运筹学习题详解与考研辅导

经典 Classics

经典教材辅导用书

知识要点

习题详解

考研真题解答

清华版《运筹学》（第三版）（《运筹学》教材编写组）

罗荣桂 主编

華中科技大學出版社

http://www.hustp.com

图书在版编目(CIP)数据

运筹学习题详解与考研辅导/罗荣桂 主编. 一武汉:华中科技大学出版社,2008 年 5 月
ISBN 978-7-5609-4331-2

Ⅰ. 运… Ⅱ. 罗… Ⅲ. 运筹学-高等学校-解题 Ⅳ. O22-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 181865 号

运筹学习题详解与考研辅导 罗荣桂 主编

策划编辑:周芬娜
责任编辑:王汉江 封面设计:潘 群
责任校对:周 娟 责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司
印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:710mm×1000mm 1/16 印张:21.25 字数:442 000
版次:2008 年 5 月第 1 版 印次:2008 年 5 月第 1 次印刷 定价:32.00 元
ISBN 978-7-5609-4331-2/O·430

前　言

“运筹学”是高等院校经济管理类专业、应用数学专业以及自动化和计算机科学等专业开设的专业基础课，也是全国大学生数学建模竞赛的一门必修课，同时更是报考上述专业硕士研究生入学考试的一门重要考试科目。

由“运筹学”教材编写组编写、清华大学出版社出版的《运筹学》教材是国内最流行和被各高校广泛使用的教材。为了帮助学生更好地学习这门课程，掌握基本知识，熟悉解题方法与技巧，提高应试能力，我们曾在 2001 年 4 月率先编写了国内第一本与清华大学出版社出版的《运筹学》教材配套的由华中科技大学出版社出版《新编运筹学题解》一书的。该书以“题型全、方法多、技巧好和内容丰富”等为显著特色，得到了国内广大读者的赞赏。

随着清华大学出版社出版的《运筹学》的第三版的发行，应广大读者和华中科技大学出版社的再次要求，我们在原题解的基础上，在内容编排等方面做了大幅度的调整和修改，重新编写了现在这本与清华大学出版社《运筹学》(第三版)同步配套的《运筹学习题详解与考研辅导》。作为一本经典教材的学习辅导用书，既考虑了满足各层次学生学习的需要，又考虑到不因书的篇幅太多而增加学生购书的经济负担，因而，全书各章按照以下三部分进行编排。

(1) 知识要点：高度概括本章的基本概念、重要算法，列出主要公式；重点指出必须掌握的要点和各类考试常用的内容与方法。

(2) 习题详解：对清华大学出版社出版的《运筹学》(第三版)的各章习题给出全部的答案和详细的解答过程；部分难题还给出了解题的思路和一题多解的方法。

(3) 考研真题解答：本书收集并精选了国内重点高校，例如，清华大学、北京大学、华中科技大学、上海交通大学等 10 余所大学近几年的研究生入学考试试题，并一一作了解答。

本书与作者 7 年前编写的《新编运筹学题解》相比，更具有针对性、启发性和适用性。本书主编是一位在高校执教 40 余年，且主讲本科、硕士和博士生各层次“运筹学”课程近 30 年的老教授，有着丰富的教学和主编教材的经验。相信本书的出版，必将使广大学生在学习、解题，以及应试能力方面得到更好的提高，并取得事半功倍的效果。

本书由罗荣桂、喻小军、张润红、张鹏、原海英编写，余睿武、江涛、邓宁、吴兵、黄敏镁等对部分习题做了解答，并对编排提出了宝贵意见。在本书的策划和编写过程中，华中科技大学出版社的周芬娜老师给予了大力的支持和热情的帮助，对此致以深切的谢意。

我们衷心希望热心的读者能对本书提出更多的宝贵意见，使之更加完善，更加符合读者朋友们的需求。由于编者的水平有限，书中难免有疏漏或不妥之处，恳请批评指正。

编　者

2008 年 3 月

目　　录

第1章　线性规划与单纯形法

知识要点

1. 线性规划及数学模型

1）线性规划的概念及其基本特征

线性规划是对一个线性目标函数在若干个线性约束条件下进行最优化处理，即在一定约束条件下，对一定的目标函数求出最好结果的方法.

线性规划问题的基本特征如下.

(1) 每一个问题都用一组决策变量($x_1,x_2,\cdots,x_n$)来表示某一个方案，其值代表一个具体方案. 通常这些变量的取值是非负的，即 $x_j\geqslant0$ ($j=1,2,\cdots,n$).

(2) 每一个问题都存在一组约束条件，这些约束条件可以用一组线性等式或不等式来表示.

(3) 每一个问题都有一个明确的目标，这些目标可以用一组决策变量($x_1,x_2,\cdots,x_n$)的线性函数来表示. 根据问题的不同，可以使目标达到极大值或极小值.

2）线性规划问题的数学模型

$$\max(\text{或}\ \min)\ z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_2\\\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_m\\x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant0\end{cases}$$

2. 线性规划的标准型及如何化为标准型

1）线性规划的标准型

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\quad(i=1,2,\cdots,m)\\x_j\geqslant0\quad(j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

或

$$\max z=\boldsymbol{CX}\tag{1.1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b} & (1.2)\\ \boldsymbol{X}\geqslant \boldsymbol{0} & (1.3)\end{cases}$$

2) 如何化为标准型

(1) 若原模型为求极小值,即求 min,则 max $\boldsymbol{CX}=-\min(-\boldsymbol{CX})$.

(2) 若原模型中约束条件为不等式,则有以下两种情况.

① 若原约束条件为左端≤右端,则在左端加上松弛变量(即松弛变量≥0).

② 若原约束条件为左端≥右端,则在左端减去剩余变量(即剩余变量≥0).

(3) 若原模型中决策变量 $x_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 为自由变量,则令 $x_k=x'_k-x''_k$,其中 $x'_k,x''_k\geqslant 0$.

(4) 若原模型中某决策变量 $x_r(1\leqslant r\leqslant n)$ 有下界或上界,即 $x_r\geqslant u$ 或 $x_r\leqslant v$,则在标准型中,令 $x'_r=x_r-u$,即用 x'_r+u 取代原 x_r,其中 $x'_r\geqslant 0$;或 $x'_r=v-x_r$,即用 $v-x'_r$ 取代 x_r,其中 $x'_r\geqslant 0$.

3. 线性规划问题解

(1) 可行解:凡满足约束条件式(1.2)和式(1.3)的解 $\boldsymbol{X}$ 称为可行解.

(2) 最优解:满足式(1.1)的可行解 $\boldsymbol{X}$,即使目标函数达到最大值的可行解 $\boldsymbol{X}$ 称为最优解,记为 $\boldsymbol{X}^*$.

(3) 基:若系数矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$(不妨假定 $m<n$)的秩为 m,$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中一个 m 阶非奇异子阵(即 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$),则称 $\boldsymbol{B}$ 为线性规划的一个基.

(4) 基向量、非基向量:$\boldsymbol{B}$ 中的列向量称为基向量,$\boldsymbol{B}$ 以外的 $\boldsymbol{A}$ 中其余 $n-m$ 个列向量就称为非基向量.

(5) 基变量与非基变量:若 $\boldsymbol{P}_j$ 是基向量,与基向量 $\boldsymbol{P}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}$ 对应的变量 x_j 称为基变量;与非基向量相对应的变量 x_j 称为非基变量.显然,前者有 m 个,后者有 $n-m$ 个.

(6) 基解与基可行解:令所有非基变量为 0,求出满足约束条件式(1.2)的解称为基解;如果此解还满足条件式(1.3),则此基解就称为基可行解.不满足条件式(1.3)的基解则称为非可行解.

4. 解的几何意义

(1) 若线性规划问题有可行解,其所有可行解在图形上构成的区域称为可行域,则此可行域

$$D=\left\{\boldsymbol{X}\,\middle|\,\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i,x_j\geqslant 0,i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n\right\}\tag{1.4}$$

必是一个凸集.

(2) 线性规划的基可行解与可行域 D 的顶点一一对应.

(3) 如果线性规划有有限的最优解,则其目标函数的最优值一定在可行域 D 的某个顶点上达到;若在多个顶点处达到,则在这些顶点的凸组合上达到,称此时有无穷多最优解.

线性规划问题的基的数目不超过 C_n^m 个，因此，其基解或其可行解也不超过 C_n^m 个；相应地，D 的顶点最多也只有 C_n^m 个.

5. 线性规划的求解方法

1）图解法

（1）图解法的步骤.

① 建立平面直角坐标系；

② 画出约束直线，找出可行域；

③ 用图示出目标函数，即作出一条直线；

④ 将目标函数直线沿其法线方向在可行域中平移至边界.

（2）解的几种情况.

① 有唯一最优解；

② 有无穷多最优解；

③ 无可行解；

④ 无有限最优解（即无界解）.

（3）图解法的优缺点.

对于二维问题，用图解法较简单直观，作图时不需要化为标准型，只要直接在平面上作图即可；其次，它有助于了解线性规划求解的基本原理. 不足之处是此只限于二维问题，对于多维问题无能为力.

2）单纯形法

丹捷格(G. B. Dantzig)的单纯形法是从可行域的某个顶点（即基可行解）出发，通过一个规划转换到另一个顶点（即另一个基解），使得每次转换所得新的顶点对应的目标函数值比前一次的要更优，直到目标函数值达到最优转换才停止的一种解法。此法的基本步骤如下.

（1）找出初始可行基，确定初始基可行解，建立初始单纯形表.

（2）检验此基可行解是否为最优解，即检验各非基变量 x_j 的检验数 $\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$，若所有 $\sigma_j \leqslant 0$ $(j=m+1,\cdots,n)$，则已经得到最优解，计算停止；否则，转下一步.

（3）在 $\sigma_j > 0$ $(j=m+1,\cdots,n)$ 中若有某个检验数 σ_k 对应的非基变量 x_k 的系数列向量 $\boldsymbol{P}_k=(a_{1k},a_{2k},\cdots,a_{mk})^{\mathrm{T}} \leqslant \boldsymbol{0}$，则此问题为无界解，停止计算；否则，转下一步.

（4）根据 $\max(\sigma_j>0)=\sigma_k$，确定非基变量 x_k 为换入变量；再根据 θ 法则

$$\theta=\min_i\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\,\middle|\,a_{ik}>0\right\}=\frac{b_l}{a_{lk}} \tag{1.5}$$

确定基变量 x_l 为换出变量.

（5）实施枢轴运算，即以 a_{lk} 为主元素进行枢轴运算（亦即进行矩阵的行变换），使 $\boldsymbol{P}_k$ 变换为第 l 行的元素为 1，其余的元素为 0 的矩阵；并将基 $\boldsymbol{B}$ 对应的基变向量 $\boldsymbol{X}_B$ 列中的 x_l 换为 x_k，从而得到新的单纯形表；重复步骤(2)～(5)，直到终止.

6. 最优性检验与解的判别

(1) 最优解的判别：若 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(b_1',b_2',\cdots,b_m',0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 为对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的一个基可行解，且对于所有 $j=m+1,m+2,\cdots,n$，有 $\sigma_j\leqslant 0$，则 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 为最优解，其中 $\sigma_j=c_j-\sum\limits_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$，$z=z_0+\sum\limits_{j=m+1}^{n}\sigma_jx_j$.

(2) 无穷最优解的判别：若 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 为一个基可行解，且对于一切 $j=m+1,m+2,\cdots,n$，有 $\sigma_j\leqslant 0$，其中有某一非基变量的检验数 $\sigma_{m+k}=0$ $(1\leqslant k\leqslant n-m)$，则此线性规划问题有无穷多最优解.

(3) 无界解的判别：若 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 为一基可行解，其中某个非基变量 x_{m+k} 的检验数 $\sigma_{m+k}>0$，且 $\boldsymbol{P}'_{m+k}=(a'_{1,m+k},a'_{2,m+k},\cdots,a'_{m,m+k})^{\mathrm{T}}\leqslant\boldsymbol{0}$，则此线性规划问题有无界解(或称无最优解).

7. 单纯形法的进一步讨论——人工变量法

在约束条件式(1.2)中加入人工变量 $x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{n+m}$，可得到

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2\\ \qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m\\ x_j\geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,n+m)\end{cases}\quad\begin{matrix}(1.6)\\ \\ \\ \\ (1.7)\end{matrix}$$

1) 大 M 法

若目标函数是求最大化的，则引入人工变量后，对应的人工变量在目标函数中的系数取为 $-M$(其中 M 为充分大的正数)；反之，若目标函数是求最小化的，则人工变量在目标函数中的系数取为 $+M$，即

$$\max z=c_1x_1+\cdots+c_nx_n-Mx_{n+1}-\cdots-Mx_{n+m}\tag{1.8}$$

或

$$\min z=c_1x_1+\cdots+c_nx_n+Mx_{n+1}+\cdots+Mx_{n+m}\tag{1.9}$$

2) 两阶段法

此方法将加入人工变量后的线性规划问题分成两个阶段来求解.

第一阶段：其目的是为原问题求初始基可行解. 为此，对于求极大化(或极小化)的线性规划问题，建立一个新的人工变量的目标函数，其人工变量的系数均为 -1(或 $+1$)，对于新的问题：

$$\max w=-x_{n+1}-x_{n+2}-\cdots-x_{n+m}$$

或

$$\min w=x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+m}\tag{1.10}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\ \qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m\\ x_1,\cdots,x_n\geqslant 0,x_{n+1},\cdots,x_{n+m}\geqslant 0\end{cases}\tag{1.11}$$

用单纯形法求解. 若 $w=0$，即所有的人工变量都变换为非基变量，说明原问题已得到了

初始基可行解;反之,若目标函数 w 的值为负(或为正),则人工变量中至少有一个为正,这表示原问题无可行解,应停止计算.

第二阶段:将第一阶段求得的基可行解对原问题的目标函数进行优化,即将目标函数换成原目标函数,以第一阶段得到的最终单纯形表除去人工变量的列后作为第二阶段计算的初始表,继续用单纯形法迭代以求得问题的最优解.

8. 可能遇到的问题及解决办法

在用 θ 法则确定换出变量时可能会出现两个以上的最小比值,因此在下次迭代中可能有一个或多个基变量为 0,即出现退化解. 在计算过程中有可能产生循环,以至求不出最优解. 为此,常用摄动法和勃兰特(Bland)法避免此现象发生.

(1) 在极大化问题中,若有几个检验数 $\sigma_j>0$,则取其下标最小者的非基量 x_k 作为换入变量,即 $k=\min\{j\,|\,\sigma_j>0\}$.

(2) 在极大化问题中,若按 θ 法则计算时存在两个或两个以上的最小比值,则应选其中下标最小的基变量 x_l 为换出变量,即

$$l=\min\left\{i\,\middle|\,\theta=\min_i\left(\frac{b'_i}{a'_{ik}}\,\middle|\,a'_{ik}>0\right)\right\} \tag{1.12}$$

9. 检验数的几种表示形式

$$z=\sum_{i=1}^{m}c_ib'_i+\sum_{j=m+1}^{n}\left(c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia'_{ij}\right)x_j=z_0+\sum_{j=m+1}^{n}(c_j-z_j)x_j \tag{1.13}$$

或

$$z=z_0-\sum_{j=m+1}^{n}(z_j-c_j)x_j \tag{1.14}$$

(1) 当要求目标函数实现最大化时,若令 $\sigma_j=c_j-z_j$,则得到 $\sigma_j\leqslant 0\ (j=1,2,\cdots,n)$ 的判别准则;若令 $\sigma_j=z_j-c_j$,则得到 $\sigma_j\geqslant 0$ 的判别准则.

(2) 当要求目标函数实现最小化时,若令 $\sigma_j=c_j-z_j$,则得到 $\sigma_j\geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,n)$ 的判别准则;若令 $\sigma_j=z_j-c_j$,则得到 $\sigma_j\leqslant 0$ 的判别准则.

习题详解

1.1 用图解法求解下列线性规划问题并指出问题是具有唯一最优解、无穷多最优解、无界解还是无可行解?

(1)

$$\max z=x_1+3x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}5x_1+10x_2\leqslant 50\\x_1+x_2\geqslant 1\\x_2\leqslant 4\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

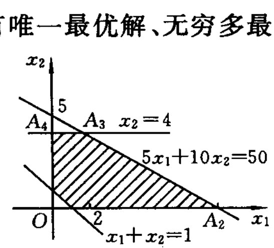

图 1-1

解 该问题可行域为有界域,见图 1-1. 目标函数 $z=x_1+3x_2$ 在点 A_3 达到最大

值，即 $X^*=(2,4)^T$，故 $z^*=\max z=14$. 此时具有唯一最优解.

(2)
$$\min z=x_1+1.5x_2$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+3x_2\geqslant 3\\ x_1+x_2\geqslant 2\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

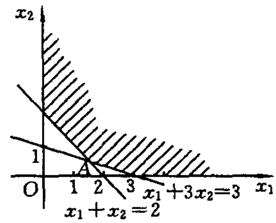

图 1-2

解　该问题可行域为无界域，见图 1-2. 目标函数 $z=x_1+1.5x_2$ 在点 A 处达到最小值，即 $X^*=(3/2,1/2)^T$，故 $z^*=\min z=9/4$. 此时，也具有唯一最优解.

(3)
$$\max z=2x_1+2x_2$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1-x_2\geqslant -1\\ -0.5x_1+x_2\leqslant 2\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

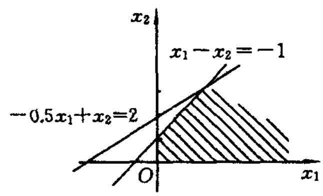

图 1-3

解　该问题可行域也为无界域，见图 1-3. 目标函数可以增加到无穷大，因此该问题无最优解或为无界解.

(4)
$$\max z=x_1+x_2$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1-x_2\geqslant 0\\ 3x_1-x_2\leqslant -3\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

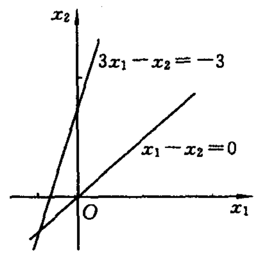

图 1-4

解　该问题的可行域为空集，见图 1-4. 因此无可行解，当然就不存在最优解.

1.2　将下列线性规划问题变换成标准型，并列出初始单纯形表.

(1)
$$\min z=-3x_1+4x_2-2x_3+5x_4$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}4x_1-x_2+2x_3-x_4=-2\\ x_1+x_2+3x_3-x_4\leqslant 14\\ -2x_1+3x_2-x_3+2x_4\geqslant 2\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0,x_4\text{ 无约束}\end{cases}$$

解　令 $x_4=x_4'-x_4''$，且 $x_4',x_4''\geqslant 0$；引入松弛变量 $x_6\geqslant 0$，剩余变量 $x_7\geqslant 0$，人工变量 $x_5,x_8\geqslant 0$，得线性规划的标准型为

$$\max z'=3x_1-4x_2+2x_3-5(x_4'-x_4'')-Mx_5-Mx_8$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}-4x_1+x_2-2x_3+x_4'-x_4''+x_5=2\\ x_1+x_2+3x_3-x_4'+x_4''+x_6=14\\ -2x_1+3x_2-x_3+2x_4'-2x_4''-x_7+x_8=2\\ x_1,x_2,x_3,x_4',x_4'',x_5,x_6,x_7,x_8\geqslant 0\end{cases}$$

其中，M 为充分大的正数. 初始单纯形表如表 1-1 所示.

表 1-1

c_j			3	-4	2	-5	5	$-M$	0	0	$-M$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4'	x_4''	x_5	x_6	x_7	x_8
$-M$	x_5	2	-4	1	-2	1	-1	1	0	0	0
0	x_6	14	1	1	3	-1	1	0	1	0	0
$-M$	x_8	2	-2	3	-1	2	-2	0	0	-1	1
σ_j			$-6M+3$	$4M-4$	$-3M+2$	$3M-5$	$-3M+5$	0	0	$-M$	0

(2)
$$\max s=z_k/p_k$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}z_k=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m}a_{ik}x_{ik}\\ \sum\limits_{k=1}^{m}-x_{ik}=-1\quad(i=1,2,\cdots,n)\\ x_{ik}\geqslant 0\quad(i=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots,m)\end{cases}$$

解　在上述约束条件中加入人工变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 后，得

$$\max s=\frac{1}{p_k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}x_{ik}-Mx_1-Mx_2-\cdots-Mx_n$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}x_i+\sum\limits_{k=1}^{m}x_{ik}=1\quad(i=1,2,\cdots,n)\\ x_{ik}\geqslant 0,x_i\geqslant 0\quad(i=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots,m)\end{cases}$$

其中，M 为充分大的正数. 初始单纯形表如表 1-2 所示.

表 1-2

c_j			$-M$	$-M$	$\cdots$	$-M$	a_{11}/p_k	$\cdots$	a_{1m}/p_k	$\cdots$	a_{n1}/p_k	$\cdots$	$a_{n,m}/p_k$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{11}	$\cdots$	x_{1m}	$\cdots$	x_{n1}	$\cdots$	$x_{n,m}$
$-M$	x_1	1	1	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0
$-M$	x_2	1	0	1		0	0		0				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$				
$-M$	x_n	1	0	0	$\cdots$	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	1
σ_j			nM	0	$\cdots$	0	a_{11}/p_k+M	$\cdots$	a_{1m}/p_k+M	$\cdots$	a_{n1}/p_k+M	$\cdots$	$a_{n,m}/p_k+M$

1.3　在下面的线性规划问题中找出满足约束条件的所有基解，指出哪些是基可行解，并代入目标函数，确定哪一个是最优解.

(1)
$$\max z=2x_1+3x_2+4x_3+7x_4$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3-4x_4=8\\ x_1-2x_2+6x_3-7x_4=-3\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

解　其系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4)=\begin{bmatrix}2&3&-1&-4\\-1&2&-6&7\end{bmatrix}$$

(a) 因为$(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2)=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$线性无关,故有

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=8+x_3+4x_4\\ -x_1+2x_2=3+6x_3-7x_4\end{cases}$$

令非基变量 $x_3,x_4=0$,解得 $x_1=1,x_2=2$. 于是得基可行解 $\boldsymbol{X}^{(1)}=(1,2,0,0)^{\mathrm{T}},z_1=8$.

(b) 因为$(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_3)=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & -6\end{bmatrix}$线性无关,故有

$$\begin{cases}2x_1-x_3=8-3x_2+4x_4\\ -x_1-6x_3=3-2x_2-7x_4\end{cases}$$

令 $x_2,x_4=0$,有

$$\begin{cases}2x_1-x_3=8\\ -x_1-6x_3=3\end{cases}$$

解得 $x_1=\dfrac{45}{13},x_3=-\dfrac{14}{13}$. 故 $\boldsymbol{X}^{(2)}=\left(\dfrac{45}{13},0,-\dfrac{14}{13},0\right)^{\mathrm{T}}$ 为非可行解.

(c) 因为$(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_4)=\begin{bmatrix}2 & -4\\ -1 & 7\end{bmatrix}$线性无关,故有

$$\begin{cases}2x_1-4x_4=8-3x_2-x_3\\ -x_1+7x_4=3-2x_2+6x_3\end{cases}$$

令 $x_2=x_3=0$,解得 $x_1=34/5,x_4=7/5$. 故 $\boldsymbol{X}^{(3)}=(34/5,0,0,7/5)^{\mathrm{T}}$ 为基可行解,其目标函数值 $z_3=117/5$.

(d) 因为$(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & -6\end{bmatrix}$线性无关,故有

$$\begin{cases}3x_2-x_3=8-2x_1+4x_4\\ 2x_2-6x_3=3+x_1-7x_4\end{cases}$$

令 $x_1=x_4=0$,解得 $x_2=45/16,x_3=7/16$. 故 $\boldsymbol{X}^{(4)}=(0,45/16,7/16,0)^{\mathrm{T}}$ 为基可行解,其目标函数值 $z_4=163/16$.

(e) 因$(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_4)=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & 7\end{bmatrix}$线性无关,由

$$\begin{cases}3x_2-4x_4=8-2x_1+x_3\\ 2x_2+7x_4=3+x_1+6x_3\end{cases}$$

令 $x_1=x_3=0$,解得 $\boldsymbol{X}^{(5)}=(0,68/29,0,-7/29)^{\mathrm{T}}$ 为非可行解.

(f) 因$(\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4)=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ -6 & 7\end{bmatrix}$线性无关,由

$$\begin{cases}-x_3-4x_4=8-2x_1-3x_2\\ -6x_3+7x_4=3+x_1-2x_2\end{cases}$$

令 $x_1=x_2=0$,解得 $\boldsymbol{X}^{(6)}=(0,0,-68/31,-45/31)^{\mathrm{T}}$ 为非可行解.

最后比较 z_1, z_3, z_4 的大小，可知 $z^* = z_3 = 117/5$ 为其最大值. 而最优解 $\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{X}^{(3)} = (34/5, 0, 0, 7/5)^{\mathrm{T}}$.

(2)
$$\min z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4$$
$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

解　其系数矩阵 $(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) 因为 $(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 线性无关，故有

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 - 3x_3 - 4x_4 \\ 2x_1 + x_2 = 3 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_3 = x_4 = 0$，解得 $\boldsymbol{X}^{(1)} = (-1/3, 11/3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ 为非可行解.

(b) 因为 $(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 线性无关，故有

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 7 - 2x_2 - 4x_4 \\ 2x_1 + x_3 = 3 - x_2 - 2x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_2 = x_4 = 0$，解得基解 $\boldsymbol{X}^{(2)} = (2/5, 0, 11/5, 0)^{\mathrm{T}}$ 为基可行解，其目标函数值 $z_2 = 43/5$.

(c) 因为 $(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_4) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 线性无关，故有

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 = 7 - 2x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_4 = 3 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

令 $x_2 = x_3 = 0$，解得基解 $\boldsymbol{X}^{(3)} = (-1/3, 0, 0, 11/6)^{\mathrm{T}}$ 为非可行解.

(d) 因为 $(\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 线性无关，故有

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 7 - x_1 - 4x_4 \\ x_2 + x_3 = 3 - 2x_1 - 2x_4 \end{cases}$$

令 $x_1 = x_4 = 0$，解得基解 $\boldsymbol{X}^{(4)} = (0, 2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ 为基可行解，其目标函数值 $z_4 = -1$.

(e) 因为 $(\boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 线性无关，故有

$$\begin{cases} 3x_3 + 4x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 \\ x_3 + 2x_4 = 3 - 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

令 $x_1 = x_2 = 0$，得基解 $\boldsymbol{X}^{(5)} = (0, 0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 为基可行解，其目标函数值 $z_5 = -3$.

(f) 因为 $(\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_4) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 线性相关，故 x_2, x_4 不能构成基变量.

最后，比较 z_2, z_4 和 z_5 的大小可知，$z^* = z_5 = -3$，对应的最优解为 $\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{X}^{(5)} =$

$(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

1.4　分别用图解法和单纯形法求解下列线性规划问题，并指出单纯形法迭代的每一步相应于图形上哪一个顶点.

(1)
$$\max z=2x_1+x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+5x_2\leqslant 15\\ 6x_1+2x_2\leqslant 24\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解　① 图解法. 作图如图 1-5 所示. 由图 1-5 得唯一最优解 $\boldsymbol{X}^*=(15/4,3/4)^{\mathrm{T}}$，对应于图上的点 A_2，其最优值 $z^*=33/4$.

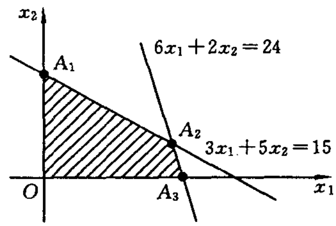

图 1-5

② 单纯形法. 引入松弛变量 $x_3,x_4\geqslant 0$，化标准型为
$$\max z=2x_1+x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+5x_2+x_3=15\\ 6x_1+2x_2+x_4=24\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

用单纯形法列表，求解过程见表 1-3.

表 1-3

c_j			2	1	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	15	3	5	1	0	5
0	x_4	24	[6]	2	0	1	4
σ_j			2	1	0	0	
0	x_3	3	0	[4]	1	−1/2	3/4
2	x_1	4	1	1/3	0	1/6	12
σ_j			0	1/3	0	−1/3	
1	x_2	3/4	0	1	1/4	−1/8	
2	x_1	15/4	1	0	−1/12	5/24	
σ_j			0	0	−1/12	−7/24	

因为 $\sigma_j\leqslant 0\ (j=1,2,3,4)$；故问题的最优解 $\boldsymbol{X}^*=(15/4,3/4,0,0)^{\mathrm{T}}$，其最优目标函数值 $z^*=\max z=33/4$.

第一次迭代得 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(0,0,15,24)^{\mathrm{T}}$ 对应于图 1-5 的坐标原点 $O(0,0)$；

第二次迭代得 $\boldsymbol{X}^{(1)}=(4,0,3,0)^{\mathrm{T}}$ 对应图 1-5 中的点 $A_3(4,0)$；

第三次迭代得 $\boldsymbol{X}^{(2)}=(15/4,3/4,0,0)^{\mathrm{T}}$ 对应于图 1-5 中的点 $A_2(15/4,3/4)$.

(2)
$$\max z=2x_1+5x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1\leqslant 4\\ 2x_2\leqslant 12\\ 3x_1+2x_2\leqslant 18\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解　① 图解法. 作图如图 1-6 所示，由图可知，此线性规划问题的唯一最优解在顶点 A_2，$\boldsymbol{X}^*=(2,6)^{\mathrm{T}}$，其最优目标函数值为 $z^*=34$.

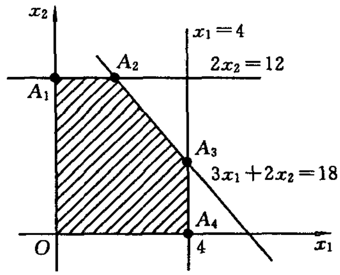

图 1-6

② 单纯形法. 首先，引入松弛变量 x_3,x_4,x_5，将问题化成标准型，并列出初始单纯形表，如表 1-4 所示.

$$\max z=2x_1+5x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_3=4\\2x_2+x_4=12\\3x_1+2x_2+x_5=18\\x_1,x_2,\cdots,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

表 1-4

c_j			2	5	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	4	1	0	1	0	0	—
0	x_4	12	0	[2]	0	1	0	6
0	x_5	18	3	2	0	0	1	9
σ_j		0	2	5	0	0	0	
0	x_3	4	1	0	1	0	0	4
5	x_2	6	0	1	0	1/2	0	—
0	x_5	6	[3]	0	0	−1	1	2
σ_j		−30	2	0	0	−5/2	0	
0	x_3	2	0	0	1	1/3	−1/3	
5	x_2	6	0	1	0	1/2	0	
2	x_1	2	1	0	0	−1/3	1/3	
σ_j		−34	0	0	0	−11/6	−2/3	

在表 1-4 的最后一行中，因为所有的 $\sigma_j\leqslant 0$，故得问题的最优解为 $\boldsymbol{X}^*=(2,6,2,0,0)^{\mathrm{T}}$，最优目标函数值为 $z^*=34$.

第一步迭代得 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(0,0,4,12,8)^{\mathrm{T}}$ 对应图 1-6 所示的坐标原点 $O(0,0)$；

第二步迭代得 $\boldsymbol{X}^{(1)}=(0,6,4,0,6)^{\mathrm{T}}$ 对应图 1-6 所示的点 $A_1(0,6)$；

第三步迭代得 $\boldsymbol{X}^{(2)}=(2,6,2,0,0)^{\mathrm{T}}$ 对应图 1-6 所示的点 $A_2(2,6)$.

即此点对应此线性规划问题的最优解.

1.5　以第 1.4 题(1)为例，具体说明当目标函数中的变量系数怎样改变时，满足约束条件可行域的每一个顶点，都有可能使目标函数值达到最优？

解　(1) 当 $c_2=0$ 时，目标函数 $\max z=c_1x_1+0x_2$.

① 当 $c_1>0$ 时，目标函数在点 A_3 取得最大值；

② 当 $c_1=0$ 时，目标函数在可行域 $OA_1A_2A_3$ 上的任一点可以取得最大值；

③ 当 $c_1<0$ 时，目标函数在线段 OA_1 的任一点上取得最大值.

(2) 当 $c_2\neq 0$ 时，目标函数 $\max z=c_1x_1+c_2x_2$.

① 若$-\frac{3}{5}\leqslant k<0$，则当 $c_2>0$ 时，目标函数在点 A_1 达到最大值，其中 $k=-\frac{3}{5}$时，在线段 A_1A_2 上的任一点达到最大值；当 $c_2<0$ 时，目标函数在坐标原点 O 达到最大值.

② 若$-3\leqslant k<-\frac{3}{5}$，则当 $c_2>0$ 时，目标函数在点 A_2 达到最大值，其中 $k=-3$ 时，在线段 A_2A_3 上的任一点达到最大值；当 $c_2<0$ 时，目标函数在原点 O 达到最大值.

③ 若 $k<-3$，则当 $c_2>0$ 时，目标函数在点 A_3 达到最大值；当 $c_2<0$ 时，目标函数在原点 O 达到最大值.

④ 若 $k>0$，则当 $c_2>0$ 时，目标函数在点 A_1 达到最大值；当 $c_2<0$ 时，目标函数在点 A_3 达到最大值.

1.6 分别用单纯形法中的大 M 法和两阶段法求解下述线性规划问题，并指出属哪一类解.

(1)

$$\max z=2x_1+3x_2-5x_3$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3=7\\2x_1-5x_2+x_3\geqslant 10\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

解 ① 大 M 法. 在上述问题的约束条件中加入人工变量 x_4，x_6，减去剩余变量 x_5，得

$$\max z=2x_1+3x_2-5x_3-Mx_4+0x_5-Mx_6$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=7\\2x_1-5x_2+x_3-x_5+x_6=10\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0\end{cases}$$

其中，M 是一个任意大的正数. 列出初始单纯形表，如表 1-5 所示. 由表 1-5 最后一行可知，所有检验数 $\sigma_j\leqslant 0$，故问题最优解 $\boldsymbol{X}^*=(45/7,4/7,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，对应的目标函数的最大值为 $z^*=\max z=102/7$.

表 1-5

c_j			2	3	-5	$-M$	0	$-M$	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-M$	x_4	7	1	1	1	1	0	0	7
$-M$	x_6	10	[2]	-5	1	0	-1	1	5
$-z$	$17M$		$3M+2$	$3-4M$	$2M-5$	0	$-M$	0	
$-M$	x_4	2	0	[7/2]	1/2	1	1/2	$-1/2$	4/7
2	x_1	5	1	$-5/2$	1/2	0	$-1/2$	1/2	—
$-z$	$2M-10$		0	$7M/2+8$	$M/2-6$	0	$M/2+1$	$(-3/2)M-1$	
3	x_2	4/7	0	1	1/7	2/7	1/7	$-1/7$	
2	x_1	45/7	1	0	6/7	5/7	$-1/7$	1/7	
$-z$	$-102/7$		0	0	$-50/7$	$-M-16/7$	$-1/7$	$-M+1/7$	