, 又有各种 Nash 平衡点的精炼概念[10~12], 应当指出的是中国数学家吴文俊和江加禾早在 1962 年就给出了一个深刻的结果[13]. 考虑到支付函数的扰动, 他们对 n 人有限非合作博弈引入了本质平衡点和本质博弈的概念, 并证明了任意有限非合作博弈都可以用一列本质博弈来任意逼近. 文献 [13] 和 [9] 的联系可见文献 [14].

无论是 Selten 等人的工作还是吴文俊等人的工作, 都是针对 n 人有限非合作博弈的, 对于一般的 n 人非合作博弈和广义博弈等平衡点的稳定性问题, 必须应用非线性分析的理论和方法深入研究.

1986 年, 为了更加全面地研究 Nash 平衡点的稳定性, Kohlberg 和 Mertens[15] 提出了这样的问题: 一个稳定的 Nash 平衡点应该满足哪些必要的条件? 这是公理化的方法, 他们希望用这种方法对平衡点进行精炼. 通过细致的论证, 他们得出结论: 一般还不能将它精炼成单点集, 它只能是集值的, 是所谓平衡点集的本质连通区. 因为在 n 人有限非合作博弈中, 每个局中人的策略集均为特殊的单纯形, 支付函数也均为特殊的多项式, 他们应用代数几何的方法证明了: 任一 n 人有限非合作博弈, 其平衡点集的连通区必为有限个, 且至少有一个是本质的 (1963 年, 江加禾也证明了本质连通区的存在性[16]). 这一工作影响很大, 而他们的工作又被文献 [17], [18] 等改进和推广.

对于一般的 n 人非合作博弈和广义博弈等, 其平衡点集的本质连通区是否存在, 这也必须应用非线性分析的理论和方法, 深入研究.

这本书的书名是博弈论与非线性分析, 更具体一些, 应该是无限维空间中的平衡理论, 包括平衡点的存在性、唯一性和稳定性的研究. 由于平衡点的研究与最优化问题、不动点问题、变分与拟变分不等式问题等都紧密联系在一起, 本书也会对这些相关问题进行一定深度的研究. 本书将对问题的背景作必要的阐述, 更强调问题之间的联系及统一处理的模式, 而重点不在于对一些结果不断的改进和推广.

本书共分 10 章, 主要内容大致安排如下: 第 1 章介绍拓扑空间与度量空间, 是本书的预备知识; 第 2 章介绍集值分析, 主要是集值映射的连续性; 第 3 章介绍不

动点定理与 Ky Fan 不等式, 这是证明博弈论中平衡存在性的主要工具, 同时还介绍了变分与拟变分不等式等内容; 第 4 章是博弈论中平衡点的存在性研究, 包括 n 人非合作博弈平衡点的存在性、鞍点的存在性、广义博弈平衡点的存在性、多目标博弈平衡点的存在性等; 第 5 章介绍 Arrow-Debreu 定理, 证明了数理经济学中一般均衡的存在性, 同时给出了 Gale-Nikaido-Debreu 引理的一些推广; 第 6 章给出了"通有"(generic) 稳定性的概念, 证明了在 Baire 分类意义上, 大多数的 n 人非合作博弈、广义博弈和多目标博弈, 其平衡点集都是稳定的, 还用这种方法研究了多目标最优化问题的弱有效解集和微分包含的解集等, 都具有这种稳定性质; 第 7 章给出了 "通有" 唯一性的概念, 证明了在 Baire 分类意义上, 大多数最优化问题的解是唯一的, 大多数两人零和博弈的鞍点也是唯一的; 第 8 章是非线性问题解集本质连通区的研究, 证明了 n 人非合作博弈、广义博弈和多目标博弈平衡点集本质连通区的存在性, 同时还证明了不动点集和 KKM 点集等本质连通区的存在性; 第 9 章有限理性与平衡点集的稳定性和第 10 章良定问题都是稳定性研究的相关课题.

感谢国家教育部年轻优秀教师基金和国家自然科学基金的资助, 感谢贵州省科技厅和贵州大学的支持和帮助. 我曾于 1988~1989 年在美国哈佛大学经济系、1992~1993 年和 1999 年在加拿大达尔豪希大学数学与统计系、1996 年在澳大利亚昆士兰大学数学系做研究工作, 感谢 A Mas-Colell 教授、Kok Keong Tan (陈国强) 教授和 Xian Zhi Yuan (袁先智) 教授的邀请, 本书中有相当一部分内容是与陈教授和袁教授合作研究的结果. 感谢我的学生向淑文博士、罗群博士、杨辉博士、林志博士、周永辉博士和俞超, 本书中也有相当一部分内容是与他们合作研究的结果. 最后, 更要感谢我的母亲章学谢女士和妻子李静娥女士长期来对我的理解、鼓励、支持和帮助.

本书主要内容曾分别在中国科学院数学与系统科学研究院、南京大学数学系、浙江大学数学系、上海大学数学系、北京交通大学应用数学系、贵州大学数学系、武汉大学高级经济研究中心及中国科学院科技政策与管理科学研究所等单位讲授, 得到不少老师和同学的指正, 对此表示感谢. 本书在历次讲稿的基础上反复修改, 融入了一些新的思想. 尽管如此, 错误肯定不少, 敬请各位老师和同学们不吝赐教.

最后, 关于博弈论还想说几句. 博弈论近些年来发展很快, 它向数学提出了很多新的研究课题. 而博弈论的应用广泛而深刻, 不仅对经济学是如此, 因为博弈论抽象地分析利益冲突问题, 它的应用就远远超出了经济学的范围, 已经成为其他许多人文社会科学领域中普遍认可的、充满生机活力的工具和语言. 在这个意义上, 博弈论的发展和应用也充分展示了数学与经济学, 乃至许多人文社会科学的交叉与融合, 这是我们应当给予高度关注的.

作　者

目　录

第 1 章　拓扑空间与度量空间 ······ 1

1.1　拓扑空间 ······ 1

1.2　可数性与分离性 ······ 4

1.3　紧性与连通性 ······ 8

1.4　度量空间 ······ 16

1.5　线性拓扑空间 ······ 21

第 2 章　集值分析 ······ 33

2.1　集网或集列的收敛性 ······ 33

2.2　集值映射的连续性 ······ 39

2.3　集值映射的通有连续性 ······ 46

2.4　集值映射的连续选取与连续逼近 ······ 48

第 3 章　不动点定理与 Ky Fan 不等式 ······ 51

3.1　Brouwer 不动点定理与 Kakutani 不动点定理 ······ 51

3.2　Ky Fan 不等式 ······ 57

3.3　若干改进与推广 ······ 70

第 4 章　Nash 平衡点的存在性 ······ 74

4.1　矩阵博弈、连续博弈和 n 人有限非合作博弈平衡点的存在性 ······ 74

4.2　n 人非合作博弈 Nash 平衡点的存在性 ······ 83

4.3　鞍点的存在性 ······ 95

4.4　广义博弈平衡点的存在性 ······ 99

4.5　多目标博弈平衡点的存在性 ······ 100

4.6　集值映射准鞍点的存在性 ······ 110

4.7　多主从博弈平衡点的存在性 ······ 113

第 5 章　Arrow-Debreu 定理 ······ 117

5.1　Arrow-Debreu 模型 ······ 117

5.2　超额需求映射的方法 ······ 125

5.3　Gale-Nikaido-Debreu 引理的推广 ······ 126

第 6 章　Nash 平衡点集和若干非线性问题解集的通有稳定性 ······ 132

6.1　n 人非合作博弈 Nash 平衡点集的通有稳定性 ······ 132

6.2　统一模式：非线性问题解集的通有稳定性 ······ 137

6.3　广义博弈平衡点集的通有稳定性 …… 141
6.4　不动点集的通有稳定性 …… 142
6.5　Ky Fan 点集和拟变分不等式解集的通有稳定性 …… 145
6.6　向量值函数的 Ky Fan 点集和多目标博弈的弱 Pareto-Nash 平衡点集的通有稳定性 …… 148
6.7　多目标最优化问题弱有效解集的通有稳定性 …… 153
6.8　微分包含解集的通有稳定性 …… 154
6.9　KKM 点集的通有稳定性 …… 156
第 7 章　非线性问题解的通有唯一性 …… 158
7.1　最优化问题解的通有唯一性 …… 158
7.2　鞍点的通有唯一性 …… 160
第 8 章　Nash 平衡点集和若干非线性问题解集本质连通区的存在性 …… 165
8.1　n 人非合作博弈 Nash 平衡点集本质连通区的存在性 …… 165
8.2　统一模式：非线性问题解集本质连通区的存在性 …… 169
8.3　广义博弈平衡点集本质连通区的存在性 …… 170
8.4　不动点集本质连通区的存在性 …… 173
8.5　多目标博弈弱 Pareto-Nash 平衡点集的本质连通区的存在性 …… 176
8.6　KKM 点集本质连通区的存在性 …… 179
8.7　n 人非合作博弈 Nash 平衡点集本质连通区的存在性 (续) …… 182
8.8　统一模式：本质连通区的稳定性 …… 184
第 9 章　有限理性与平衡点集的稳定性 …… 187
9.1　有限理性与 Nash 平衡点集的稳定性 …… 187
9.2　有限理性与弱 Pareto-Nash 平衡点集的稳定性 …… 196
9.3　改进与推广 …… 203
第 10 章　良定问题 …… 211
10.1　统一模式：Tykhonov 良定和 Hadamard 良定问题 …… 211
10.2　应用：最优化问题和鞍点问题 …… 212
10.3　改进与推广 …… 214
参考文献 …… 216
《运筹与管理科学丛书》已出版书目 …… 223

第 1 章　拓扑空间与度量空间

本书的预备知识是有关拓扑空间、度量空间以及线性拓扑空间的一些最基本的概念, 本章对这一部分内容作简明扼要的介绍, 主要参考了文献 [19]~[23].

1.1　拓 扑 空 间

关于集合、子集、集合的并集、交集与余集等概念假定读者已熟悉. 以下是著名的 De Morgan 公式, 证明是简单的, 今后要多次用到.

设 $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是集合 X 的一族子集, 其中 Λ 是指标集, 可以是有限集和无限集, 则

$$X - \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (X - A_\lambda),$$

$$X - \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\lambda} (X - A_\lambda).$$

设 D 是一个非空集合, $\prec$ 是 D 中的一个二元关系, 如果 $\prec$ 具有下列性质: (1) $\forall\alpha \in D$, $\alpha \prec \alpha$; (2) $\forall\alpha,\beta \in D$, 如果 $\alpha \prec \beta$ 且 $\beta \prec \alpha$, 则 $\alpha = \beta$; (3) $\forall\alpha,\beta,\gamma \in D$, 如果 $\alpha \prec \beta, \beta \prec \gamma$, 则 $\alpha \prec \gamma$, 则称 $\prec$ 是 D 中的半序. 如果集合 D 中有半序, 就称 D 是一个半序集.

设 D 是一个半序集, $D_1 \subset D$, 如果 $\exists\beta \in D$, 使 $\forall\alpha \in D_1$, 有 $\alpha \prec \beta$, 则称 β 是 D_1 的上界. 如果 $\forall\alpha,\beta \in D_1$, $\alpha \prec \beta$ 和 $\beta \prec \alpha$ 中至少有一个成立, 则称 D_1 是 D 的全序子集. $\beta \in D$, 如果当 $\alpha \in D$ 且 $\beta \prec \alpha$ 时必有 $\alpha = \beta$, 则称 β 是 D 中的极大元.

以下是著名的 Zorn 引理, 今后也要用到.

设 D 是一个半序集, 如果 D 的任何全序子集都有上界, 则 D 中必有极大元.

注意到如果 D 中有极大元, 一般不一定是唯一的.

设 X 是一个非空集合, τ 是 X 中的一族子集, 如果它满足

(1) X 和 $\varnothing$ 都属于 τ;

(2) τ 中任意个集的并集属于 τ;

(3) τ 中有限个集的交集属于 τ,

则称 τ 是 X 上的一个拓扑, (X,τ) 是一个拓扑空间, 简记为 X, τ 中的成员称为 X 中的开集. 这样, 在拓扑空间 X 中,

(1) X 和 $\varnothing$ 都是开集;

(2) 任意个开集的并集是开集;

(3) 有限个开集的交集是开集.

设 τ_1 和 τ_2 是 X 中的两个拓扑, 如果 $\tau_1 \subset \tau_2$, 则称拓扑 τ_1 比 τ_2 更粗或 τ_2 比 τ_1 更细.

设 $\tau_1 \subset \tau$, 如果对 X 中的任意开集 U 及任意 $x \in U$, 都存在 $B \in \tau_1$, 使 $x \in B \subset U$, 则称 τ_1 是 X 中的一个基, 或者 τ 是由 τ_1 生成的拓扑.

开集的余集称为闭集, 应用 De Morgan 公式容易证明:

(1) X 和 $\varnothing$ 都是闭集;

(2) 任意个闭集的交集是闭集;

(3) 有限个闭集的并集是闭集.

设 $A \subset X$ 是一个非空子集, $x \in A$, 如果存在开集 U, 使 $x \in U \subset A$, 则称 x 是 A 的内点, A 是 x 的邻域. 显然, 邻域不一定是开集, 而开集中任何一点都是它的内点. A 中所有内点的集合记为 $\mathrm{int}A$, 这样, 如果 $x \in \mathrm{int}A$, 则存在开集 U, 使 $x \in U \subset \mathrm{int}A$, $\mathrm{int}A$ 必是开集. 包含 x 的开集称为 x 的开邻域. 如果对 $x \in X$ 的任何开邻域 $U(x)$, 都有 $U(x) \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing$, 则称 x 是 A 的聚点.

设 D 是一个半序集, 如果 $\forall \alpha, \beta \in D$, $\exists \gamma \in D$, 使 $\alpha \prec \gamma, \beta \prec \gamma$, 则称 D 是一个有向集. 设 X 是一个拓扑空间, D 是一个有向集, $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ 就称为 X 中的一个网, 简记为 $\{x_\alpha\}$. 显然, 当 D 是自然数集且按 "大于或等于" 关系所成的有向集时, 网即为序列. $x \in X$, 如果对 x 的任何开邻域 $U(x)$, $\exists \alpha_0 \in D$, 使 $\forall \alpha \succ \alpha_0$, 有 $x_\alpha \in U(x)$, 则称网收敛于 x, 记为 $x_\alpha \to x$.

定理 1.1.1　设 X 是一个拓扑空间, $A \subset X$ 是一个非空子集, 如果 $x \in X$ 是 A 的聚点, 则存在 A 中的一个网 $\{x_\alpha\}$, 使 $x_\alpha \to x$.

证明　记 $x \in X$ 的开邻域全体为 D, $\forall U, V \in D$, 如果 $U \subset V$, 就定义 $V \prec U$, 则易知 D 是一个有向集. $\forall U \in D$, 因 x 是 A 的聚点, 故 $U \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing$, 选取 $x_U \in U \cap (A - \{x\})$, 则 $\{x_U : U \in D\}$ 就是 A 中的一个网. 对 x 的任何开邻域 $U \in D$, $\forall V \in D$, 如果 $U \prec V$, 即 $U \supset V$, 则 $x_V \in V \subset U$, 这就证明了 $x_U \to x$.

注　如果 A 是 X 中的一个网, $x \in X$ 是 A 的聚点, 则存在 A 的一个子网收敛于 x.

设 X 是一个拓扑空间, $A \subset X$ 是一个非空子集, 包含 A 的最小闭集称为 A 的闭包, 记为 $\bar{A}$. 由此, A 为闭集当且仅当 $A = \bar{A}$.

定理 1.1.2　(1) $x \in \bar{A}$ 当且仅当存在 A 中的网 $\{x_\alpha\}$, 使 $x_\alpha \to x$;

(2) A 是闭集当且仅当对任何 A 中的网 $\{x_\alpha\}, x_\alpha \to x$.

则 $x \in A$.

证明　(1) 记 x 的开邻域全体为 D, $\forall U, V \in D$, 如果 $U \subset V$, 就定义 $V \prec U$, 则 D 是一个有向集. 设 $x \in \bar{A}$, 而 U 是 x 的任何开邻域. 如果 $U \cap A = \varnothing$, 则

$A \subset X-U$, 因 $X-U$ 是闭集, 得 $\bar{A} \subset \overline{X-U} = X-U$, 这与 $x \in \bar{A}$ 矛盾, 故 $U \cap A \neq \varnothing$. 取 $x_U \in U \cap A$, 同定理 1.1.1 中的证明, 必有 $x_U \to x$.

反之, 如果存在 A 中的网 $\{x_\alpha\}$, 使 $x_\alpha \to x$, 而 $x \notin \bar{A}$, 则 $x \in X-\bar{A}$. 因 $X-\bar{A}$ 是 x 的开邻域, $\exists \alpha_0 \in D$, 使 $\forall \alpha \succ \alpha_0$, 有 $x_\alpha \in X-\bar{A}$, 这与 $x_\alpha \in A$ 矛盾, 故 $x \in \bar{A}$.

(2) 如果 A 是闭集, 且存在 A 中的网 $\{x_\alpha\}$, 使 $x_\alpha \to x$, 因 (1) 成立, 则 $x \in \bar{A} = A$.

反之, 如果 A 不是闭集, 则 $\bar{A}-A \neq \varnothing$, 取 $x \in \bar{A}-A$, 因 $x \in \bar{A}$ 且 (1) 成立, 存在 A 中的网 $\{x_\alpha\}$, 使 $x_\alpha \to x$, 而这必推出 $x \in A$, 矛盾, 故 A 必是闭集.

设 (X,τ) 是一个拓扑空间, $A \subset X$ 是一个非空子集, 则 $\{A \cap U : U \in \tau\}$ 就是 A 上的一个拓扑, 称为子空间拓扑, 具有这种拓扑的 A 称为 X 的子空间.

设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f: X \to Y$ 是一个映射, 即 $\forall x \in X, f(x) \in Y$. $x \in X$, 如果对 $f(x)$ 在 Y 中的任何开邻域 V, 存在 x 在 X 中的开邻域 U, 使 $\forall x' \in U$, 有 $f(x') \in V$, 则称映射 f 在 x 是连续的. 如果 $\forall x \in X$, f 在 x 都是连续的, 则称 f 在 X 上是连续的.

定理 1.1.3 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f: X \to Y$ 是一个映射, 则

(1) f 在 X 上是连续的充分必要条件为对任何 X 中的网 $\{x_\alpha\}$, $x_\alpha \to x$, 有 $f(x_\alpha) \to f(x)$;

(2) f 在 X 上是连续的充分必要条件为对 Y 中的任何开集 V, $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ 必是 X 中的开集;

(3) f 在 X 上是连续的充分必要条件为对 Y 中的任何闭集 F, $f^{-1}(F) = \{x \in X : f(x) \in F\}$ 必是 X 中的闭集.

证明 因 (3) 可以由 (2) 简单推出, 我们只证 (1) 和 (2).

(1) 必要性. 设 f 在 $x \in X$ 连续, 则对 $f(x)$ 的任何开邻域 V, 存在 x 的开邻域 U, 使 $\forall x' \in U$, 有 $f(x) \in V$. 由 $x_\alpha \to x$, $\exists \alpha_0 \in D$, 使 $\forall \alpha \succ \alpha_0$, 有 $x_\alpha \in U$, 从而 $f(x_\alpha) \in V$, 因此 $f(x_\alpha) \to f(x)$.

充分性. 用反证法. 设 f 在 $x \in X$ 不连续, 则存在 $f(x)$ 的开邻域 V, 使对 x 的任意开邻域 U, $\exists x_U \in U$, 而 $f(x_U) \notin V$. 这样, X 中的网 $\{x_U\}$ 收敛于 x, 而 Y 中的网 $\{f(x_U)\}$ 不收敛于 $f(x)$, 矛盾.

(2) 必要性. 对 Y 中的任何开集 V, 任取 $x \in f^{-1}(V)$, 则 $f(x) \in V$, V 是 $f(x)$ 在 Y 中的开邻域. 因 f 在 x 连续, 存在 x 在 X 中的开邻域 U, 使 $\forall x' \in U$, 有 $f(x') \in V$, 即 $x' \in f^{-1}(V)$, $x \in U \subset f^{-1}(V)$, $f^{-1}(V)$ 必是开集.

充分性. $\forall x \in X$, 设 V 是 $f(x)$ 的任意开邻域, 因 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集, 且 $x \in f^{-1}(V)$, 得 $f^{-1}(V)$ 是 x 的开邻域. 这样, $\forall x' \in f^{-1}(V)$, 有 $f(x') \in V$, f 在 $x \in X$ 是连续的.

定理 1.1.4 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $X = A \cup B$, 其中 A, B 是 X 中的两个非空闭集. 映射 $f: A \to Y$ 和映射 $g: B \to Y$ 都是连续的, 且 $\forall x \in A \cap B$, 有

$f(x)=g(x)$, 现定义 $h:X\to Y$ 如下：

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & 当\ x\in A,\\ g(x), & 当\ x\in B.\end{cases}$$

则映射 h 在 X 上是连续的.

证明　设 F 是 Y 中的任意闭集, 则易证

$$h^{-1}(F)=f^{-1}(F)\cup g^{-1}(F).$$

因映射 f 和 g 连续, 由定理 1.1.3(3), $f^{-1}(F)$ 和 $g^{-1}(F)$ 分别是 A 和 B 中的闭集. 因 A 和 B 分别是 X 中的闭集, 则 $f^{-1}(F)$ 和 $g^{-1}(F)$ 分别是 X 中的闭集, 从而 $h^{-1}(F)$ 必是 X 中的闭集. 再由定理 1.1.3 (3), 映射 h 在 X 上必是连续的.

1.2　可数性与分离性

设 X 是一个拓扑空间, 如果 $\forall x\in X$, 都有 x 的一个可数的局部基, 即一个 x 的可数个开邻域所构成的开邻域系, 使对 x 的任意开邻域 U, 都存在这个开邻域系中的一个 B, 使 $B\subset U$, 则称 X 满足第一可数性公理 (简称 C_1 公理). 如果 X 有一个可数基, 则称 X 满足第二可数性公理 (简称 C_2 公理).

当 X 是满足 C_1 公理的拓扑空间时, 可以用序列语言来描述闭包和连续性. 例如对于闭包, $x\in\bar{A}$ 当且仅当存在序列 $x_n\in A$, 使 $x_n\to x$. 又例如连续性, 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f:X\to Y, x\in X$, 映射 f 在 x 连续当且仅当对任意序列 $x_n\in X$, $x_n\to x$, 有 $f(x_n)\to f(x)$.

设 A 和 B 是拓扑空间 X 的子集, 如果 $B\subset\bar{A}$, 则称 A 在 B 中稠密. 如果 $\bar{A}=X$, 则称 A 是 X 中的稠密子集. 存在可数稠密子集的拓扑空间称为可分的. 如果拓扑空间 X 满足 C_2 公理, 易证它必是可分空间. 如果 $A\subset X$, 而 $\mathrm{int}(\bar{A})=\varnothing$, 则称 A 是无处稠密集, 此时对 X 中的任意非空开集 U, 总存在 X 中的非空开集 V, 使 $V\subset U$, 而 $V\cap A=\varnothing$.

可数个无处稠密集的并集称为第一范畴集, 或第一纲集, 否则就称为第二范畴集, 或第二纲集. 容易证明：如果 A 是第一纲集, $A\supset B$, 则 B 是第一纲的, 如果 A 是第二纲的, $B\supset A$, 则 B 是第二纲的. 此外, 可数个第一纲集的并集仍是第一纲集.

X 中可数个开集的交集称为 X 中的 G_δ 集, 如果拓扑空间 X 中任意可数个稠密开集的交集仍是 X 中的稠密子集, 则称 X 是一个 Baire 空间.

引理 1.2.1　X 是一个 Baire 空间的充分必要条件为 X 中任意非空开集都是第二纲集.