# 线性代数

XIANXING DAISHU

何良材　李　新　编著

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

# 线性代数

何良材　李　新　编著

重庆大学出版社

## 内容提要

本书按国家教育部颁发的关于工程数学《线性代数》课程教学大纲基本要求，并结合当前教育实际和社会需要编写而成. 本书在基础篇中主要介绍行列式、矩阵、$n$ 维向量空间等基本知识，在论述方面充分发挥矩阵初等变换的作用；在应用篇中强调线性数学模型方法（线性方程组、相似矩阵与二次型、线性规划与投入产出法）的实际应用；为便于读者学习、检查、掌握及深化基本内容，在辅导篇中编入了概念思考题，疑难问题及解题技巧和习题解答. 本书可作为高等教育非数学专业有关本科使用教材，去掉“ * ”号内容，也可供有关专科、高职高专、中专等有关专业使用.

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数/何良材，李新编著. —重庆：重庆大学出版社，2007. 10

ISBN 978-7-5624-4198-4

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①何…②李… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. 0151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 097885 号

**线性代数**

何良材 李 新 编著

责任编辑：曾令维 李定群 版式设计：曾令维

责任校对：邹 忌 责任印制：张 策

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：张鸽盛

社址：重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A 区)内

邮编：400030

电话：(023) 65102378 65105781

传真：(023) 65103686 65105565

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn (市场营销部)

全国新华书店经销

重庆华林天美印务有限公司印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：18.25 字数：456 千

2007 年 10 月第 1 版 2007 年 10 月第 1 次印刷

印数：1— 3 000

ISBN 978-7-5624-4198-4 定价：26.00 元

# 编者的话

本书是根据国家教育部有关工程数学《线性代数》课程教学大纲基本要求，并结合当前教育实际及社会需要编写而成.

全书分基础篇、应用篇、辅导篇共 7 章 3 个附录. 其中，基础篇含第 1 章行列式，第 2 章矩阵，第 3 章 $n$ 维向量空间，应用篇含第 4 章线性方程组，第 5 章相似矩阵及二次型，第 6 章线性规划，第 7 章投入产出法；辅导篇含附录 1 疑难问题解答与解题方法和技巧，附录 2 概念思考题，附录 3 习题解答.

本着"教材是科学论著与教学经验相结合的产物"这一指导原则. 凭借我们多年的教学实践，编写时在保证基本内容科学性、正确性和系统性的前提下，不片面过分追求纯数学的完整性、严密性，同时针对当前教育实际及特点，力图构筑以"掌握基本概念、理论、方法和使用技能，强化实际应用"为重点，对基本知识充分阐明其实质意义、来源背景、做法步骤及应用去向，注意培养学生抽象思维、观察综合、应用计算及分析和解决问题的素质与能力.

为便于教与学，我们在教材里编入了辅导篇内容，所提出的疑难问题、解题方法与技巧以及概念思考题，目的是想让学生去独立思考解答，加深对教材内容的进一步理解、深化. 提供的习题解答，是想让学生在经过反复艰苦思考的状况下还无法解题时去参考一下，最后，还是要独立解出. 这里特别要告诫读者，切不可不加思考照抄解答，更不能不做作业.

本书供高等教育非数学专业的各类本科专业使用，去掉"*"号内容，也可供高等教育非数学专业各类专科及高职高专、中专有关专业使用.

本书由知名数学家重庆大学李平渊教授主审. 在此，对李平渊教授，重庆大学何中市教授（博士生导师），王代先、王英仪、王新质、侯勇之、白任伦、俞翔华、田玉芳等副教授，以及何枚、王克金、侯晓华、陈忠友、钟小伟、罗广萍等老师先后提出的许多修正、中肯、有益的建议和意见，作者谨向他们深表谢意.

鉴于作者水平有限，本书不妥与错误之处，恳求读者不吝赐教，以使本书更趋完善.

编著者　何良材（教　授）
李　新（副教授）
2007 年 5 月于重庆大学

# 目　录

# 基础篇

## 线性代数基本知识

# 第 1 章　行列式

在线性代数和后续课程中，以及工程技术上，往往有很多问题要应用“行列式”这个数学工具. 本章在介绍二阶、三阶行列式的基础上，把行列式的概念推广到 $n$ 阶行列式.

## 1.1　二阶与三阶行列式

在高中数学中，我们这样解二元一次方程组

$$\begin{cases} x+y=3 & ① \\ 3x-4y=2 & ② \end{cases}$$

式①、式②分别代表第 1，第 2 个方程，先消未知量 $y$

①×(−4)−②×1 得

$$[1\times(-4)-3\times1]x=3\times(-4)-2\times1$$

$$-7x=-14$$

故

$$x=2$$

代入式②，得

$$y=1$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=1\times(-4)-3\times1=-7$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=3\times(-4)-2\times1=-14$$

可直接得

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-14}{-7}=2$$

又记

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1\times2-3\times3=-7$$

类似可得

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{-7}{-7}=1$$

**定义 1.1**　设有 4 个数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$，计算式

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\xlongequal{\text{记为}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为二阶行列式.

那么一般的二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$$

当 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq0$ 时，可直接得到解为

$$x=\frac{D_1}{D},\quad y=\frac{D_2}{D}$$

其中
$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

**例 1.1**　解方程组
$$\begin{cases} 2x+3y=-2 \\ x+5y=-1 \end{cases}$$

**解**
$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=2\times5-1\times3=7\neq0$$
$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=(-2)\times5-(-1)\times3=-7$$
$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=2\times(-1)-1\times(-2)=0$$

故
$$x=\frac{D_1}{D}=-1,\quad y=\frac{D_2}{D}=0$$

在社会生产实践中，我们会碰上大量的多元线性方程组.

例如，在医生对病人疾病进行诊断用 CT 扫描时，所得的数据就构成一个具有 10 万多个未知量的线性方程组. 一般，我们要面对这样大型线性方程
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$m$ 个方程，$n$ 个未知量！以前的方法根本不行. 必须推广前面的方法.

对三元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

可以有相仿的做法与结论. 其中 $x_1,x_2,x_3$ 是 3 个未知量，$a_{ij}$ 表示第 $i$ 个方程第 $j$ 个未知量的系数，$b_i$ 表示第 $i$ 个方程的常数项.

设
$$D\xlongequal{\text{表示}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

若 $D\neq0$，那么
$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中
$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & b_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

上述 $D$ 的表达式就是一个三阶行列式的计算方法——沙流氏法. 它易计算，不便于推广.

**定义 1.2**　三阶行列式由 $3\times3$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,3,j=1,2,3)$ 构成，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

式中，$a_{11}$，$a_{22}$，$a_{33}$称为主对角元，$a_{13}$，$a_{22}$，$a_{31}$称为副对角元.

平行于主对角的 3 项 $a_{11}a_{22}a_{33}$，$a_{12}a_{23}a_{31}$，$a_{13}a_{21}a_{32}$为正项.

平行于副对角的 3 项 $a_{11}a_{23}a_{32}$，$a_{12}a_{21}a_{33}$，$a_{13}a_{22}a_{31}$为负项.

**例 1.2** 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x-3y+z=-1 \\ x+y+z=6 \\ 3x+y-2z=-1 \end{cases}$$

**解** $$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times1\times(-2)+(-3)\times1\times3+1\times1\times1-$$

$$2\times1\times1-(-3)\times1\times(-2)-1\times1\times3$$

$$=-23$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(-1)\times1\times(-2)+(-3)\times1\times(-1)+1\times6\times1-$$

$$(-1)\times1\times1-(-3)\times6\times(-2)-1\times1\times(-1)=-23$$

同理

$$D_2=-46, D_3=-69$$

故 $$x=\frac{D_1}{D}=1,\quad y=\frac{D_2}{D}=2,\quad z=\frac{D_3}{D}=3$$

以上就是解二元与三元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则，在克莱姆法则中，能这样简捷地用记号

$$x_i=\frac{D_i}{D}$$

表达出方程组的解，而 $D$，$D_i$ 只是方程组中的系数与常数项构成，这归功于二阶、三阶行列式的引入.

在社会生产实践中，会遇到这样大量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

注意方程组中未知量的个数=方程个数$(i,j=1,2,\cdots,n)$

记
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

上述 $D$ 表示什么样的代数式呢？我们有必要将二阶、三阶行列式定义推广到 $n$ 阶行列式，注意到三阶行列式

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

记

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} \end{vmatrix}, M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$M_{1j}$ 恰是 $D$ 中 $a_{1j}$ 所在位置被划去第 1 行第 $j$ 列后所剩余的一个二级行列式，称 $M_{1j}$ 是 $a_{1j}$ 的余子式，又记

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$$

称 $A_{1j}$ 为 $a_{1j}$ 的代数余子式，那么

$$\begin{aligned} D &= a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13} \\ &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \end{aligned}$$

**例 1.3**　计算
$$D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

**解**　用前面引进的三阶行列式计算方法

$$\begin{aligned} D &= 3\times2\times2+0\times5\times7+1\times2\times(-1) \\ &\quad -3\times5\times(-1)-0\times2\times2-1\times2\times7 \\ &= 11 \end{aligned}$$

用定义的三阶行列式计算方法

$$\begin{aligned} D &= 3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 27-0+(-16) \\ &= 11 \end{aligned}$$

## 1.2　$n$ 阶行列式定义

**定义 1.3**　设 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是 $n^2$ 个数，记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$a_{ij}$表示 $D$ 中第 $i$ 行第 $j$ 列处的数，划去 $D$ 的第 $i$ 行，第 $j$ 列，得

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

令
$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

则称 $M_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的余子式，$A_{ij}$ 称为 $a_{ij}$ 的代数余子式.

例如，$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ 的 $A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ $A_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ $A_{13}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$A_{14}=-\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

**定义 1.4** $n$ 阶行列式定义如下：

$$n=1 \qquad D=|a_{11}|=a_{11}$$

$$n=2 \qquad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$n=3 \qquad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

$$\vdots$$

一般地，$n$ 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

**注意** 符号 $D$ 代表一个 $n$ 阶行列式，$A_{1j}$是 $a_{1j}$ 的代数余子式，它是一个 $n-1$ 阶行列式，经过上面给定的运算方法，$D$ 的结果是一个数.

**例 1.4** 计算 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

**解**　$D_4=1\times\begin{vmatrix}-1&0&1\\2&0&7\\0&5&2\end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix}0&0&1\\3&0&7\\1&5&2\end{vmatrix}+2\times\begin{vmatrix}0&-1&1\\3&2&7\\1&0&2\end{vmatrix}-4\times\begin{vmatrix}0&-1&0\\3&2&0\\1&0&5\end{vmatrix}$

$=1\times45-0\times15+2\times(-3)-4\times15$

$=-21$

**例 1.5**　计算 $D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$

**解**

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&0&\cdots&0\\a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33}&0&\cdots&0\\a_{43}&a_{44}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n3}&a_{n4}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

此行列式称为下三角形行列式，它的特点是主对角元 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 上方的元素全为 0.

***例 1.6**　计算 $D_n=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2n-1}&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn-1}&a_{nn}\end{vmatrix}$

**解**

$$D_n=a_{1n}A_{1n}=(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{2n-1}\\0&\cdots&a_{3n-2}&a_{3n-1}\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn-2}&a_{nn-1}\end{vmatrix}$$

$=(-1)^{1+n}a_{1n}\cdot a_{2n-1}\widetilde{A}_{1n-1}$（注：$\widetilde{A}_{1n-1}$ 是 $n-2$ 阶行列式）

$$=(-1)^{1+n+1+(n-1)}a_{1n}a_{2n-1}\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{3n-2}\\0&\cdots&a_{4n-3}&a_{4n-2}\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn-3}&a_{nn-2}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n+1+(n-1)+1+(n-2)}a_{1n}a_{2n-1}a_{3n-2}\widetilde{\widetilde{A}}_{1n-2}$$

$$\vdots$$

$$=(-1)^{1+n+1+(n-1)+\cdots+1+2+1+1}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-12}a_{n1}$$

$$=(-1)^{n+\frac{n(n+1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

此行列式也是下三角形行列式，它的特点是副对角线上的元素 $a_{1n},a_{2n-1},\cdots,a_{n1}$ 上方的元素全为 0.

**例 1.7** 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

**解** $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{5\times 4}{2}}2\times(-1)\times 3\times 5\times 7$$

$$=-210$$

## 1.3 行列式的性质

从以上例子可知，用定义计算高阶行列式是很麻烦的，下面将给出行列式的性质，不证明，只用例子验证.

**性质 1** 行列式与它的转置行列式相同，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D^{\mathrm{T}}$$

$D^{\mathrm{T}}$ 是 $D$ 中的元素逐行变为逐列得到，$D^{\mathrm{T}}$ 称为 $D$ 的转置行列式.

例如：
$$A=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2$$

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}=12-10=2$$

**例 1.8** $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

**解** $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$= D_n^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

最后一步是根据例 5 的结论,请记住此例结论.

同理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

性质 1 说明:在行列式中行与列的地位是对等的,因此,有关行的性质,对列也同样成立.

**性质 2**　对换行列式的某两行(列),行列式变号,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如:$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= -6+16=10$

对换 1,2 行,$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\times\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2\times(3-8) = -10$

**推论**　若行列式某两行(列)对应元素相同,则此行列式的值为 0.

例如:$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= -1+7-6=0$

**性质 3** 行列式某行(列)所有元素的公因子可以提到行列式外,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ -1 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - 3\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times(-12) - 3\times 3 = -33$$

又 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ -1 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 3\times\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$(第 2 列有公因子 3)

$$= 3\times\left(2\times\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 3\times(2\times(-4) - 1\times 3)$$

$$= -33$$

**推论 1** 若行列式某两行(列)对应元素成比例,则此行列式值为 0.

**推论 2** 若行列式某一行(列)的元素全为 0,则此行列式值为 0.

例如:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

**性质 4** 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,那么,这个行列式等于两个行列式之和,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**注意** 等式右边的两个行列式与 $D$ 比较,仅仅是第 $i$ 行不同,其余行与 $D$ 中的相应行完全相同.

例如：

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 1+2 & -1+5 & 2+6\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 6\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}=-52$$

另一方面：

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 8\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}=8+6-32-32-8+6$$

$$=-52$$

**性质** 5　行列式的某一行(列)各元素乘以 $k$ 加到另一行(列)各对应元素上，所得行列式值不变，即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\times k = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

这条性质在行列式的计算中极为重要，可以利用它将行列式的某些元素变为 0，使行列式向着上三角形行列式转变，再利用例 1.8 的结论就行了.

**例** 1.9　计算行列式

$$\begin{vmatrix}3 & -5 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0 & -5\\ -1 & 3 & 1 & 3\\ 2 & -4 & -1 & -3\end{vmatrix}$$

**解**

$$\begin{vmatrix}3 & -5 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0 & -5\\ -1 & 3 & 1 & 3\\ 2 & -4 & -1 & -3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{对换 1,2 行}}-\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & -5\\ 3 & -5 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 1 & 3\\ 2 & -4 & -1 & -3\end{vmatrix}\quad \times(-3)\quad \times 1\quad \times(-2)$$

$$=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & -5\\ 0 & -8 & 2 & 16\\ 0 & 4 & 1 & -2\\ 0 & -6 & -1 & 7\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & -5\\ 0 & -4 & 1 & 8\\ 0 & 4 & 1 & -2\\ 0 & -6 & -1 & 7\end{vmatrix}\quad \times 1\quad \times\left(-\frac{3}{2}\right)$$