中国高等教育学会教育数学专业委员会组编

21世纪职业院校规划教材·数学系列

高等数学

（下册）

郭建富 唐广阳 主编

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

中国高等教育学会教育数学专业委员会组编

21世纪职业院校规划教材·数学系列

高等数学

（下册）

主　编：郭建富　唐广阳
副主编：徐雅玲　罗胡英
主　审：韩云瑞
编　委：（按姓氏笔画排序）
张汉青　张永辉　李晓娜　苗森玉
赵　姝　徐雅玲　唐广阳　高淑娥
郭子燕　郭建富

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/郭建富,唐广阳主编. 一武汉:武汉大学出版社,2008. 4
21 世纪职业院校规划教材·数学系列
ISBN 978-7-307-06170-5

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①郭… ②唐… Ⅲ. 高等数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 026752 号

责任编辑:李汉保　　责任校对:程小宜　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)
印刷:湖北金海印务公司
开本:787×1092　1/16　印张:9　字数:218 千字　插页:1
版次:2008 年 4 月第 1 版　　2008 年 4 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-06170-5/O·382　　定价:18.00 元

前　　言

近年来，高职高专教育迅速发展，为了适应高等工科学校培养高等技术应用型人才的需要，根据国家教育部高职高专规划教材的要求，在广泛吸取同行意见的基础上，编写了本教材．在编写过程中，遵循了高职高专教材以应用为目的，以必需够用为度的原则，体现了注重能力的特色．精心选择教材内容，加强数学思想和数学概念与工程实际相结合的高职高专特色，淡化了深奥的数学理论，便于学生学习和应用．并增加了数学软件上机实践的内容，以提高学生运用微机解决数学问题的能力．具体地讲，本教材主要具有以下特点：

1．坚持高职高专教育的高层次、职业性和可衔接性的统一．其专业基础课教材以高中或中职毕业文化为起点，为培养高等技术人才服务；区别于高等普通教育教材，突出高等技术职业教育特点，以培养高等技术应用型人才为培养目标；为高职高专教育的后续课程即专业课提供素质、知识和能力的所必需的、够用的高等数学相关知识基础．

2．坚持实用性与前瞻性的统一．高等职业技术教育属于大众化的教育．学生毕业后，绝大多数要进入岗位就业，或者自己去创业．因此，教材内容必须强调实用性和针对性．同时，为了兼顾未来岗位群的发展和学生对后续发展的需要，教材内容必须坚持前瞻性原则，在内容上要新，做到充分吸收本专业最新科研成果和最新的实践经验和案例，并把这些新内容与高等职业技术教育教学要求及学生接受能力结合起来，以强化教材的科学性、先进性和实用性．

3．基于数学教育的需要，根据数学教育的规律，对于数学研究成果进行数学上的再创造，提供教学法加工的材料．对于已有的数学知识在体系结构的简约性和传播的有效性上进行再创造．以最简洁明了的、易于接受的逻辑体系向学生提供最值得传授的数学知识．优化数学知识（概念、原理和方法）的表述方式，使得教材更加科学、更加平易，更加符合教育规律，易教易学．

4．着眼于适应社会需要和满足职业岗位群的要求，坚持以提高学生整体素质为基础，以培养学生的适应能力，特别是以实践能力和创新能力为主线，确立专业基础课程新体系和教材内容新体系．自觉摆脱“专科教材为本科教材的压缩饼干”现象，克服传统教材以从理论到理论的阐述为章节结构的习惯做法，结合专业内容的特点，适度增加图、表、实例、案例等栏目的内容比例，强化理论与实际的结合、基本理论与动手操作的结合等，真正体现高等职业技术教育的特色．

5．有较强的编委和作者阵容，不但有具有一定影响的跨世纪学科或专业带头人和部分高职院校的专家，还有多名各高职院校的从事高等数学教学的一线教师．较好地发挥了集思广益和优势互补的作用，确保了教材的质量，能够适应高等职业技术教育的不同专业对专业基础课教材的需要．

本教材分上、下两册．上册介绍了一元函数微积分，下册介绍了空间解析几何，多元函数微积分，无穷级数和常微分方程．主要适用于工科类高职高专各专业，还可以作为专升本考试的教材或参考书．

本书在编写和统稿过程中，得到清华大学韩云瑞教授精心审阅和指导，以及众多高职高专

院校的大力支持，在此我们表示衷心感谢！

由于编者水平有限，时间紧迫，疏漏和错误在所难免，期望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学实践中，能够得到进一步完善.

作　者

2007年10月

目　录

第 7 章　空间解析几何

在平面解析几何中，通过坐标法将平面上的点与一对有序数对建立了对应关系，把平面上的图形和方程对应起来，从而可以用代数的方法解决几何问题，空间解析几何也是按类似的方法建立起来的.

平面解析几何的知识对一元函数微积分是不可缺少的，空间解析几何的知识对多元函数的微积分是必要的.

§7.1　空间直角坐标系

7.1.1　空间直角坐标系

在空间取一定点 O，过 O 点作三条相互垂直且具有相同长度单位的数轴. 称这三条数轴分别为 Ox 轴（横轴）、Oy 轴（纵轴）、Oz 轴（竖轴），这三条数轴统称为坐标轴，点 O 称为坐标原点，通常把 Ox 轴、Oy 轴放置在水平面上，Oz 轴则铅直放置，三条坐标轴的正方向符合右手法则，即伸出右手，拇指与其余并拢的四指垂直，四指指向 Ox 轴正方向，然后让四指从 Ox 轴正方向向 Oy 轴正方向紧握，握住 Oz 轴时，拇指的指向为 Oz 轴的正方向. 图 7-1 中的箭头指向分别为 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴的正方向，这样的三条坐标轴就构成了一个空间直角坐标系.

三条数轴中任意两条确定一个平面，分别为 xOy 面、yOz 面、zOx 面，称为坐标面. 三个坐标面将空间分成八个部分，称为八个卦限，如图 7-2 所示，以 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴正半轴为棱的卦限为第一卦限，在 xOy 平面上方按逆时针方向依次为第二、三、四卦限，在 xOy 平面下方与第一卦限相对的为第五卦限，然后按逆时针方向依次为第六、七、八卦限.

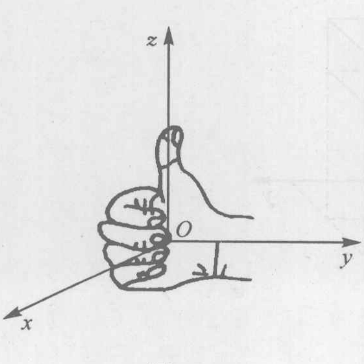

图 7-1

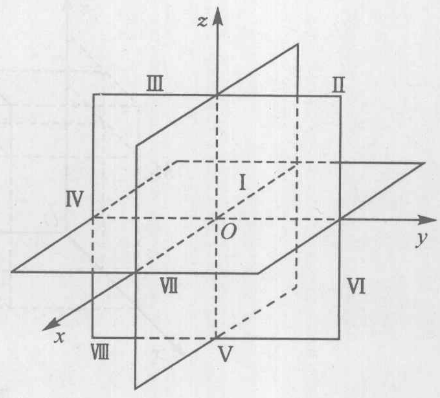

图 7-2

空间中的一点 M 的坐标是这样规定的：过点 M 作三个平面分别垂直于 Ox 轴、Oy 轴、Oz

轴，它们与各轴的交点依次为 P、Q、R，这三点在 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴上的坐标依次为 x、y、z，于是空间一点 M 就惟一确定了一个有序数组 (x,y,z)，反之，若已知一有序数组 (x,y,z)，分别在 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴上依次取坐标为 x、y、z 的点 P、Q、R，并过点 P、Q、R 分别作与 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴垂直的平面，则这三个平面交于惟一的一点 M，这样就建立了空间的点 M 与有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系，这组数组 (x,y,z) 称为点 M 的坐标，坐标为 (x,y,z) 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$，又称 x、y、z 分别为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

由上述规定可知，原点的坐标为 $O(0,0,0)$；Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴上点的坐标分别是 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$；xOy 面、yOz 面、zOx 面上点的坐标分别是 $(x,y,0)$，$(0,y,z)$ $(x,0,z)$. 为了便于确定空间中的点 $M(x,y,z)$ 的位置，现将其坐标 x、y、z 在各卦限中的符号列表，如表 7-1 所示.

表 7-1

符号 卦限 / 坐标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

7.1.2 两点间距离公式

已知空间两点的直角坐标为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 如何计算这两点间的距离呢？

如图 7-3 所示，过 M_1 与 M_2 分别作与三个坐标轴垂直的平面，则这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体，容易看出，这长方体共顶点的三条棱长分别为 $|x_2-x_1|$，$|y_2-y_1|$，$|z_2-z_1|$，两次使用勾股定理可得

$$|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

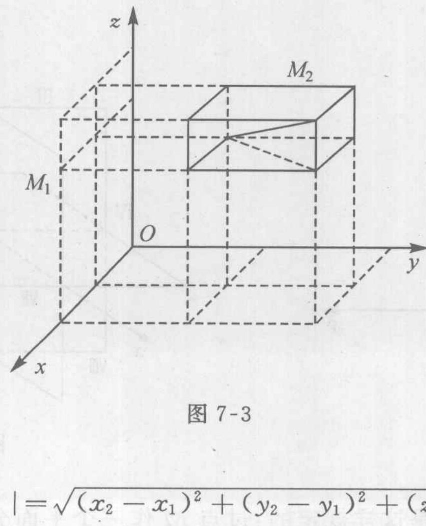

图 7-3

即
$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例 1 求点 $M(1,-2,3)$ 与原点及其 Ox 轴、xOy 面的距离.

解 该点与原点的距离为

$$|MO|=\sqrt{(1-0)^2+(-2-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{14}$$

该点到 Ox 轴的距离为该点到点 $A(1,0,0)$ 的距离

$$|MA|=\sqrt{(1-1)^2+(-2-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}.$$

该点到 xOy 面的距离即由该点向 xOy 面作垂线，垂足为 $B(1,-2,0)$，则 $|MB|$ 为所求

$$|MB|=\sqrt{(1-1)^2+(-2+2)^2+(3-0)^2}=3$$

所以点 $M(1,-2,3)$ 与原点及其 Ox 轴、xOy 面的距离分别为 $\sqrt{14}$，$\sqrt{13}$，3.

例 2 求证：以 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证 因为

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2(2-1)^2=14$$
$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2(3-2)^2=6$$
$$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2(1-3)^2=6$$

所以 $|M_2M_3|=|M_3M_1|$. 因此 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

例 3 在 Oz 轴上求一点，使该点到点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 的距离相等.

解 因为所求的点在 Oz 轴上，所以设该点为 $M(0,0,z)$，由题意有

$$|MA|=|MB|$$

即 $\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}$，

解得 $z=\dfrac{14}{9}$，所以所求点为 $M\left(0,0,\dfrac{14}{9}\right)$.

习题 7.1

1. 设空间一点 $M(x,y,z)$ 在 yOz 面上的投影是点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，那么这两点的坐标之间有什么关系？

2. 点 $P(x,y,z)$ 的三个坐标若有一个为零，则该点在何处？若有两个为零呢？

3. 证明以 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形为等腰直角三角形.

4. 在 yOz 平面上求与三点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$ 等距离的点.

§7.2 向 量

7.2.1 向量的概念

如同中学学习过的平面向量的概念，在空间中，我们把既有大小又有方向的量叫做向量（或矢量），如力、位移、加速度等都是向量.

通常用有向线段表示向量，如以点 A 为起点、点 B 为终点的向量，记为 $\overrightarrow{AB}$，为了方便，也常用粗体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 表示向量.

向量的大小叫做向量的模（或长度），记做 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$，模长为 0 的向量叫做零向量，记

做 $\mathbf{0}$,零向量的起点与终点重合,且它的方向是任意的.模为 1 的向量叫做单位向量,记为 $\boldsymbol{e}$,与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量记做 $\boldsymbol{a}^0$ 或 $\boldsymbol{e}_a$,则 $\boldsymbol{a}^0 = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^0}$.模相等、方向相同的两个向量,称为相等向量.

由向量相等的定义,我们把任一向量做不改变方向的平移,向量是不变的,所以向量是与起点位置无关的.我们把这种只考虑向量的大小和方向不考虑起点位置的向量叫做自由向量.在数学上我们只考虑这样的向量.

模相等,方向相反的两个向量叫做互为负向量,$\boldsymbol{a}$ 的负向量记做 $-\boldsymbol{a}$.显然,$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为负向量,即 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

如果两向量方向相同或相反,我们就称这两个向量平行或共线.零向量与任何向量平行(共线).

7.2.2　向量的线性运算

1. 向量的加法

将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 首尾相接(即 $\boldsymbol{a}$ 的终点与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合),我们把以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点,以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量,记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 7-4 所示.

求向量和的运算叫做向量的加法.上述定义中求向量和的方法称为向量加法的三角形法则.

如果我们把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起,并以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形,则从起点到对角顶点的向量也为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 7-5 所示.这种求两向量和的方法,称为向量加法的平行四边形法则.

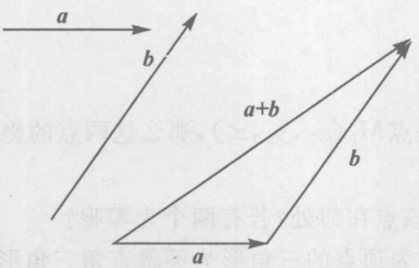

图 7-4

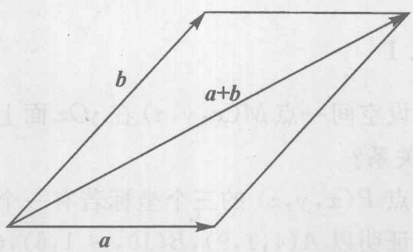

图 7-5

若两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,则定义它们的和为:当两向量方向相同时,它们的和向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的方向相同,其模等于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模长之和;当两向量方向相反时,它们的和向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 中模较大的那个向量的方向相同,和向量的模等于两向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的模的差的绝对值.

对于零向量与任意向量 $\boldsymbol{a}$,有:　$\boldsymbol{a}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律　　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律　　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量加法满足交换律和结合律,因而对于空间任意有限个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 可以按如

下方法求和：利用三角形法则将它们平行移动，使其首尾相接，则以第一个向量的起点为始点，以最后一个向量的终点为终点的向量就是它们的和向量 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$.

2. 向量的减法

对于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{a}$ 加上向量 $\boldsymbol{b}$ 的反向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差向量，记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

求两向量差的运算叫做向量的减法，由向量减法的定义易知：

(1) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$

(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 是由 $\boldsymbol{b}$ 的终点出发到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量.

3. 向量的数乘

实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，称为 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的数乘向量，记做 $\lambda\boldsymbol{a}$，数乘向量的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|.$$

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.

由数乘向量的定义，$\lambda\boldsymbol{a}$ 就是将 $\boldsymbol{a}$ 沿原来或相反的方向延长 $|\lambda|$ 倍所得的向量.

向量与数的乘积有如下规律：

(1) 若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

(2) 对任意非零向量 $\boldsymbol{a}$，则 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量；$-\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 反向的单位向量；

(3) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是存在惟一实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$；

(4) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(5) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

7.2.3 向量的坐标表示及其运算

在空间直角坐标系中，将与 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴正方向相同的单位向量称为三个基本单位向量，用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 表示.

设 M 为空间一点，则向量 $\overrightarrow{OM}$ 叫做点 M 关于坐标原点 O 的向径，过点 M 作垂直于三个坐标轴的平面，分别与坐标轴交于点 A,B,C，称 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在三个坐标轴上的投影(见图 7-6). 若点 M 的坐标为 (x,y,z)，则

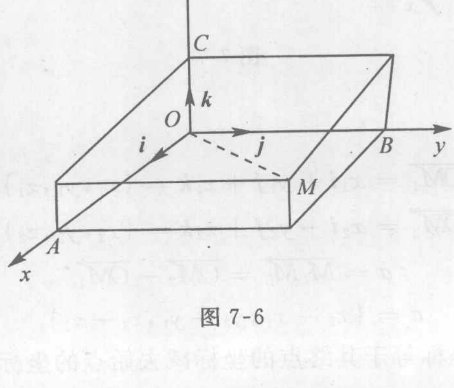

图 7-6

$$x = \overrightarrow{OA},\quad y = \overrightarrow{OB},\quad z = \overrightarrow{OC}.$$

由此可见,空间点的坐标,就是该点关于坐标原点的向径在坐标轴上的投影,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM},\quad \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB},\quad \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OC}$$

所以$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ 且

$$\overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OB} = y\boldsymbol{j}, \overrightarrow{OC} = z\boldsymbol{k}$$

从而

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

记为

$$\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\} \tag{7-1}$$

式(7-1)称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表达式,其中x、y、z为向量$\overrightarrow{OM}$在三坐标轴上的投影,并称向量$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$为向量$\overrightarrow{OM}$在坐标轴上的分向量.

注意:向量$\overrightarrow{OM}$在坐标轴上的投影x、y、z为数量,而向量$\overrightarrow{OM}$在坐标轴上的分向量$x\boldsymbol{i}$,$y\boldsymbol{j}$,$z\boldsymbol{k}$为向量,两者不能混为一谈.

一般地,对空间任一向量$\boldsymbol{a}$,总可以经过平移使其起点与坐标原点重合,然后作$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{a}$,则点$M$由$\boldsymbol{a}$惟一确定,向量相等,则其坐标对应相等;反之亦然.

空间向量与坐标对应后,向量的运算也就可以转化成数的运算.

设向量$\boldsymbol{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$,$\boldsymbol{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$,则有

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) + (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) = (x_1 + x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 + y_2)\boldsymbol{j} + (z_1 + z_2)\boldsymbol{k},$$

所以

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\},$$

同理得

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\},$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}.$$

由此可见,对向量进行线性运算,只需对向量的坐标分别进行相应运算即可.

例 1 如图 7-7 所示,设向量$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$,该向量的起点坐标与终点坐标分别为$\{x_1, y_1, z_1\}$、$\{x_2, y_2, z_2\}$,求向量$\boldsymbol{a}$的坐标.

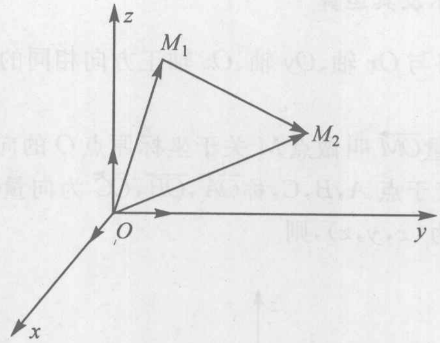

图 7-7

解 因为

$$\overrightarrow{OM_1} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k} = \{x_1, y_1, z_1\}$$

$$\overrightarrow{OM_2} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k} = \{x_2, y_2, z_2\}$$

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

所以

$$\boldsymbol{a} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

由此可见,空间向量的坐标等于其终点的坐标减去始点的坐标. 空间两点间的距离公式可

以用坐标表示.

例 2 设 $\boldsymbol{a}=\{2,-1,3\}$, $\boldsymbol{b}=\{0,3,-1\}$, 求 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

解 因为
$$2\boldsymbol{a}=\{4,-2,6\},\quad 3\boldsymbol{b}=\{0,9,-3\}$$
所以
$$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=\{4-0,-2-9,6-(-3)\}=\{4,-11,9\}$$

例 3 已知两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 求线段 P_1P_2 的中点 P 的坐标.

解 设点 $P(x,y,z)$ 为 P_1P_2 的中点,所以有
$$\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{PP_2}$$
而 $\overrightarrow{P_1P}=\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}$; $\overrightarrow{PP_2}=\{x_2-x,y_2-y,z_2-z\}$

所以
$$x-x_1=x_2-x,\quad y-y_1=y_2-y,\quad z-z_1=z_2-z$$
即有
$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

习题 7.2

1. 填空: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=($ $)\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=($ $)$

2. 把下列各小题中的向量 $\boldsymbol{b}$ 表示为实数与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积:

(1) $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}$; (2) $\boldsymbol{a}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{e},\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}\boldsymbol{e}$

3. 已知两点 $A(4,0,5)$, $B(7,1,3)$, 求与向量 $\overrightarrow{AB}$ 平行的单位向量.

§7.3 向量的数量积和向量积

7.3.1 方向角和方向余弦

如果向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量,将它们的起点平移在一起时,两者正向之间的夹角定义为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角,记为 $(\boldsymbol{a},\hat{\boldsymbol{b}})$, 且 $(\boldsymbol{a},\hat{\boldsymbol{b}})\in[0,\pi]$.

任意给定向量 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$, 把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴正向间的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角.

方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

向量的方向角是惟一的,它完全确定了向量的方向,由图 7-8 可知

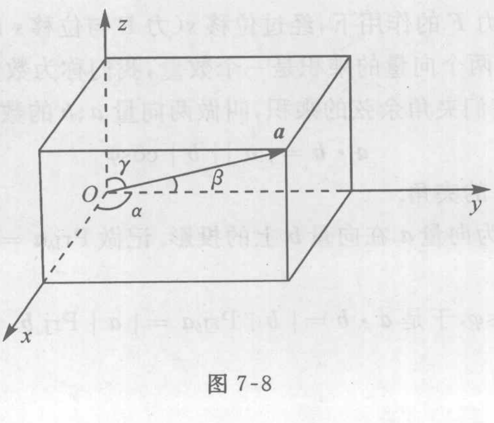

图 7-8

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{7-2}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{7-3}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{7-4}$$

容易验证 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，且 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$.

例 1 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$ 求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向角、方向余弦及单位向量.

解
$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-2,3-2,0-\sqrt{2}\}=\{-1,1,-\sqrt{2}\}$$
$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$$

所以
$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以
$$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\quad \beta=\frac{1}{3}\pi,\quad \gamma=\frac{3}{4}\pi$$

向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的单位向量 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

例 2 设点 A 位于第一卦限，$\overrightarrow{OA}$ 与 Ox 轴、Oy 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$，且 $|\overrightarrow{OA}|=6$，求 A 点坐标.

解 由已知 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，且由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，得

$$\cos^2\gamma=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

因为点 A 在第一卦限，所以 $\cos\gamma>0$，故 $\cos\gamma=\frac{1}{2}$，所以 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标依次为

$$x=|\overrightarrow{OA}|\cos\alpha=3,\quad y=|\overrightarrow{OA}|\cos\beta=3\sqrt{2},\quad z=|\overrightarrow{OA}|\cos\gamma=3.$$

得
$$A(3,3\sqrt{2},3).$$

7.3.2 向量的数量积

1. 数量积的定义

我们知道，物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，经过位移 $\boldsymbol{s}$（力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 所形成的角为 φ），所做的功 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\varphi$，这里两个向量的乘积是一个数量，我们称为数量积，也叫内积.

两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的模与它们夹角余弦的乘积，叫做两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的数量积（也称内积），记做

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi$$

其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

我们把 $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影. 记做 $\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$（其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角）.

同样 $\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$，于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$.

2. 数量积的性质

由数量积的定义有：