吴纪桃 柳重堪 李翠萍 魏光美 编著

高等数学 下册

清华大学出版社
http://www.tup.com.cn

高等数学

下册

吴纪桃
柳重堪
李翠萍
魏光美
编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书分上、下两册. 上册内容包含函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用和空间解析几何与向量代数；下册内容包含多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、级数和常微分方程.

本书内容经过精细筛选，重点突出，层次分明，叙述清楚，深入浅出，简明易懂. 全书例题丰富，每节之后均配有适当数量的习题，书末附有习题答案与提示，便于教师教学，也便于学生自学.

本书可供高等学校理工科非数学专业的本科生作为教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/吴纪桃等编著. —北京：清华大学出版社，2008.2
ISBN 978-7-302-16621-4

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 吴…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 195222 号

责任编辑：佟丽霞
责任校对：刘玉霞
责任印制：王秀菊
出版发行：清华大学出版社　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　**邮　编**：100084
c—service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175　**邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015　**客户服务**：010-62776969
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170×230　**印张**：21　**字数**：372 千字
版　次：2008 年 2 月第 1 版　**印　次**：2008 年 2 月第1 次印刷
印　数：1～3000
定　价：28.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　产品编号：025956—01

前言

2003年北京航空航天大学高等数学课程获得北京市精品课程建设立项，由此，我们的课程建设和改革工作进入了一个新的阶段。课程组认真总结了数十年来在教学理念、教学内容、教学方法和教学手段方面的认识、方法、经验和教训，对课程再次进行了新的定位和规划。作为总结、继承、改革和发展的一个重要标志，我们组织编写了这套高等数学教材和习题集，以适应新形势、新目标下对数学的要求，更好地为后续课程提供必要的基础理论和知识准备，进一步为培养学生的创新意识和创新能力服务，从中体现"强化基础，突出实践，重在素质，面向创新"的本科生人才培养方针的精神。

与传统的高等数学教材相比，本教材有以下特点：

1. 把概念和定理的引出、建立与证明尽可能处理成一个"发现"的过程。这种处理方法将有利于学生创新意识和能力的培养。

2. 进一步强调一些重要的定义、定理和公式的物理或几何内涵。不但强调它们在数学上的作用，更要强调它们在物理或几何上的解释。这样做能使非数学专业的理工科学生认识到数学作为一种自然科学语言时所具有的精确描述能力，从而激发学习数学的兴趣。

3. 在推导公式和应用公式来解决实际问题时采用数学建模的方法和观点。即强调"分析实际问题（抽象简化）——建立数学模型（化成数学问题）——获得数学解（应用公式和算法）——解释实际问题（讨论解的合理性）"的解题过程。例如介绍了为什么电子设备中常用二进制，在定积分的应用一章中，每一个例题都重复数学建模的过程。这样做将有利于提高学生对数学的应用意识和应用能力。

4. 通过全书内容不断强调一些重要的数学思想。比如，在微分学中的“局部以直代曲”，在积分学中的“化整为零——局部以直代曲——积零为整”，泰勒公式和函数展成级数中的“以简单表示复杂”、“近似与估计”，求解非线性方程中的“迭代与逼近”等思想方法。这样做将有利于学生通过学习高等数学受到数学思想方法的熏陶，使思维品质得到提升。

5. 适当加强了一些典型素材的论述。例如对泰勒公式的理解和应用，增加了一些利用泰勒公式研究函数特性和求极限的例题和习题，这是因为泰勒公式能极大程度地揭示可导函数的本质。再如补充了关于凸函数的一些内容，这是因为凸函数是属性被研究得较为透彻的一类函数。

6. 本书的例题和习题在难度上跨度较大，这有利于训练学生的解题方法和技巧，有利于提高学生的计算和推理能力。

本教材第1,2,3章由柳重堪教授执笔，第4,5,6,7章由吴纪桃教授执笔，第8,12章由魏光美副教授执笔，第9,10,11章由李翠萍教授执笔，全书由吴纪桃教授统稿。

虽然本书的每一位编者主讲本课程的教龄都在20年以上，但是不妥和错误之处在所难免，真诚地希望有关专家、读者给予批评指正，以便再版时修改。

作 者

2007年5月于北航

目录

多元函数微分学

第8章

在上册中,我们主要讨论了含有一个自变量的函数的微积分,即一元函数的微积分.但是,不论是在理论研究上还是在实际问题中,许多量的变化往往由多个因素决定,反映到数学上,就是一个变量依赖于多个变量,这样的函数即为多元函数.因此,将一元函数的微积分学推广到多元函数的情形是非常必要的,同时也是十分自然的.本章将在一元函数微分学的基础上讨论多元函数的微分法及其应用.

多元函数的微分学与一元函数微分学之间既有许多类似的地方,又存在着实质性的差别.由于从一元函数的微分学到二元函数的微分学将出现新的问题,而二元函数与三元函数或三元以上的函数的微分学之间并无本质的差别,因此在本章的讨论中我们将以二元函数为主,对于二元以上的多元函数可以类推得出相应的结论.

8.1 多元函数的极限与连续

8.1.1 多元函数的概念

在很多自然现象和实际问题中会遇到这样的对应关系:一个量的值由多个变量的一组值所确定.

例 8.1.1 物体运动的动能 E 与物体的质量 m 和运动速度 v 这两个量相联系.它们之间的关系是

$$E=\frac{1}{2}mv^2.$$

例 8.1.2 一定质量的理想气体的压强 p 由其体积 V 及

温度 T 所确定，即

$$p=\frac{RT}{V},\quad R=\text{常数}.$$

例 8.1.3　平行四边形的面积由它的相邻两边的长 x 和 y 及其夹角 θ 所确定，即

$$A=xy\sin\theta.$$

为了刻画这类对应关系，我们引入多元函数的概念.

定义 8.1.1　设在某一变化过程中存在三个变量 x,y,z，如果依照一定的对应规律 f，使得对于变量 x,y 在其变化范围 D 内的每一组值，都有 z 的确定的值与之对应，则称变量 z 是变量 x,y 的二元函数，记作

$$z=f(x,y)\quad \text{或}\quad z=z(x,y).$$

称 x,y 为自变量，z 为因变量，并称自变量的变化范围 D 为函数的定义域，称相应的因变量的变化范围为函数的值域.

类似地，可以定义三元函数. 在上面的例子中，E 是 m 和 v 的二元函数，p 是 T 和 V 的二元函数，A 是 x,y 和 θ 的三元函数.

为了描述多个自变量，我们需要将它们按照一定的次序排列成一个有序的数组. 今后，我们将全体有序的二元实数组 (x,y) 所组成的集合记作 $\mathbb{R}^2$，即

$$\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}.$$

将全体有序的三元实数组 (x,y,z) 所组成的集合记作 $\mathbb{R}^3$，即

$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R},z\in\mathbb{R}\}.$$

我们知道，实数集合 $\mathbb{R}$ 与具有坐标的直线（数轴）上的点有一一对应的关系. 在平面和空间建立坐标系后，则 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 的元素 (x,y) 和 (x,y,z) 与平面和空间的点分别建立了一一对应的关系. 今后，我们将 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 分别与平面上和空间中的全体点相等同.

事实上，在实际问题中，我们还会遇到更多自变量的情形. 如许多物理量不仅依赖于空间中的位置，而且还依赖于时间，这时就需要用四个变量来描述.

一般地，为了描述 n 个自变量，需要考虑 n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中 n 为取定的一个自然数. 我们称 n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体为 n 维空间，而每个 n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 n 维空间的一个点，实数 x_i 称为该点的第 i 个坐标，n 维空间记作 $\mathbb{R}^n$.

n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离定义为

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

易知，当 $n=1,2,3$ 时，上式分别是解析几何中直线（数轴）、平面、空间内两点

间的距离公式.

注 P与Q两点之间的距离$|PQ|$有时也用记号$\rho(P,Q)$表示,即

$$\rho(P,Q)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

进一步地,可以定义$D\subset\mathbb{R}^n$上的n元函数$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. n元函数也可简记为$u=f(P)$,这里$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$.

关于多元函数的定义域,与一元函数相类似,我们**约定**:一般地,讨论用算式表达的多元函数$u=f(P)$时,就以使该算式有确定值的自变量所确定的点集为这个函数的定义域. 例如,函数$z=\ln(x+y)$的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x+y>0\},$$

如图8.1.1. 又如,函数$z=\arcsin(x^2+y^2)$的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\},$$

如图8.1.2所示.

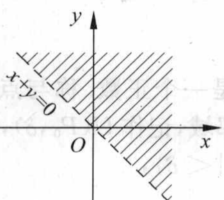

图 8.1.1

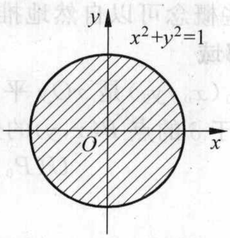

图 8.1.2

下面我们主要讨论二元函数,因为相对而言,二元函数比较简单,而且一般多元函数的讨论方法和主要结论与二元函数的相类同;同时,二元函数的几何意义更直观. 设$z=f(x,y)$是定义在非空集合$D\subset\mathbb{R}^2$上的二元函数,当点(x,y)在D中变化时,以$(x,y,f(x,y))$为坐标的点(一般地)在空间形成一张曲面,我们称这张曲面,即点集

$$G=\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

为**二元函数$z=f(x,y)$的图形**(如图8.1.3).

例如,由空间解析几何可知,线性函数

$$z=ax+by+c$$

的图形是一张平面;由方程

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

所确定的函数$z=f(x,y)$的图形是球心在原点、半径为r的球面,它的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant r^2\}.$$

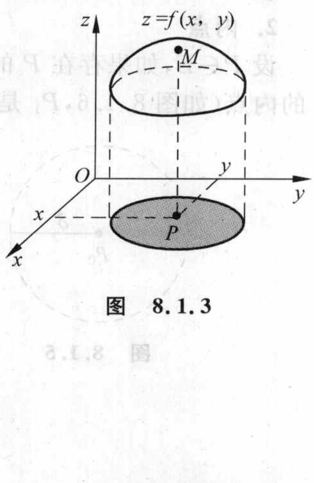

图 8.1.3

在 D 的内部任一点 (x,y) 处，该函数有两个对应值，一个是 $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$，另一个是 $z=-\sqrt{r^2-x^2-y^2}$. 因此，它是多值函数，有两个单值分支：

$$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2} \quad 及 \quad z=-\sqrt{r^2-x^2-y^2},$$

前者表示上半球面（如图 8.1.4），后者表示下半球面. 在以后的讨论中，除特殊声明外，总假定所讨论的多元函数是单值的. 如果遇到多值函数，可以找出它的全部单值分支，然后分别进行讨论.

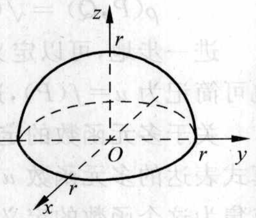

图 8.1.4

8.1.2 平面点集的一些概念

在讨论一元函数的性质时，邻域和区间的概念占有重要的地位. 因此，为了讨论多元函数的性质，我们需要首先推广邻域和区间的概念. 因为二元函数的定义域是平面上的一个点集，所以我们这里只介绍平面点集的一些基本概念，这些概念可以自然地推广到 n 维空间.

1. 邻域

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是一个正数. 称与点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体为点 P_0 的 δ 邻域，记作 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\},$$

亦即

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

在几何上，$U(P_0,\delta)$ 就是 xOy 平面上一个以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为圆心，以 δ 为半径的圆的内部，不包含圆周（如图 8.1.5）. 点 P 的去心 δ 邻域记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P \mid 0<|PP_0|<\delta\}.$$

如果不需要强调邻域半径 δ，则以 $U(P_0)$ 表示点的某一个邻域，$\mathring{U}(P_0)$ 表示点 P_0 的某一个去心邻域.

设 E 是一个平面点集，下面介绍一些相关的术语.

2. 内点

设 $P\in E$，如果存在 P 的某一个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subset E$，则称点 P 是 E 的内点（如图 8.1.6，P_1 是 E 的内点）.

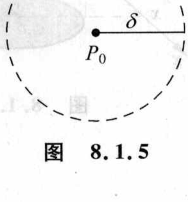

图 8.1.5

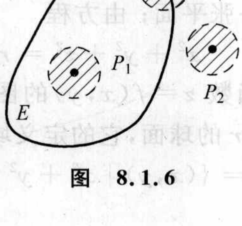

图 8.1.6

3. 外点

如果存在 P 的一个 δ 邻域 $U(P,\delta)$，使得 $U(P,\delta)\cap E=\varnothing$，即 P 的某 δ 邻域 $U(P,\delta)$ 内没有 E 的点，则称点 P 是 E 的外点(如图 8.1.6，P_2 是 E 的外点).

4. 边界点

如果 P 的任意邻域 $U(P)$ 内既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，则称点 P 是 E 的边界点(如图 8.1.6，P_3 是 E 的边界点). 边界点既可以属于 E，也可以不属于 E.

5. 开集

如果 E 的点都是 E 的内点，则称 E 是开集，即开集 E 中的任何一点，都存在一个邻域，使得这一邻域全部被包含在 E 中. 例如，点集 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 是开集.

6. 闭集

开集的余集称为闭集. 闭集 E 的边界点属于 E. 例如，点集 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是闭集.

7. 区域

设 D 是一个开集，如果 D 中任意两点 P_1 和 P_2 之间都可以用有限条直线段所组成的折线连接起来，而且该折线全部包含在 D 中，则称开集 D 是区域(开区域). 一个区域加上它的边界就称为闭区域. 例如，开集 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 是(开)区域，点集 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1\}$ 是闭区域.

8. 有界集

设 E 是一个平面点集，如果存在一个正数 K，使得 $E\subset U(O,K)$，其中 O 是原点，则称 E 是有界集，否则称为无界集. 例如，点集 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 是有界开区域，点集 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1\}$ 是无界闭区域.

由此可见，实平面上的开区域与有界闭区域是实数轴上开区间和闭区间的推广. 今后，若不需要指明区域的开闭性或区域的开闭性比较明显，则常简称为区域.

8.1.3 多元函数的极限

类似于一元函数极限的定义，我们给出二元函数极限的定义.

定义 8.1.2 设函数 $f(P)$ 在区域 D 有定义，点 P_0 是 D 的内点或边界点(不要求函数在 P_0 点有定义)，A 是常数. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得对于满足 $0<\rho(P,P_0)<\delta$ 的一切点 $P\in D$，恒有

$$|f(P)-A|<\varepsilon$$