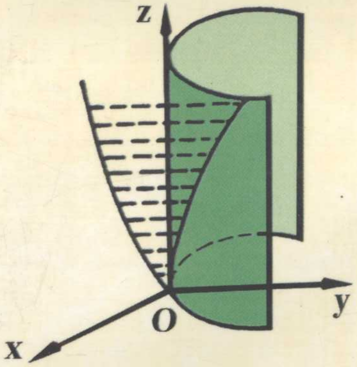
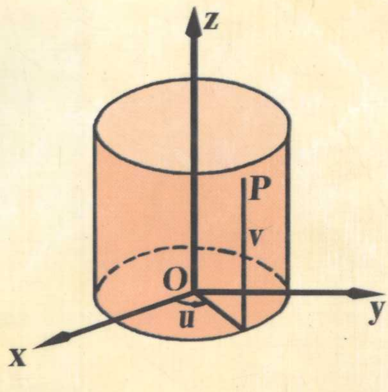
全国高等教育自学考试教材
数学专业

微分几何

全国高等教育自学考试指导委员会组编
沈纯理　黄宣国　编著





经济科学出版社

责任编辑:张建光
责任校对:段健瑛
封面设计:张卫红
版式设计:代小卫
技术编辑:贾志坚

微 分 几 何
沈纯理　黄宣国　编著
*
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
中国铁道出版社印刷厂印刷
*
850×1168毫米　32开　9印张　250000字
1997年7月第一版　1997年7月第一次印刷
印数:0001—2500册
ISBN 7-5058-1102-9-G.177　定价:16.00元

出版前言

高等教育自学考试教材建设是高等教育自学考试工作的一项基本建设．经国家教育委员会同意，我们拟有计划、有步骤地组织编写一些高等教育自学考试教材，以满足社会自学和适应考试的需要．《微分几何》是为高等教育自学考试数学专业组编的一套教材中的一种．这本教材是根据专业考试计划，从造就和选拔人才的需要出发，按照全国颁布的《微分几何自学考试大纲》的要求，结合自学考试的特点，组织高等院校一些专家编写的．

数学专业《微分几何》自学考试教材，是供个人自学、社会助学和国家考试使用的．无疑也适用于其他相同专业方面的学习需要．现经组织专家审定，同意予以出版发行．我们相信，随着高等教育自学考试教材的陆续出版，必将对我国高等教育事业的发展，保证自学考试的质量起到积极的促进作用．

编写高等教育自学考试教材是一种新的尝试，又是一项巨大的工程，希望得到社会各方面的关怀和支持，使它在使用中不断提高和日臻完善．

全国高等教育自学考试指导委员会

一九九六年

序　言

微分几何是以数学分析为工具来研究空间形式的一门数学学科，主要讨论光滑曲线与曲面的性质，这是经典微分几何的主要内容. 随着对物质运动认识的深入，从十九世纪初，开展了高维空间微分几何的研究. 本世纪以来，整体微分几何的研究逐渐发展起来，近二三十年来发展非常迅速，并且与微分方程、代数、拓扑相互渗透，成为数学的一个重要的分科. 微分几何在机械工程、力学、引力理论及理论物理等其他领域都有广泛应用.

本课程以经典微分几何为主，介绍微分几何的一些最基本的概念、理论和方法，从而使读者对微分几何有一个初步的了解. 它既是学习和研究微分几何学的入门课程，又为深入学习流形上微积分、拓扑学等课程提供必要的基础知识.

本课程的内容可分为两大部分：曲线论部分和曲面论部分，限于讨论曲线和曲面的局部性质.

曲线论部分包括：曲线、曲率、挠率、Frenet 标架、Frenet 公式、曲线论等基本定理.

曲面论部分包括：曲面、切平面、法向量、包络面、曲面的第一和第二基本形式、曲面的基本公式和基本方程及曲面论基本定理、曲率（法曲率、主曲率、总曲率、平均曲率、测地曲率）、测地线、等距对应、共形对应、Gauss-Bonnet 公式等.

学习本课程的必要的基础知识是微积分、解析几何和线性代数. 在证明曲线、曲面论基本定理及测地线存在性时，需要用到常微分方程解的存在性定理.

通过本课程的学习，可以使学生的空间思维及几何直观想象

能力得到提高，为进一步学习诸如流形上微积分、偏微分方程、拓扑、黎曼几何以及一些力学课程打好基础．微分几何学是几何学的一个分支，它的许多概念都有直观的几何背景，所以在学习微分几何时，要力求了解与掌握几何概念与思维方法，注意培养几何图形的直观和想象能力，以及从具体到抽象的能力．

为使读者便于自学起见，我们写了两个附录，附录一是总复习题，附录二是习题答案及提示．最后有一个索引，便于读者检索．

编　者

1996.1

目　　录

第一章 曲 线 论

引 言

在中学几何课程里，我们学习和研究直线、折线和圆弧的性质，探索椭圆、抛物线和双曲线的奥秘．然而在生产、生活实践和自然科学的许多领域，我们经常遇到各种形状的曲线：行星在苍穹中运动，轮船在一望无际的大海上航行，啮合的齿轮在飞速转动，还有牵牛花蜿蜒缠绕的长茎，小蚂蚁在同一曲面上爬行的路线，它们的轨迹是那样的新奇，又是那样的有规则和迷人，成为我们新的学习和研究的课题．

利用微积分（主要是用微分）深入地研究曲线的性质，是本章的内容．

§1 曲线的表示和弧长

物理学里，曲线常被看作质点运动的轨迹，时间 t 是描述质点运动的参数．这个思想在微分几何中被广泛应用．

设 $\{O;xyz\}$ 是 3 维欧几里得空间 E^3 中的笛卡尔直角坐标系（Descartes. 1596—1650 年），$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$ 都是 t 的连续可微函数，本章我们假定它们有三阶连续导数，设这些函数的定义域是直线 R 内的一个开区间 (a,b)（或者闭区间 $[a,b]$，在开区间 (a,b) 情况，a 可以是 $-\infty$，b 也可以是 $+\infty$）．

当 t 在 (a,b) 中变化时，$(x(t),y(t),z(t))$ 在 E^3 内的图象称为 E^3 中一条连续可微曲线 C，简称曲线 C（见第 2 页图 1.1）．t 称为

曲线 C 的参数，今后常写曲线 C 为向量形式：

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)). \qquad (1.1)$$

$\boldsymbol{r}(t)$ 称为曲线 C 的位置向量，而把曲线上参数为 t 的点 P 记为点 $P(t)$. $P(t)$ 的坐标恰是 $(x(t),y(t),z(t))$，称 R^3 内向量 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}$ 为曲线在 t 处的切向量.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right). \qquad (1.2)$$

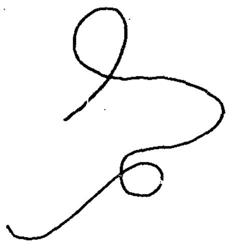


图 1.1

如果在 $t=t_0$ 处，$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}$ 不是零向量，则称点 $P(t_0)$ 是曲线 C 的正则点，否则称为奇点. 曲线 C 上所有点都是正则点时，称 C 为正则曲线，本章仅研究正则曲线.

例 1 曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$ $(-\infty<t<+\infty$，a,b 是正常数)的轨迹称为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上一条圆柱螺线. 曲线在 t 处的切向量

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}=(-a\sin t,a\cos t,b)$$

显然处处不为零向量，所以这圆柱螺线是一条正则曲线(见第 3 页图 1.2).

例 2 曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(t,t^2,t^3)$ $(-\infty<t<+\infty)$ 的轨迹是抛物柱面 $y=x^2$ 与立方抛物柱面 $z=x^3$ 的交线(见第 3 页图 1.3)，称为三次挠曲线. 由于

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}=(1,2t,3t^2)$$

处处不是零向量，三次挠曲线也是一条正则曲线.

当然，我们也可以不用 t 作参数.

例 3 曲线 $\boldsymbol{r}(\theta)=(1+\cos\theta,1-\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$，$(-\infty<\theta<\infty)$，由于 $(1+\cos\theta)^2+(1-\cos\theta)^2+2\sin^2\theta=4$，所以曲线在以原点为球心，2 为半径的球面 $O(2)$ 上，称为球面曲线(凡是落在一

个球面上的曲线都称为球面曲线). 由于$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=(-\sin\theta,\sin\theta,$ $\sqrt{2}\cos\theta)$处处不是零向量,那么它也是一条正则曲线,这条曲线是球面$O(2)$与双曲抛物面$z^2=2xy$的交线(见图 1.4).

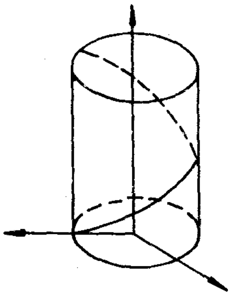


图 1.2

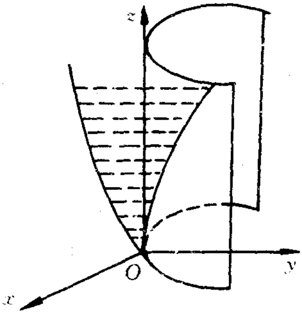


图 1.3

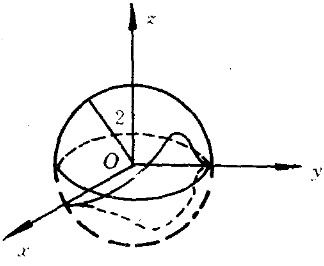


图 1.4

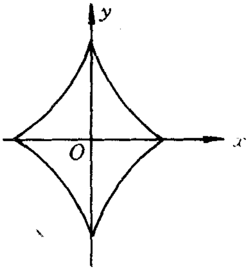


图 1.5

然而,并不是所有曲线都是正则曲线,如下例.

例 4 曲线$\boldsymbol{r}(\theta)=(a\cos^3\theta,a\sin^3\theta,O)$ $(-\infty<\theta<\infty)$的轨迹是Oxy平面上一条星形线.

由于$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=(-3a\cos^2\theta\sin\theta,\ 3a\sin^2\theta\cos\theta,\ O)$在$\theta=n\pi$

$+\frac{1}{2}\pi$(n 是任一整数)时为零向量,所以星形线不是正则曲线,但是限制在每个开区间$(n\pi+\frac{1}{2}\pi,(n+1)\pi)$内,它是正则曲线(见第3页图1.5).

要注意:正则曲线与参数的选择有关.从下面例子可以看出

例 5 $\boldsymbol{r}(t)=(t^3,t^6,t^9)\ (-\infty<t<\infty)$,$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}$在 $t=0$ 处是零向量,所以它不是正则曲线.但是令 $t^*=t^3$ 时,例 5 可以改写为 $\boldsymbol{r}^*(t^*)=\boldsymbol{r}(t)=(t^*,t^{*2},t^{*3})\ (-\infty<t^*<\infty)$,这恰是例 2 讨论过的正则曲线.

对于同一条曲线 C,我们可以用不同的参数表示它,如例 5. 不同参数 t 与 t^* 之间,有函数关系 $t^*=f(t)$,这里 f 是 t 的 C^3 函数.为了保证 t 与 t^* 之间的一一对应关系和使得$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^*(t^*)}{\mathrm{d}t^*}\right|_{t^*=f(t)}$与$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}$有同一方向(换句话讲,对于固定 t,这两个切向量仅相差一个正常数),在本章,我们限制$\frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}>0$.这样一来,在参数 t 下,曲线 C 是正则曲线,在参数 t^* 下,曲线 C 也是正则曲线.

如果曲线 C 具有参数 t,C^3 函数 $t^*=f(t)$在(a,b)内是一一对应的,且满足$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}>0$,这里$(a,b)$是 t 的定义域的一个开区间,则 $\boldsymbol{r}^*(t^*)$(这里 $\boldsymbol{r}^*(t^*)=\boldsymbol{r}(t),t\in(a,b)$)是具有参数 t^* 的曲线 C 的向量形式.

显然,对于同一条曲线 C,可以有无穷多个不同的参数表示它,在这无穷多个参数中,我们希望能找到一种至少在理论上是最简单方便的参数.

对于正则曲线 C:$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,切向量$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}$的长度是

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right|=\left[\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{1.3}$$

称

$$s(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t \qquad (t_1>t_0) \tag{1.4}$$

为曲线 C 从参数 t_0 到 t_1 处的弧长. 这里$\dfrac{\mathrm{d}s(t_1)}{\mathrm{d}t_1}=\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right|$.

设曲线 C 上有两个不同的参数 t,t^*，$t=f(t^*)$，在这两个不同参数下，$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}^*(t^*)$，对于 C 上任意两个固定点 P_0、P_1，P_0 的参数分别是 t_0,t_0^*；P_1 的参数分别是 t_1,t_1^*. 记 $s(t_1)$是曲线 C 从参数 t_0 到 t_1 处的弧长，在参数 t^* 下，相应从参数 t_0^* 到 t_1^* 的弧长为 $s^*(t_1^*)$，按照我们的限制，在参数变换下，$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t^*}>0$，则利用定积分的变量代换性质

$$\begin{aligned} s(t_1)&=\int_{t_0}^{t_1}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t=\int_{t_0^*}^{t_1^*}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^*(t^*)}{\mathrm{d}t^*}\frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t}\right|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t^*}\mathrm{d}t^* \\ &=\int_{t_0^*}^{t_1^*}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^*(t^*)}{\mathrm{d}t^*}\right|\mathrm{d}t^*=s^*(t_1^*). \end{aligned} \tag{1.5}$$

因而弧长只依赖于曲线 C 上点 P_0，P_1 的位置，而与参数的选取无关.

另外，当曲线 C 在坐标系$\{O;xyz\}$内运动(反射旋转与平移的组合)时，在任一参数 t 处切向量$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}$的长度$\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right|$并未改变，所以由式(1.4)定义的弧长是运动不变量.

在微分几何中，凡是在参数变换和运动下保持不变的量都称为几何量，那么曲线的弧长也是一个几何量.

由于我们只研究正则曲线，所以$\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right|>0$，对于固定的 t_0，当 $t_2>t_1>t_0$ 时，从式(1.4)可以看出 $s(t_2)>s(t_1)$，所以弧长 $s(t)$是参数 t 的严格单调递增函数. 因而可取弧长 s 作为曲线的新参数. 当 $t=s$ 时，显然有

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}=1, \tag{1.6}$$

那么以弧长 s 作参数的曲线的切向量$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s}$必定是单位向量. 反

之，当曲线 C 的切向量 $\dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$ 处处是单位向量时，从(1.4)式可以知道

$$s(t)=\int_{t_0}^{t} dt_1=t-t_0, \tag{1.7}$$

当 $t_0=0$ 时，t 就是弧长 s.

从以后几节曲线理论展开中，我们将越来越感到采用弧长作曲线参数的优点. 弧长作为曲线参数并被广泛利用是 18 世纪下半叶的事情.

由于弧长参数的重要性，把参数 t 的曲线向量形式化成弧长参数的形式也是重要的. 下面举两个例子.

例 6 用弧长作参数表示曲线

$\boldsymbol{r}(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)\quad(-\infty<t<+\infty)$. 由于 $\dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=$ $(e^t\cos t-e^t\sin t, e^t\sin t+e^t\cos t, e^t)$，那么

$$\begin{aligned}\frac{ds(t)}{dt}&=\left|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right|\\&=[(e^t\cos t-e^t\sin t)^2+(e^t\sin t+e^t\cos t)^2+e^{2t}]^{\frac{1}{2}}\\&=\sqrt{3}\,e^t,\end{aligned}$$

为了使用弧长作参数的曲线的向量形式尽可能简洁，当 $t_0=0$ 时，取 $s=\sqrt{3}$，于是 $s(t)=\sqrt{3}\,e^t$.

用弧长作参数表示原曲线

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}^*(s)=\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right),\frac{s}{\sqrt{3}}\sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right),\frac{s}{\sqrt{3}}\right),$$

$(0<s<+\infty)$.

例 7 用弧长作参数表示曲线

$\boldsymbol{r}(t)=(\mathrm{ch}\,t, \mathrm{sh}\,t, t)\quad(-\infty<t<+\infty)$,

$\dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=(\mathrm{sh}\,t, \mathrm{ch}\,t, 1)$, $\dfrac{ds(t)}{dt}=\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right|=\sqrt{2}\,\mathrm{ch}t$,

取 $t_0=0$ 时，$s=0$ 则 $s(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,t$，由于 $\mathrm{sh}\,t=\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})$，令

$e^t=y$，那么有 $y^2-\sqrt{2}sy-1=0$，由于 $y>0$，则 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(s+\sqrt{s^2+2})$，于是 $t=\ln\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(s+\sqrt{s^2+2})\right]$，用弧长作参数表示原曲线

$$r(t)=r^*(s)=\left(\sqrt{1+\frac{1}{2}s^2},\frac{\sqrt{2}}{2}s,\ln\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(s+\sqrt{s^2+2})\right]\right),$$

$(-\infty<s<+\infty)$.

从例 6、例 7 可以看出，在实际运算中，用弧长作参数并不一定简单，所以在下面曲线理论中，我们也建立了非弧长参数的计算公式，碰到具体问题时，再考虑用哪个参数计算简便.

习　　题

1. 求曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(a\ \mathrm{ch}\ t,a\ \mathrm{sh}\ t,at)$ 在 $t=0$ 与 $t=t_0$ 之间的弧长，这里 a 是非零常数，$-\infty<t<+\infty$.

2. 求用极坐标方程 $r=\rho(\theta)$ 给定的平面曲线的弧长表达式.

3. 求圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$ 在点 $t=\frac{\pi}{3}$ 处的切线方程，这里 a、b 是非零常数，而且 $-\infty<t<\infty$.

4. 求曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(e^t\cos t,e^t\sin t,e^t)$ 在点 $t=0$ 处的切线方程.

5. 已知曲线 C 是曲面 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 的交线，求过曲线 C 上任一点 (x,y,z) 的切线方程.

6. 求曲线 $\boldsymbol{r}(t)=\left(a(t-\sin t),a(1-\cos t),4a\cos\frac{t}{2}\right)$ 在它与 xy 平面二交点之间的一段的弧长，这里 a 是正常数，$0\leqslant t<4\pi$.

7. 求平面曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(-f'(t)\sin t-f''(t)\cos t,f'(t)\cos t-f''(t)\sin t)$ 的弧长，这里 $0\leqslant t<\infty$，$f(t)$ 是 t 的 C^3 函数.

§2　曲线的 Frenet-Serret 公式

对于正则曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，这里 s 是曲线 C 的弧长参数，用 $\boldsymbol{T}(s)=\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$ 表示弧长 s 处曲线 C 的单位切向量. 弧长 s 处的点用

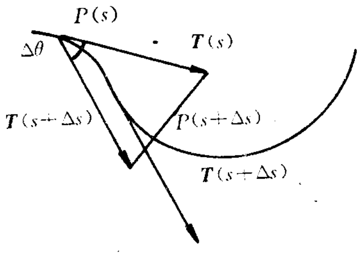


图 1.6

$P(s)$表示，弧长 $s+\Delta s$ 处的点用 $P(s+\Delta s)$表示，当点 $P(s)$沿曲线 C 运动到 $P(s+\Delta s)$时，单位切向量 $\boldsymbol{T}(s)$连续可微地变化到单位切向量 $\boldsymbol{T}(s+\Delta s)$（如图 1.6）.

$\boldsymbol{T}(s)$对弧长的导数定义为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(s)}{\mathrm{d}s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{T}(s+\Delta s)-\boldsymbol{T}(s)}{\Delta s}。\tag{2.1}$$

由于 $\boldsymbol{T}(s)$，$\boldsymbol{T}(s+\Delta s)$都是单位向量. 在 E^3 内，我们平移 $P(s+\Delta s)$处单位切向量 $\boldsymbol{T}(s+\Delta s)$到点 $P(s)$处，于是得到一个以 $P(s)$为顶点的腰长是 1 的等腰三角形，这个等腰三角形底边长是 $2\sin\frac{1}{2}\Delta\theta$，这里 $\Delta\theta$ 是两个切向量 $\boldsymbol{T}(s)$、$\boldsymbol{T}(s+\Delta s)$的夹角，当 Δs 很小时，我们可以假设 $0\leqslant\Delta\theta<\pi$. 因而向量$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(s)}{\mathrm{d}s}$的长度$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(s)}{\mathrm{d}s}\right|$可计算如下：

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(s)}{\mathrm{d}s}\right| &= \left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{T}(s+\Delta s)-\boldsymbol{T}(s)}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\boldsymbol{T}(s+\Delta s)-\boldsymbol{T}(s)|}{|\Delta s|}\\ &= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left|2\sin\frac{1}{2}\Delta\theta\right|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\left[\left|\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\theta}{\frac{1}{2}\Delta\theta}\right|\cdot\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|\right]\\ &= \left|\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\theta}{\frac{1}{2}\Delta\theta}\right|\cdot\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|.\end{aligned}$$

这里我们利用当 $\Delta s\to 0$ 时，必定有 $\Delta\theta\to 0$ 这一事实. 从数学分析知道：$\lim\limits_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\theta}{\frac{1}{2}\Delta\theta}=1$. 于是

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(s)}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|. \tag{2.2}$$

向量$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(s)}{\mathrm{d}s}$的长度$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(s)}{\mathrm{d}s}\right|$等于曲线上邻近两点的切向量的夹角对弧长的变化率$\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|$，它反映了曲线的弯曲程度.

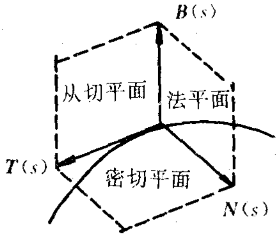


图 1.7

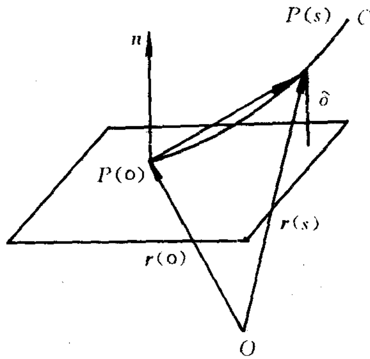


图 1.8

定义 $k(s)=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(s)}{\mathrm{d}s}\right|$称为曲线$\boldsymbol{r}(s)$在点$P(s)$的曲率，当$k(s)\neq 0$时，$\rho(s)=\frac{1}{k(s)}$称为曲线在点$P(s)$的曲率半径.

由于$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(s)}{\mathrm{d}s}$是$E^3$内一个向量，因而当$k(s)\neq 0$时，我们可以写

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(s)}{\mathrm{d}s}=k(s)\boldsymbol{N}(s). \tag{2.3}$$

这里$\boldsymbol{N}(s)$是单位向量. $\boldsymbol{N}(s)$称为曲线在点$P(s)$的单位主法向量，简称主法向量. 由于$\boldsymbol{T}(s)$是单位向量，$\boldsymbol{T}(s)$与$\boldsymbol{T}(s)$的内积$\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{T}(s)=1$. 两端对$s$求导，可以得到$\boldsymbol{T}(s)\cdot\boldsymbol{N}(s)=0$. 那么，在点$P(s)$，向量$\boldsymbol{T}(s)$与$\boldsymbol{N}(s)$垂直. 由两向量$\boldsymbol{T}(s)$，$\boldsymbol{N}(s)$张成的平面称为曲线在点$P(s)$的密切平面（如图 1.7），这个密切平面的单位法向量$\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s)$（$\boldsymbol{T}(s)$与$\boldsymbol{N}(s)$的外积）称为曲线在点$P(s)$的单位从法向量，简称从法向量，又称副法向量. 通过点$P(s)$的主

法向量与副法向量所确定的直线分别称为主法线与副法线，副法线又称从法线. 通过点 $P(s)$，由 $\boldsymbol{T}(s)$ 与 $\boldsymbol{B}(s)$ 所张成的平面称为曲线在点 $P(s)$ 的从切平面. 而通过点 $P(s)$，由 $\boldsymbol{N}(s)$ 与 $\boldsymbol{B}(s)$ 张成的平面称为曲线在点 $P(s)$ 的法平面，密切平面、从切平面和法平面这三张平面以密切平面为最重要.

密切平面到底有什么意义呢？

设正则曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$（$s$ 为弧长）和平面 π 有一个公共点，在这点曲率非零. 平面 π 的单位法向量记为 $\boldsymbol{n}$，为简便下面的讨论，不妨设这公共点为 $P(0)$（弧长是 0 的点），如图 1.8（见第 9 页）所示，设 $P(s)$ 为曲线 C 上距离 $P(0)$ 很近的点，这里很近意味着可用 Taylor 公式展开向量函数 $\boldsymbol{r}(s)$，即有

$$\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}(O)+\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}s+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s^2}\right|_{s=0}s^2+\cdots \tag{2.4}$$

从 $P(s)$ 到平面 π 的垂直距离记为 δ，如果 $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\delta}{s^m}=0$，这里 m 为自然数，并且 $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\delta}{s^{m+1}}\neq 0$，则平面 π 称为与曲线 C 在 $P(O)$ 点有 m 阶接触的平面.

记 $P(O)$ 为起点，$P(s)$ 为终点的向量为 $\boldsymbol{x}$，那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(O)\\&=\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}s+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s^2}\right|_{s=0}s^2+\cdots\end{aligned}$$

容易明白，δ 等于两向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的内积的绝对值，即有

$$\delta=|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}|=\left|\boldsymbol{n}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}s+\frac{1}{2}\boldsymbol{n}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s^2}\right|_{s=0}s^2+\cdots\right|.$$

若过点 $P(O)$ 的曲线 C 的切线在平面 π 上，那么有 $\boldsymbol{n}\cdot\left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}=0$. 如果平面 π 是曲线在点 $P(O)$ 的密切平面，则另外还有关系式 $\boldsymbol{n}\cdot\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s^2}\right|_{s=0}=0$，因此，这密切平面是与曲线 C 在 $P(O)$ 点有至少二阶接触的平面.

另一方面，当点 $P(O)$ 的曲率不等于零时，向量 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}$ 不平行