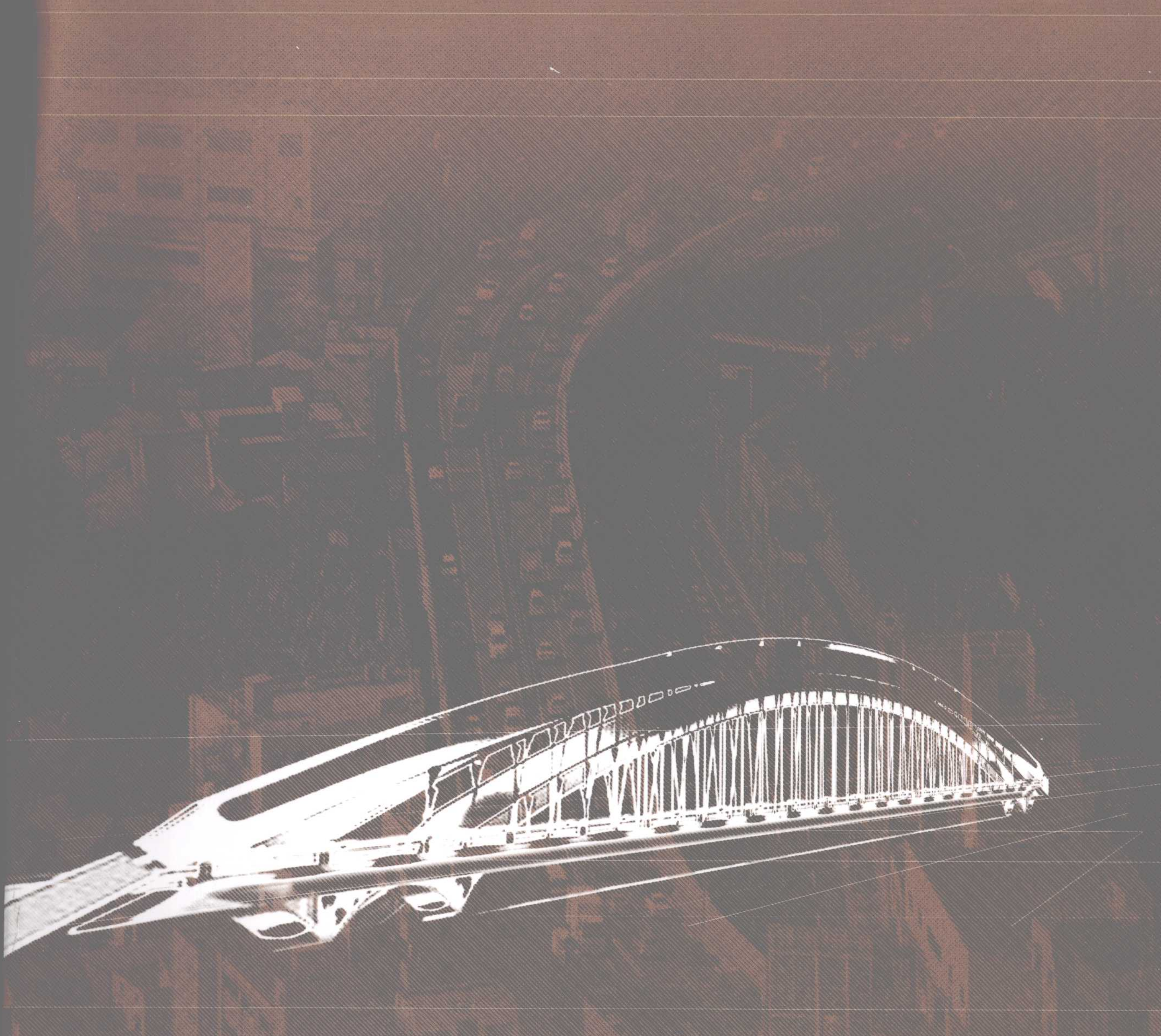

桥梁结构仿真分析理论及其工程应用

汪劲丰 吴光宇 著
徐 兴审 核

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大學出版社

桥梁结构仿真分析理论及其工程应用

汪劲丰　吴光宇　著

徐　兴　审核

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

桥梁结构仿真分析理论及其工程应用/汪劲丰,吴光宇著.—杭州:浙江大学出版社,2007.8
ISBN 978-7-308-05523-9

Ⅰ.桥... Ⅱ.①汪...②吴... Ⅲ.建筑结构—系统仿真
Ⅳ.U443

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 139219 号

内容简介

本书以实体退化系列单元理论为基础,系统阐述了复杂桥梁结构仿真分析理论及其工程应用。分别对复杂桥梁结构的三维预应力效应、三维收缩徐变效应及非线性效应的分析方法进行论述,并专门对极限承载能力分析方法进行了阐述。为了便于读者掌握,在每一理论方法后都附有数值算例;并以实际桥梁为背景,详细介绍了仿真分析方法的工程实践和应用。

本书可作为高校桥梁专业老师、研究生的学习参考用书,也可作为从事结构分析工作的科研人员及桥梁工程师的专业参考书。

桥梁结构仿真分析理论及其工程应用
汪劲丰　吴光宇　著

责任编辑　石国华
封面设计　宋纪浔
出版发行　浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版　星云光电图文制作工作室
印　　刷　浙江中恒世纪印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　15.5
字　　数　397 千字
版 印 次　2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-05523-9
定　　价　35.00 元

前言

近现代桥梁结构的快速发展，与桥梁结构数值仿真分析技术的发展密不可分。

有限单元法作为一种方法可靠、适用面很广的数值仿真分析技术，在桥梁工程领域，已被广泛用于结构静动力分析、施工过程验算及抗风抗震计算等，使得结构更新颖、体系更复杂、跨径更大的桥梁的设计建造成为可能。但由于桥梁结构复杂庞大、计算机的容量及速度有限，目前的桥梁设计中仍以平面杆系理论为主。

随着桥梁跨径的不断增长，结构体系的日趋复杂，基于线性理论的平面分析方法已不能满足理论研究和工程设计的需要，因此大跨复杂桥梁结构的空间分析，特别涉及非线性效应的空间分析，已越来越得到广大科技工作者的重视。然而令人遗憾的是，目前采用有限单元法中常用的三维实体、梁或板壳单元进行大跨复杂桥梁结构的空间非线性分析时，仍然存在着许多困难。

桥梁结构空间分析中，用三维实体单元能建立全真的分析模型，具有很高的分析精度，能客观模拟结构边界条件、荷载条件，能较方便地进行结构的非线性分析等；但所需单元数量较多，对于大跨结构，分析效率势必低下，甚至无法完成结构分析。梁单元、板壳单元则具有较高的分析效率，但由于现代桥梁结构截面形式复杂、宽度较大、尺寸存在变化等，结构的受力特性可能会同梁、板壳等存在较大差别，且采用梁、板壳单元进行桥梁结构空间分析时，建模过程存在较多的假设，具有较大的经验性和主观性，通用性较差。计算效率同分析精度之间的矛盾是目前大跨复杂桥梁结构空间分析中存在的主要问题。

浙江大学徐兴教授通过多年的研究，提出了实体退化系列单元，并带领科研团队，围绕大跨复杂桥梁结构的空间分析问题进行了系统而深入的研究。该系列单元能很好克服前述矛盾和困难，为三维预应力效应、收缩徐变效应及结构非线性效应等的分析计算，带来了很大的方便，特别是极限承载能力的分析，为各类桥梁结构的仿真分析提供了一个普遍适用的方法。

本书主要目的是向读者系统而全面介绍这种新的单元模式——实体退化系列单元，并从三维空间的角度，探讨及阐述桥梁结构预应力效应、混凝土收缩徐变效应及非线性效应的分析理论、方法和工程应用，同时对桥梁结构的极限承载能力分析方法及应用进行了专门论述。

本书包括绪论、基本理论及工程应用三大部分内容，共 9 章。

本书第 1 章对桥梁结构分析的基本内涵、分析特点、问题种类、数值方法及技术现状进行了简述，同时还对有限元方法的基本过程、软件及发展趋势进行了介绍。

本书第 2 章对实体退化单元理论进行了阐述。

本书第 3 章至第 6 章基于实体退化单元，对预应力空间效应、三维徐变效应及非线性效应的分析方法分别进行了介绍；在此基础上进一步对复杂桥梁结构的极限承载能力分析方法进行了阐述。为了便于读者理解，对每一章所述的理论方法都给出了相应的数值算例。该部分是将理论转化为应用的关键步骤之一。

本书第 7 章至第 9 章分别以预应力混凝土斜拉桥和连续刚构桥为背景，详细阐述了复杂桥梁结构仿真分析的建模方法，对其施工过程进行了仿真模拟，并对预应力的空间效应进行了评价。此外，还特别对连续刚构桥极限承载状态下的结构行为的分析进行了介绍。为读者在理论和实际应用之间架起一座桥梁。

本书第 1 章、第 2 章、第 4 章、第 5 章、第 7 章和第 8 章由汪劲丰博士撰写，第 3 章和第 6 章由吴光宇博士撰写，第 9 章则由汪劲丰、吴光宇共同撰写。全书由汪劲丰统稿，由徐兴教授主审。

由于作者水平有限，定有不妥和错误之处，恳请专家和读者批评指正。

作者

2007 年 8 月

目　　录

第一章　绪　论

现代桥梁结构规模日趋庞大、体系日趋复杂，对结构受力的准确把握非常重要。仿真分析技术是了解桥梁结构在施工、正常运营及极限承载状态下性能的一种重要手段。本章从桥梁结构分析的基本内涵、特点、种类与有限元方法等方面进行了综述，以使读者对桥梁结构分析及其基本方法有个全面的认识。

1.1　桥梁结构分析概述

桥梁结构作为一个系统，人们对其有众多方面的要求，如美观程度、工程造价、交通地位、技术条件及受力性能等。就结构受力而言，主要有强度、刚度及稳定性等三类评价指标方面的规定。在设计阶段，是要根据拟定的工作条件及指标范围来确定系统组成及结构；在运营阶段，是要根据实际的工作条件及系统结构来计算各评价指标值，以评定桥梁的技术状况。所以不论是目前的结构设计还是将来的状态评估，都离不开桥梁结构分析工作。近现代桥梁结构的快速发展，与桥梁结构分析技术的发展密不可分。

1.1.1　基本内涵

桥梁结构分析是确定已知条件、建立结构物理力学模型，并运用相应的分析理论和方法进行计算，最后对计算结果进行判断和审核的这样一个复杂过程。

结构分析的已知条件包括自然环境、技术标准和结构设计等三个部分。自然环境是指桥址处的气象、水文及地质等。对于具体的桥梁结构来说，自然环境是客观存在的。技术标准是由主管建设部门通过全面统筹考虑，作为设计任务书的内容下达的，一般包括荷载等级、行车速度、车道布置及车道数等。技术标准带有一定主观性，同人为决策有关。结构设计是指具体的结构组成、构造尺寸、建筑材料及支承条件等。风荷载、地震荷载、年温差等一般是由自然环境确定；结构局部温差则由外界环境和结构构造共同决定；车辆荷载由相应技术标准决定；自重荷载由结构的具体设计确定。

建立分析模型是将复杂的桥梁结构系统简化为目前可解的力学问题的过程，它是结构分析工作的关键一步，分析模型与分析方法是相互对应的。对此，一般要求根据拟定的已知条件和已有的分析经验，在认真分析结构复杂程度及具体的分析目的基础上，综合确定结构模式、边界条件及工作状态等。如采用有限元方法对某一混凝土桥梁结构进行分析时，若分析是为了进行配筋设计，杆系模型即可满足要求；若要了解整体空间受力情况，可建立板壳单元模型；若进行局部受力分析，则要用三维实体单元进行结构建模。

结构分析中对计算结果的审核和判断包含两个方面：一是对计算结果本身正确与否

的判断；二是计算结果是否满足相应的指标要求，如强度、刚度、稳定性等。计算结果正确与否主要同选用的分析模型及分析方法有关，对此的分析判断是结构分析工作中非常重要的一个环节，绝不可忽略，一般要求分析者具有扎实的力学基础及结构设计理论。对于计算结果是否满足指标要求的判断，主要是依据相应的国家标准和技术规范进行的。

桥梁结构的仿真分析就是利用与对象的特性和变化规律相似的物理模型，对其施工过程、正常运营及极限承载状态下的复杂力学行为进行准确预测。一般包括以下几个方面的要求：

(1)模型能够准确反映实际结构质量及刚度的三维分布；

(2)客观模拟各种荷载和各类边界；

(3)能够考虑结构的非线性效应；

(4)分析方法和手段应面向实际桥梁工程。

桥梁结构分析的基本过程如图 1-1 所示。

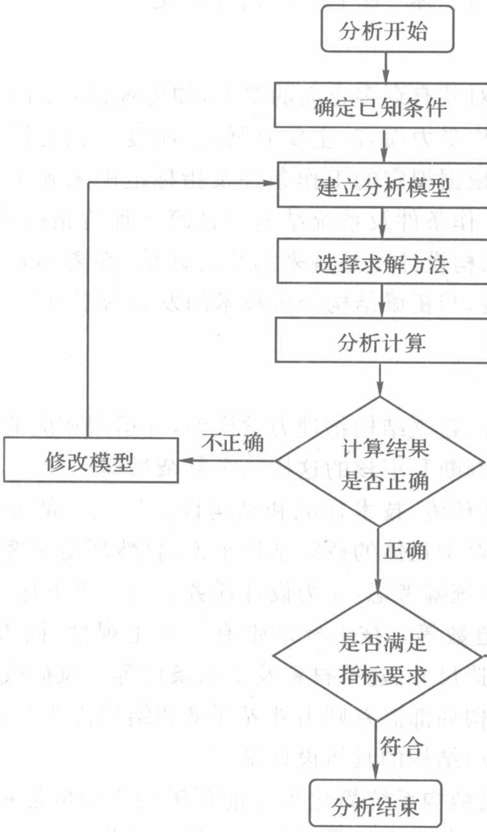

图 1-1　桥梁结构分析的基本过程

1.1.2　分析特点

对于目前大跨、复杂桥梁结构的受力分析，最显著的三个特点是：非线性、时间依存性和规模庞大，这直接导致了桥梁结构分析计算工作量大、技术难度高。

(1)非线性效应

固体力学问题，从本质上讲都是非线性的，线弹性力学问题只是实际问题的一种简化假定。通常，把非线性有限元问题分成三大类，即几何非线性、材料非线性和边界条件非线性。

①材料非线性

非线性效应仅由应力—应变关系的非线性引起，位移分量仍假设为无限小量，结构变形后的构形假定仍与初始构形相同。如混凝土徐变、混凝土压溃与开裂、钢材的屈服等。

②几何非线性

物体经历了大变形，结构变形后的构形与初始构形相重的假定不再成立，但应变分量仍假设为无限小。此时应力—应变关系仍假设为线性的。如拉索的垂度效应、梁柱的压弯效应(即 $P\sim\Delta$ 效应)和大变形效应等。

③边界非线性

非线性效应是由于边界条件随物体的运动发生变化所引起的。如对支架或移动模架现浇的混凝土梁进行预应力张拉时，梁身会部分脱离支架，其边界条件随预应力张拉过程而异。

(2)时间依存性

时间依存性是桥梁结构受力的又一个重要特点，它是指在荷载、边界条件及外界环境不变的情况下，结构的内力和位移随时间而发生变化的一种特性。这主要是由材料的粘性引起的，如混凝土徐变、预应力筋在高应力状态下的松弛等。

(3)规模庞大

与一般的分析对象相比，桥梁结构规模的庞大不言而喻。对象规模的庞大导致结构分析工作量及难度直线上升，这是在实施结构分析时必须认真考虑的问题。很多理论上可行的方法，在桥梁结构上都不能很好地应用，这在非线性分析上表现得最为明显。大多数情况下，桥梁结构的分析仍停留在弹性的杆系方法上。

1.1.3 问题种类

桥梁结构的计算分析一般包括静力分析、动力分析、稳定性分析和疲劳分析等。

(1)静力分析

静力分析的任务是计算在固定不变的载荷作用或可以近似为等价静力作用的随机荷载作用下结构的效应，它不考虑惯性和阻尼的影响。静力分析中要求载荷作用点恒定、加载速度缓慢或者为零、加载量值缓慢变化或保持恒定。

静力分析是整个结构分析工作的基础，也是我们最为熟悉的问题。一般包含三个层次的分析，即全桥结构的整体分析、主要构件的结构分析、复杂细节和局部构造的结构分析。对于桥梁结构，主要有：施工过程计算、活载效应分析、静风效应分析、局部受力分析、二次效应分析等。

(2)动力分析

与静力分析相对，动力分析是计算结构对于随时间变化的荷载所产生的响应，包括振动特性和动力响应分析。如车桥耦合振动、风荷载响应、地震荷载响应等分析均属于动力

分析的范畴。

(3)稳定性分析

稳定问题是桥梁工程中经常遇到的一个问题,与强度问题有着同等重要的意义。结构失稳是指结构在外力增加到某一量值时,稳定性平衡状态开始丧失,稍有扰动,结构变形迅速增大,使结构失去正常工作能力的现象。结构稳定性分析实际上就是寻求失稳荷载的过程。

结构失稳共有两种形式:第一类稳定为分支点失稳,第二类稳定为极值点失稳问题。第一类稳定问题是特征值问题,第二类问题是极限承载能力问题。两类稳定问题的求解思路相同,但分析问题的深度不同,两者都是结构在失稳荷载作用下的切线刚度奇异,导致平衡方程有无数多个解,从而结构处于一种不稳定的平衡状态。但第一类稳定问题假定结构失稳前小变形、材料线性,而第二类稳定问题则考虑了结构的材料和几何非线性,实际工程中的稳定问题一般多表现为第二类失稳。

(4)疲劳分析

疲劳分析主要是针对钢结构而言的。疲劳现象是钢材在反复荷载和由此引起的脉动应力作用下,由于其内部缺陷或疵点处局部微细裂纹的形成和发展直到最后发生脆性断裂的进行性破坏过程。钢材的疲劳破坏不同于局部拉应力高峰所造成的脆断破坏,它是拉应力、压应力反复作用和塑性损伤累积的结果。

1.1.4　数值方法

在工程技术领域中,有许多力学问题或场问题(温度场、电磁场),虽然人们已经得到了它们的基本方程和边界条件,但是能用解析方法求解的仍只是少数方程性质比较简单、边界规则的问题,而绝大多数工程问题没有解析解。这类问题的解决通常有两种途径:一种是引入简化假设,使达到能用解析法求解的地步,求得问题在简化状态下的“解析解”,这种方法并不总是可行的,不恰当的假设,通常将导致不正确的解析解。另一种途径是保留问题的复杂性,利用数值计算方法求得问题的近似数值解。

随着电子计算机的飞速发展和广泛应用,对于复杂桥梁结构的计算分析,多采用离散化的数值分析方法。即在已建立的物理模型和数学模型的基础上,采用一定的离散化的数值方法,用有限个未知量去近似待求的连续函数,从而将微分方程问题转化为代数方程问题,并利用计算机求解。在固体力学领域应用最广泛的数值方法是有限元法,可用于复杂形状和非均匀物性的力学问题的求解。其他数值方法还有有限差分法、边界元法、有限条法等。前者的特点是直接对微分方程进行离散,但尚不能用于复杂几何形状的力学问题的求解。后二者区别于有限元法的是分别只在边界上或域内某些方向上离散,而在域内或域内另一方向上仍解析地满足微分方程,从而使未知量减少,可方便地应用于一定类型的问题。

1.1.5　技术现状

随着现代交通的不断发展,桥梁的载重、跨径和桥面宽度也在不断地增长,结构形式和施工方法也不断变化,桥梁的力学分析越来越复杂,随着计算机技术的发展,有限元分

析方法在桥梁工程中将得到更加广泛的应用，有限元法在结构分析中的地位已是不可代替的了。近年来软件不断吸取新的计算方法和计算技术，随着交互方式的加入，大大简化了模型的生成和结果的评价，特别是强大的后处理功能，方便了设计人员在有限元计算分析后进行数据处理和结果分析的工作，从而大大缩短了设计周期、提高了设计可靠性。需要特别指出的是，一些桥梁专用的有限元分析软件，由于其分析功能与规范要求结合紧密，在桥梁设计中已得到了非常广泛的应用。

数值方法及计算机技术的发展给桥梁结构的分析带来了革命性变化，但由于桥梁结构及其受力所具有的一些特点，目前结构分析中仍面临如下一些难题：

(1)大跨径桥梁几何及材料双非线性效应分析问题；

(2)结构极限承载能力(第二类稳定)的分析问题；

(3)结构非线性动力效应分析问题；

(4)分阶段施工过程的三维仿真分析；

(5)空间预应力索及混凝土收缩、徐变的非线性效应的数值模拟；

(6)叠合及混合桥梁结构的仿真模拟问题；

(7)既有结构加固效果评价分析；

(8)车桥耦合振动、风与结构共同作用等的数值模拟问题。

对于上述这些问题的深入研究，将促进桥梁结构分析理论的进一步发展，同时也将带来桥梁建造技术的变革。

1.2　桥梁结构分析的有限元法

为了便于理解此书的内容，在此对有限元法作一基本介绍。

1.2.1　基本介绍

有限元法是利用电子计算机处理固体力学问题的一种数值方法，目前应用最为广泛。其首先是由 Turner、Clough、Martin 和 Topp 于 1954 年在结构分析矩阵法的基础上作为一个经验设想而提出来的，并于 1956 年采用三角形单元和矩形单元成功地将结构力学中的位移法用来求解平面应力问题。1960 年，Clough 引进了“有限元法”这一名称。1960 年以后，有限元法发展迅速。到 20 世纪 70 年代中期，有限元法作为一种数值方法在理论上已经比较成熟，现在人们主要是用它从事实际应用方面的研究。到 70 年代中期我国才开始研究和推广应用有限元法。虽然有限元方法起源于结构分析，但由于它所依据的理论的普遍性，已被推广应用于其他领域的许多场问题。

应用有限元求解任意的连续体时，应把连续的求解区域分割成连续而互不重叠的有限个单元，并在每个单元上指定有限个节点，用以模拟或逼近求解区域。同时选定场函数的节点值(例如取节点位移)作为基本未知量；并对每个单元根据分块近似的思想，假设一个简单的插值函数，近似地表示其位移的分布规律；再利用弹塑性理论中的变分原理或其他方法，建立单元节点的力和位移之间的力学特性关系，得到一组以节点位移为未知量的

代数方程组，从而求解节点的位移分量。一经解出，就可以利用插值函数确定单元集合体上的场函数。

由于有限元分析方法的日趋成熟，再加上计算机技术的发展，出现了大量优秀的通用有限元分析软件。有限元法在众多领域已成为解决实际问题的一种非常有效的工具，在桥梁工程领域，该方法已被广泛用于结构静动力分析、施工过程验算及抗风抗震计算等，使得结构更新颖、体系更复杂、跨径更大的桥梁的设计建造成为可能。

1.2.2 有限元法的基本过程

用有限单元法求解满足边界条件的物体内的位移和应力分布基本上分三步进行：连续体离散化为单元、单元分析和总体分析，其中单元分析包括选择单元模式及分析单元力学特性等两个过程。在此以平面问题的三角形单元为例，对有限元法的基本过程进行介绍。

1.2.2.1 连续体离散化

连续体的离散化就是用有限个按一定规则在节点和边界上满足一定关系的离散单元的组合体代替原来的连续体，这样的组合体称为有限单元系统。设有限单元系统共有 NE 个单元，NP 个节点。在有限元的位移法中，系统的节点位移是基本未知量。记第 k 个节点的位移矢量为 $\boldsymbol{d}_k=\{u_k,v_k,w_k\}^{\mathrm{T}}$，则系统的节点位移矢量可以表示为：

$$\boldsymbol{d}=\{\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{d}_{NP}^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}} \tag{1.1}$$

对于平面问题，可表示为：

$$\boldsymbol{d}_k=\{u_k,v_k\}^{\mathrm{T}}$$

对于平面问题，假设用最简单、最常用的三角形单元(图 1-2 所示)，把弹性体分割成有限个连续而互不重叠的三角形，并指定三角形顶点为节点，构成一个单元集合体，代替原来的弹性体。此时，弹性体的边界为一系列折线所代替，随着单元的细划，单元集合体不断地逼近弹性体。

连续体离散化为单元体集合，其本质是剖分插值，即将弹性体所占的域剖分成称为单元的子域的集合，将未知位移场用插值函数近似。

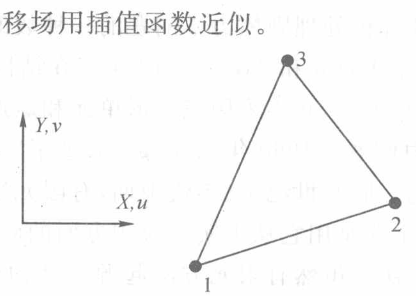

图 1-2 平面三角形单元

1.2.2.2 选择位移模式

完成结构的离散之后，就可以对典型单元进行特性分析。此时，为了能用节点位移表示单元体的位移、应变和应力，在分析连续体问题时，必须对单元中位移的分布作出一定的假定，即假定单元内任意点的位移是坐标的某种简单的函数，这种函数称为位移模式或

插值函数。

选择适当的位移模式是有限元分析中的关键,合理的位移插值形函数的选取十分重要,它直接关系到有限元法的收敛性,一般要求 $\boldsymbol{u}$ 在单元内和单元间都是连续的。通常选择多项式作为位移模式,原因是多项式的数学运算比较方便,并且由于所有光滑函数的局部都可以用多项式来逼近。而多项式阶数和项数的选择,则要考虑到单元的自由度和解的收敛性要求。一般而言,多项式的项数应等于单元的自由度数,它的阶次应包含常数项和线性项等。

根据选定的位移模式,就可以导出用节点位移表示单元内任一点位移的关系式。记这种关系式为

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{d}^{e} \tag{1.2}$$

式中,$\boldsymbol{u}$ 为单元内任意点的位移矢量,$\boldsymbol{d}^e$ 为单元中所有节点的位移矢量。$\boldsymbol{N}$ 为位移插值形函数矩阵。

三角形平面单元的插值形函数式为:

$$\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_3]\quad \boldsymbol{N}_i=\begin{bmatrix}N_i & 0\\ 0 & N_i\end{bmatrix} \tag{1.3}$$

式中

$$N_1=\frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}\qquad N_2=\frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x & y\\ 1 & x_3 & x_3\end{vmatrix}$$

$$N_3=\frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1\\ 1 & x_2 & y_1\\ 1 & x & y\end{vmatrix}\qquad 2\Delta=\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & x_3\end{vmatrix}$$

由上式容易看出,形函数具有如下性质:

(1)N_i 在第 i 个节点(x_i,y_i)处的值为 1,在其他节点处的值为 0;

(2) 单元某条边上的位移由该边上相应节点唯一确定,与其他节点无关;

(3) 单元内任意一点形函数的和等于 1。

利用上述性质,很容易证明相邻单元的位移分别进行插值以后,在公共边上是连续的。

1.2.2.3　单元力学特性分析

(1) 把式(1.3)代入相应的几何方程(应变位移关系式),可求得单元中任一点的应变:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{d}^{e}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{d}^{e} \tag{1.4}$$

注意到,$\boldsymbol{L}$ 是坐标的线性算子,$\boldsymbol{d}^e$ 与坐标无关。对三节点三角形平面单元,$\boldsymbol{B}$ 为常数矩阵,即单元应变为常应变。很明显,应变在单元之内是连续的,在单元间一般是不连续的。

(2) 利用本构方程(应力应变关系式),由应变表达式(1.4) 导出用节点位移表示单元应力的关系式:

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{d}^{e} \tag{1.5}$$

式中,$\boldsymbol{\sigma}$ 为单元内的任一点的应力列阵,$\boldsymbol{D}$ 与单元材料有关的弹性矩阵。

(3) 利用虚功原理,建立单元的平衡方程。

在小变形条件下，单元虚功方程为：

$$\int_{V^e}(\delta\boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}V=\int_{V^e}(\delta\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{f}\mathrm{d}V+\int_{\Gamma_t^e}(\delta\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma^e-\Gamma_t^e-\Gamma_u^e}(\delta\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\Gamma \tag{1.6}$$

式中，V^e 为单元所占据的空间区域；Γ^e 为单元表面；$\Gamma_t^e=\Gamma_t\cap\Gamma^e$，$\Gamma_u^e=\Gamma_u\cap\Gamma^e$，$\Gamma^e-\Gamma_t^e-\Gamma_u^e$ 为相邻单元的交界面，其中，Γ_t 和 Γ_u 分别为弹性体所占据区域的力的边界和位移边界；$\boldsymbol{f}$ 为体积力；$\boldsymbol{F}$ 为表面分布力；$\boldsymbol{t}$ 为交界面的相互作用力。对(1.4)式变分，注意到 $\boldsymbol{B}$ 是空间的函数，其变分为 0，可得：

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{d}^e \tag{1.7}$$

$$\delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{N}\delta\boldsymbol{d}^e \tag{1.8}$$

把(1.7)、(1.8)式代入(1.6)式，可得：

$$\int_{V^e}(\delta\boldsymbol{d}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}V=\int_{V^e}(\delta\boldsymbol{d}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\mathrm{d}V+\int_{\Gamma_t^e}(\delta\boldsymbol{d}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma^e-\Gamma_t^e-\Gamma_u^e}(\delta\boldsymbol{d}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}\Gamma \tag{1.9}$$

注意到，$\boldsymbol{d}^e$ 与坐标无关，因此可以从积分号中提取出来，$\delta\boldsymbol{d}^e$ 是任意的，则上式可进一步变化为：

$$\int_{V^e}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\mathrm{d}V\boldsymbol{d}^e=\int_{V^e}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\mathrm{d}V+\int_{\Gamma_t^e}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma^e-\Gamma_t^e-\Gamma_u^e}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\Gamma$$

记

$$\boldsymbol{K}^e=\int_{V^e}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\mathrm{d}V;\quad \boldsymbol{Q}^e=\int_{\Gamma_t^e}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\mathrm{d}\Gamma$$

$$\boldsymbol{P}^e=\int_{V^e}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\mathrm{d}V;\quad \boldsymbol{F}^e=\int_{\Gamma^e-\Gamma_t^e-\Gamma_u^e}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\Gamma$$

单元的平衡方程可以表示为：

$$\boldsymbol{K}^e\boldsymbol{d}^e=\boldsymbol{P}^e+\boldsymbol{Q}^e+\boldsymbol{F}^e \tag{1.10}$$

称 $\boldsymbol{K}^e$ 为单元刚度矩阵，它显然是对称半正定的，$\boldsymbol{P}^e$ 为单元的体积力等效结点力，$\boldsymbol{Q}^e$ 为单元表面力等效节点力，$\boldsymbol{F}^e$ 为相邻单元对该单元的作用力的等效节点力。集中力可以视为一种特殊的体积力或表面力。

例如，作用在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的集中力 $\boldsymbol{R}_0$ 可以表示为如下形式的体积力：

$$\boldsymbol{f}_0=\boldsymbol{R}_0\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \tag{1.11}$$

其中，$\delta(x)$ 为脉冲函数，则集中力对应的等效节点力为：

$$\boldsymbol{P}_0=\int_{V^e}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_0\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}V=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_0 \tag{1.12}$$

特殊地，若集中力 $\boldsymbol{R}_0$ 作用在单元的第 i 个节点上，则有：

$$(\boldsymbol{P}_0)_j=\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{R}_0\delta_{ij} \tag{1.13}$$

由(1.12)式和(1.13)式可以看出，若 $\boldsymbol{R}_0$ 作用在节点 $\boldsymbol{x}_k$ 上，则 $\boldsymbol{R}_0$ 即为作用在该节点上的等效节点力；若 $\boldsymbol{R}_0$ 作用在单元表面或单元节线上，则 $\boldsymbol{R}_0$ 的等效节点力作用在该表面或该节线上的节点。为方便起见，单元划分时，集中力最好作用在节点上。

1.2.2.4　总体分析

式(1.10)仅反映一个单元的平衡，最终还须集合所有单元的平衡方程，以建立整个结构的平衡方程。该集合过程包括两个方面：一是将各单元的刚度矩阵集合成整个结构的整体总体刚度矩阵；二是将作用于各单元的等效节点力列阵，集合成总的载荷列阵，常用的方法是直接刚度法。

在总的荷载列阵集成时，单元间相互作用的等效节点力 F^e 是未知的，但由于相邻单元 e_i 和 e_j 在界面上的作用是相互的，e_i 单元对 e_j 单元的作用力与 e_j 单元对 e_i 单元的作用力具有大小相等、方向相反的特点，因此两个单元合并在一起时，相互作用的等效节点力恰好抵消。

于是，可得到整个有限元系统节点位移和节点力间的平衡关系，表达式为：

$$\boldsymbol{Kd} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} \tag{1.14}$$

式中，$\boldsymbol{K}$ 为整体刚度矩阵或总刚阵，$\boldsymbol{P}$ 为有限元系统的体积力等效节点力，$\boldsymbol{Q}$ 为有限元系统表面力等效节点力。由于单元之间相互作用的内力彼此抵消，因此式(1.14)中仅包含荷载所引起的等效节点力。

整体刚度矩阵具有很多重要的性质，说明如下：

(1) 整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 中每一元素的物理意义是要使弹性体的某一节点自由度发生单位广义位移，而其他节点自由度都保持为零位移的状态下，所有各节点需要施加的结点广义力；

(2) 整体刚度阵 $\boldsymbol{K}$ 的主元素总是正的；

(3) 整体刚度阵 $\boldsymbol{K}$ 是对称矩阵；

(4) 整体刚度阵 $\boldsymbol{K}$ 是一个稀疏阵；

(5) 整体刚度阵 $\boldsymbol{K}$ 是一个半正定阵，经约束刚体位移处理后，它是正定阵。

在求得有限元系统的总体矩阵和结构的平衡方程组后，引入相应的边界条件，并选用合适的方法进行方程组求解，即可求得各节点的位移值，并可进一步计算各单元的应力，最后通过整理可得到所要求的结果。

综上所述，有限单元法解决力学问题的步骤归纳如下：

(1)确定问题的类型和选用的单元类型以及边界条件；

(2)将要计算的结构进行网格剖分，并对节点和单元进行整体编号；

(3)列出节点坐标、单元各节点的总体编号，载荷信息和约束信息作为输入信息；

(4)依次对所有单元循环，计算单元的刚度矩阵和体积力等效节点力，并同时组集，形成整体刚度矩阵和总体体积力等效结点力；

(5)对所有集中力和表面分布力循环，得其等效节点力，并组集；

(6)处理约束及消除刚体位移；

(7)求解线性方程组，求得各节点位移；

(8)求解单元应力和节点应力；

(9)结果提取和分析。

通常步骤 4～8 均由有限元分析软件完成，步骤 1～3 由人工或有限元前处理软件完成，步骤 9 由人工或有限元后处理软件完成。