KAOYAN
名师导学系列

2009年
考研数学
历年真题解析与应试对策
（理工类）

主编　徐　兵　肖马成　周概容

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

名师导学系列

2009年
考研数学
历年真题解析与应试对策
（理工类）

●主编　徐　兵　肖马成　周概容

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

2009年考研数学历年真题解析与应试对策．理工类/徐兵，肖马成，周概容主编．—北京：高等教育出版社，2008.4

ISBN 978-7-04-024201-0

Ⅰ.2…　Ⅱ.①徐…②肖…③周…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第033416号

策划编辑　刘　佳　　**责任编辑**　雷旭波　　**封面设计**　王凌波
责任校对　金　辉　　**责任印制**　尤　静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京铭成印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2008年4月第1版
印　　张	22.5	**印　　次**	2008年4月第1次印刷
字　　数	560 000	**定　　价**	38.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　24201-00

前　　言

2008 年硕士研究生入学考试数学试题的难易程度在考生中出现了不同的反映，这表明试题的进步. 有些考生觉得2008 年试题比2007 年试题容易些，可能这些考生没有进一步思考下面的问题：是什么原因使这些考生产生这种印象？2008 年的试题与2007 年的试题有什么共性？差异在哪里？有些考生依然对2008 年的试题感到困难，这些考生在复习中出现了哪些不足？

由历年来教育部考试中心发布的统计资料，考生可以发现一个值得深思的问题：为什么试卷中的题目绝大多数是中等难度题与容易题的情形下，考生的成绩却这么低？后来的备考生应该从中汲取什么教训？

再读一读《全国硕士研究生入学统一考试数学考试分析》，教育部考试中心针对每年考生现状，在该书中对考生提出"思考与建议"，这几年来，几乎一字不变地建议考生："注重数学基础. 在阅卷中发现一些考生在答题的过程中出现很多很初等的错误，这是基本功不扎实的表现，可能是考生在复习中存在的偏差. 一些考生在复习时过分追求难题，而对基本概念、基本方法和基本性质重视不够，投入不足. 从试题可以看出，基本概念、基本方法和基本性质是考查的重点，因此要注重基础是复习的方向，要求考生不仅能明确概念的要素、性质和基本特征，还要理解概念与性质的内涵与外延."教育部考试中心为备考生提出了复习的方向，这是提高考试成绩的根本途径.

针对上述问题，高等教育出版社的编辑经过多方调研，确定为备考生提供一套既有针对性又有特色的历年考研真题解析与应试对策丛书，目的是提高备考生的复习效率，引导备考生把握住正确的复习方向，从而达到提高考试成绩的效果. 硕士研究生入学考试数学试题是我国多所大学、诸多命题专家经过多年辛勤努力集体创造的数学教学研究的精品成果，它已成为历年来教师向备考生推荐的必读资料，也是备考生争相学习的必选资料. 在学习这些资料的过程中，一些比较现实的问题是：如果备考生在复习过基础知识之后，面对一些选出的往年试题，觉得几乎个个题目都困难，这是否会深深地伤害备考生的自信心？如果面对一些选出的往年试题，备考生觉得几乎都能入手，又能否说明备考生已经较好地掌握了基础知识？如果备考生完整地解答了一份往年考试试卷，自己评定出成绩之后，是否能依此判断出掌握知识的程度如何？在以后的时间内能有多少成绩提升的空间？

目前全国有十几种版本的考研真题汇编，但是都没有帮助备考生解决上述问题. 我们对这些问题进行了深入研究，积多年教学与考研辅导经验，共同的认识是：做往年考试真题时，要考察这些题目的知识点、解题思路、特殊的解题技巧、可能出现的运算错误、题目可能的变化形式和题目的难度系数等，以便对这些题目有较全面的了解，知道它在试卷中的作用. 经过这样的训练之后，当备考生遇到的几道题难度系数都为 0.2 ~ 0.3，即使备考生几乎每道题都遇到困难，也不至于降低自信心. 如果这几道题难度系数都为 0.6 ~ 0.7 时，即使备考生基本上都能上手，也不会过于盲目乐观. 当备考生做完一套往年的完整试卷之后，可以对照前面提出的问题，检查自己的答案，判定出自己掌握基本知识的程度，找出问题的症结，明确努力的方向，从而判定出自己成绩可能提升的空间.

本书作者在上述共识的基础上，参考教育部考试中心历年发布的《硕士研究生入学考试数学试卷分析》和《数学试题编制实例分析》，结合多年参加考试阅卷及考研辅导积累的资料和经验，以精品成果"考研试题"为本，以编写出考研辅导的珍品辅导书为目的，使本书体现了以下几个特点：

（1）分析各部分知识的基本问题，归纳基本运算方法，以利于考生理出知识框架.

（2）在范例解析中，对所选试题指出了考查的知识点，并分析了能力层级要求，以利于备考生明确试题的立意.

（3）对试题给出了解析，分析了解题思路. 对部分试题给出了考生的典型运算错误及错误产生的原因，以利于备考生防范.

（4）对部分试题给出了特殊解题技巧或试题的可能变化形式，或对试题中某些条件的作用进行解说，或指出某些题目在命制时出于考查知识点或难度等因素而有意放宽题设条件等说明，目的是利于备考生能深入

复习.

(5) 给出了近年来试题的难度系数,以利于备考生检查自己对知识掌握的程度.

下面以书中具体例题说明,以利于读者了解本书的风格与特色,摘录如下.

例 1(1.1.2 例 9)(97205 *) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

本题考查的知识点 无穷小量的性质:无穷大量的倒数为无穷小量,无穷小量与有界变量之积为无穷小量.

解析 所给极限为"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型极限,此题不能利用极限四则运算法则,也不能利用洛必达法则求之.通常解决无穷大量运算的基本原则是将其转化为无穷小量运算.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}\xlongequal{(*)}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x+1}{-x\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=1.$$

本题难度系数 0.45.

本题解题技巧 在上述运算(*)处,将无穷大量运算转化为无穷小量运算.

典型运算错误 在上述运算(*)处,当 $x\to-\infty$,且 $|x|$ 足够大时,$\sqrt{x^2}=|x|=-x$,这是解题关键! 相当多的考生在此处出现错误,误答为 3,这是因为错误地认为

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x+1}{x\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=3.$$

说明 本题在命制时,曾考虑以下两种变式:

变式 1 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

此变式较上例简单,只需注意 $|x|=x$.

变式 2 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

此变式较上例复杂,需分别讨论 $x\to-\infty$ 与 $x\to+\infty$ 两种情形.

例 2(1.3.2 例 25)(97303) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$,则 $f(x)=$________.

本题考查的知识点 定积分的概念与几何意义.

解析 由于当 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在时,它为一个确定的数值,可设 $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=A$,因此

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+A\sqrt{1-x^2}.$$

两端在[0,1]上积分,可得

$$A=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+A\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

---

* 97205 是指 1997 年数学二的一道分值为 5 分的题,同理,04108 是指 2004 年数学一的一道分值为 8 分的题.其他与此类似.

因为
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$
且 $y=\sqrt{1-x^2}$ 表示以原点为圆心，半径为 1 的上半圆周，$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ 表示上述四分之一圆的面积，可知 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$，故
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{4-\pi},$$
所以
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\pi}{4-\pi}\sqrt{1-x^2}.$$

本题难度系数　0.29.

典型运算错误　① 不知道 $\int_0^1 f(x)\,dx$ 存在时，它为一个确定的数值，因此不知应该从何处入手.（严格地说本题应加补"$f(x)$为连续函数"或"$f(x)$在$[0,1]$上可积"的条件.）

② 不会利用定积分的几何意义求 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$，而是对这个积分利用换元积分法计算，使问题复杂，且可能导致错误.

例3(1.1.2 例31)(04104,04204)　把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x \cos t^2\,dt$，$\beta=\int_0^{x^2} \tan\sqrt{t}\,dt$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3\,dt$ 排列起来，使排列在后面的是前一个的高阶无穷小量，则正确的排列次序是(　　).

A. α,β,γ　　B. α,γ,β　　C. β,α,γ　　D. β,γ,α

本题考查的知识点　无穷小量阶的比较.

解析　所给问题为三个无穷小量阶的比较问题. 可以利用 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\alpha}{\beta}$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\gamma}{\beta}$来比较，但是有可能经过三次极限运算才能算出需要的结论. 由洛必达法则的结论可以得到启发：只需比较在$x\to0^+$时，α'，β'，γ'的无穷小量的阶数：
$$\alpha'=\cos x^2,\beta'=2x\tan x\sim2x^2,\gamma'=\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\sim\frac{x}{2},$$
可知当 $x\to0^+$ 时，依题意排列为 α',γ',β'，因此有所求的排列次序为 α,γ,β. 应选 B.

本题难度系数　数学一为 0.591，数学二为 0.613.

本题解题技巧　这道题的解题思想是利用洛必达法则的结论而得出的. 由洛必达法则可知，当 $x\to x_0$ 时，α，β 为无穷小量，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}$存在（或为$\infty$），则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}$. 因此，为了比较当 $x\to x_0$ 时 α,β 的阶，可以考虑当 $x\to x_0$时比较 α',β'的阶.

例4(1.1.2 例33)(02106)　设函数$f(x)$在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且$f(0)\neq0$，$f'(0)\neq0$. 若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to0$ 时是比 h 高阶的无穷小量，试确定 a,b 的值.

本题考查的知识点　高阶无穷小量的定义，洛必达法则或利用导数定义求极限.

解析　**解法1**　利用洛必达法则.

由于当 $h\to0$ 时，$af(h)+bf(2h)-f(0)$为 h 的高阶无穷小量，又由可导必连续，连续必有极限，可得
$$\lim_{h\to0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0).$$
由于$f(0)\neq0$，故必有 $a+b-1=0$.

又由洛必达法则，有
$$0=\lim_{h\to0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}=(a+2b)f'(0).$$
由于$f'(0)\neq0$，必有 $a+2b=0$.

于是可解得 $a=2,b=-1$.

解法 2 利用导数定义求极限.

由题设条件可知：

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{a[f(h)-f(0)]}{h}+\frac{2b[f(2h)-f(0)]}{2h}+\frac{af(0)+bf(0)-f(0)}{h}\right\}. \qquad (*)$$

由于$f'(0)$存在，$(*)$式中前两项极限存在，如果第三项极限不存在，则与左边极限为零的结果相矛盾. 因此应有

$$(a+b-1)f(0)=0.$$

由于$f(0)\neq 0$，可知 $$a+b-1=0,$$
因此由$(*)$式可得$0=(a+2b)f'(0)$. 由于$f'(0)\neq 0$，可知$a+2b=0$.

可解得$a=2,b=-1$.

本题难度系数 0.80.

典型运算错误 有些考生认为当$h\to 0$时，$af(h)+bf(2h)-f(0)$是比h高阶的无穷小量，因此有

$$\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h^{1+\delta}}=0,\delta>0. \qquad (**)$$

虽然这样也能得到$a=2,b=-1$，但是上述运算中出现了概念性错误. 因为事实上并一定存在$\delta>0$，使$(**)$式成立.

说明 解法 2 并不要求$f(x)$有一阶连续导数，只要$f'(0)$存在即可，这表明题目的条件比较宽松. 这不是命题时出现疏漏，而是有意放宽条件，从而增加了解题方法，降低了题目的难度.

例 5(1.2.1 例 6)(98103) 函数$f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$不可导的点的个数为(　　).

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

本题考查的知识点 分段函数在分段点处的可导性.

解析 所给问题虽然是判定带有绝对值表达式函数的可导性问题，但是要注意问题的特殊性，考查的是求不可导的点的个数，而不是求导数表达式.

$f(x)=|x|$在$x=0$处不可导；

当$a>0$时，$f(x)=x^a|x|$在$x=0$处可导. $\qquad (*)$

上述两个结论可以当作公式使用. 这两个结论还可以推广到$|x-x_0|$的情形. 以此为依据，可以简化运算.

由于$f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|=(x-2)(x+1)|x||x-1||x+1|$，可知$f(x)$在点$x=0,x=1$处不可导，但在$x=-1$处可导. 故$f(x)$不可导的点有两个，本例应选 B.

本题难度系数 0.46.

本题解题技巧 将$(*)$处的结论当作公式使用，并推广到$|x-x_0|$的情形，这属于前面所说的性质的外延.

典型运算错误 对于上述试题，绝大多数考生不会利用前述结论求解，而是将所给函数化为分段函数之后，再逐一考察分段点处的可导性，导致运算复杂化，并增加了出错误的可能性.

从上述五个例题可以看出本书的立意及本书试题解析中所包含的特点. 试题解析中有试题考查的知识点、解题思路、典型运算错误、特殊解题技巧、题目的变式、题设条件与试题考查知识点的关系解说、试题的难度系数及由性质、概念的内涵、外延而导出的一些有效解题技巧，这些构成了本书的特色，成为本书的亮点. 这些内容中包含着作者多年研究教学、研究考研试题的成果，是备考生不可多得的复习资料. 这些知识及解题思想在通常的辅导书中很少见，但对备考生有很大的帮助.

本书高等数学部分，由北京航空航天大学徐兵教授执笔；线性代数部分，由南开大学肖马成教授执笔；概率论与数理统计部分，由南开大学周概容教授执笔. 作者深信，只要读者认真学习此书，一定能在考试中取得好成绩.

作　者

于 2008 年 2 月

目　　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第一篇　高　等　数　学

第一章　函数、极限与连续性

1.1.1　函　　数

一、基本问题

函数的基本问题有：

1. 函数符号的运用问题，包括分段函数、反函数、可变上(下)限积分形式的函数、可变限二(三)重积分、可变限线(面)积分等形式的函数.

2. 讨论函数的基本性质.

二、基本运算方法

1. 函数符号的运用.

2. (1) 判定函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的有界性，常利用连续函数在闭区间上的最大(小)值定理.

(2) 判定函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的有界性，常利用连续函数在闭区间上的最大(小)值定理，并判定 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$.

(3) 求函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域，常常可以利用求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值来确定.

3. 判定函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的单调性，常利用 $f'(x)$ 的符号来确定.

4. 判定函数 $f(x)$ 的奇偶性常利用定义与性质来确定.

三、范例解析

近年来单独考查函数的题目已不多见，基本都是在一些综合性题目中，考查函数符号或判定函数的状态. 这些函数可能是导函数、原函数、可变限积分表示的函数等.

例 1(04210)　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，在区间 $[0,2]$ 上，$f(x)=x(x^2-4)$，若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数.

(Ⅰ) 写出 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的表达式；

(Ⅱ) 问 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

本题考查的知识点　第(Ⅰ)问考查函数的符号，第(Ⅱ)问判定分段函数在分段点处的可导性.

解析　问题(Ⅰ)为函数符号运算问题.

由于题设中只给出了在 $[0,2]$ 上 $f(x)$ 的解析表达式，欲求 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的表达式，可以考虑变换，将 $[-2,0]$ 上的变量 x 变到 $[0,2]$ 上的新变量.

当 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 时，可得 $0\leqslant x+2\leqslant 2$. 设 $y=x+2$，因此当 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 时，$0\leqslant y\leqslant 2$，从而

$$\begin{aligned} f(x) &= kf(x+2)=kf(y)=ky(y^2-4) \\ &= k(x+2)[(x+2)^2-4]=kx(x+2)(x+4). \end{aligned}$$

此处不再给出问题(Ⅱ)的解答.

本题难度系数　0.691.

函数符号的运用问题在导数、积分等综合试题中多次出现.

例 2(04211)　设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t$.

(Ⅰ) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数;

(Ⅱ) 求 $f(x)$ 的值域.

本题考查的知识点　函数周期性的判定,分段函数的积分,积分换元法,函数在给定闭区间上的最大(小)值.

解析　所给函数是由可变上(下)限积分形式表示的函数. 问题(Ⅰ)是判定 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数,只需依周期的定义来判定. 问题(Ⅱ)为求 $f(x)$ 的值域,由于 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数,只需在一个周期(如 $[0,\pi]$)上求出 $f(x)$ 的最大值与最小值,即可得 $f(x)$ 的值域.

(Ⅰ) 依题设可知

$$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\mathrm{d}t.$$

设 $t=u+\pi$,则当 $t=x+\pi$ 时,$u=x$;当 $t=x+\frac{3}{2}\pi$ 时,$u=x+\frac{\pi}{2}$;$\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$. 因此

$$f(x+\pi)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|\mathrm{d}u=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\mathrm{d}u=f(x),$$

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数.

(Ⅱ) 因为 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数,只需讨论 $f(x)$ 在一个周期 $[0,\pi]$ 上的值域.

由于 $|\sin u|$ 为连续函数,因此

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|.$$

设 $f'(x)=0$,可得 $f(x)$ 的驻点 $x_1=\frac{\pi}{4}$,$x_2=\frac{3}{4}\pi$. 由于

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=\sqrt{2},$$

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\sin t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\sin t\mathrm{d}t=2-\sqrt{2},$$

$$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t=1,$$

$$f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=-\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\sin t\mathrm{d}t=1,$$

可知 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最小值为 $2-\sqrt{2}$,最大值为 $\sqrt{2}$. 因此 $f(x)$ 的值域为 $[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

本题难度系数　0.424.

典型运算错误　① 部分考生不知道应依定义判定函数的周期性.

② 部分考生不知道“求 $f(x)$ 的值域”应如何下手.

③ 对含有绝对值的积分,去掉绝对值号的过程没有注意 $t\in\left[x,x+\frac{\pi}{2}\right]$,而是讨论 $0\leqslant t\leqslant\pi$,$\pi<t\leqslant 2\pi$.

1.1.2　极　　限

一、基本问题

1. 求极限与极限性质问题.

2. 无穷小量阶的比较.

二、基本运算方法

1. 利用连续函数性质求极限.

(1)若$f(x)$在点x_0处连续,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

(2)若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$,$f(u)$在点$u_0$处连续,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}g(x))$.

2. 利用极限的四则运算法则求极限.

3. 利用两个重要极限公式求极限.

4. 利用等价无穷小量代换简化运算.

常见的等价无穷小量代换:当$x\to0$时,

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x,1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x.$$

5. 利用无穷小量的性质求极限.

6. 利用极限的概念与性质求极限.

7. 求分段函数在分段点处的极限时,若函数在分段点两侧表达式不同,需分别计算左极限与右极限进行判定.

8. 利用极限存在的准则求极限.

9. 利用洛必达法则求极限.

10. 利用导数定义求极限.

11. 利用定积分的定义求极限.

12. 利用极限运算进行无穷小量阶的比较.

三、范例解析

1. 利用极限的四则运算法则求极限.

例 1(01203)　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$________.

本题考查的知识点　极限的四则运算法则,洛必达法则.

解析　所给极限为“$\dfrac{0}{0}$”型,不能直接利用极限四则运算法则.

本例求极限的函数分子中含有根式,且在$x\to1$时,带有根式的分子表达式极限为零.对于含有根式的函数的求极限问题,通常可以先进行有理化,使恒等变形以后的表达式中带有根式的因子的极限不为零,能对其直接求极限.

若变形后问题转化为分母极限不为零的分式极限,则可以利用极限四则运算法则求之.

若变形后问题仍为“$\dfrac{0}{0}$”型极限,则可以考虑利用洛必达法则等方法解之.

将求极限的函数恒等变形,可得

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(x^2+x-2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}\qquad(*)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(3-x)-(1+x)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)}{(x+2)(x-1)}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}}{6}.$$

本题解题技巧 本题(*)处先对含有根式的表达式有理化,通常能简化运算.

本题如果直接利用洛必达法则亦可解.

本题难度系数 0.79.

例 2(99205) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

本题考查的知识点 极限的四则运算法则.

解析 所给极限为"$\frac{0}{0}$"型,求极限的函数表达式中含有根式,依例 1 的解析,先将分子有理化.

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right\}$$

$$\xlongequal{(*)}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\ln(1+x)-x}\right]$$

$$\xlongequal{(**)}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}\right]$$

$$\xlongequal{(***)}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\frac{1}{1+x}-1}=\frac{-1}{2}\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}(1+x)\right]=-\frac{1}{2}.$$

本题解题技巧 如果对本题直接利用洛必达法则,运算将很复杂. 利用有理化将求极限的表达式变形能简化运算,且:

① 上述运算(*)处非零因子$\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$单独求极限,可以简化运算.

② 上述运算(* *)处,恒等变形,将 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$代入表达式,对因子$\dfrac{\sin x}{x}$利用重要极限公式单独求极限.

③ 上述运算(* * *)中对因子$\dfrac{1}{\cos x}$单独求极限,对第二个因子利用洛必达法则求极限.

本题难度系数 0.56.

典型运算错误 本题满分为 5 分,从考试结果看,有 40% 的考生得零分或 1 分,有 41% 的考生得满分. 考生的主要问题是有超过一半以上的考生不会在(*)处用$\frac{1}{2}$代替$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$,因此使运算复杂化,甚至出现运算错误.

说明 有些求极限的表达式中含有根式,若不能利用有理化简化运算,则不宜强行有理化. 如:

(98203) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ________.

此题不能有理化,应该对其利用洛必达法则直接求得极限值 $-\frac{1}{4}$.

本题难度系数 0.58.

典型运算错误 利用有理化而导致运算复杂,出现错误. 这表明运算应依题目特点而选择方法,不能简单断言某种方法能解决各种问题.

2. 利用两个重要极限公式求极限.

例 3(96103,96203) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$,则 $a=$ ________.

本题考查的知识点 重要极限公式.

解析 本例为求极限的反问题.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2a}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}=e^{3a}=8,$$

所以

$$a=\ln 2.$$

本题难度系数　0.87.

本题解题技巧　利用 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+d}=e^{ab}$将表达式变形. 相仿,若 $a\neq 0$,有

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{b}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{b}{x}}}{\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{b}{x}}}=\frac{e^{\frac{b}{a}}}{e^{-\frac{b}{a}}}=e^{\frac{2b}{a}}.$$

上述两种表达式变形是求极限运算的常见技巧,为固定模式的求解方法.

3. 利用等价无穷小量代换简化运算.

例 4(97103)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$______.

本题考查的知识点　等价无穷小量代换,极限四则运算法则.

解析　所给极限为"$\dfrac{0}{0}$"型,不能直接利用极限四则运算法则. 先进行等价无穷小量代换,再分组,可简化运算.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}\overset{(*)}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$$
$$\overset{(**)}{=\!=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2}.$$

本题解题技巧　虽然所给极限为"$\dfrac{0}{0}$"型,但是由于表达式分子中含 $x^2\cos\dfrac{1}{x}$,不能利用洛必达法则求所给极限.

上述运算中,在(∗)处利用等价无穷小量代换;在(∗∗)处将表达式分组变形,从而简化运算.

本题难度系数　0.66.

例 5(04210)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

本题考查的知识点　等价无穷小量代换,连续函数的性质.

解析　所给极限为"$\dfrac{0}{0}$"型,但是其中$\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x$为"$1^0$"型的幂指函数. 注意到

$$\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x=e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}},$$

利用等价无穷小量代换可以简化运算.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^3}\overset{(*)}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}\overset{(**)}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$
$$\overset{(***)}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

本题解题技巧 上述运算中利用代数恒等变形与等价无穷小量代换,使问题得到简化.其中式(*)处利用等价无穷小量代换:当 $x\to0$ 时,$e^x-1\sim x$.

在式(**)处利用等价无穷小量代换:当 $x\to0$ 时,$\ln(1+x)\sim x$.

在式(***)处利用等价无穷小量代换:当 $x\to0$ 时,$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$.

本题难度系数 0.520.

典型运算错误 考生中有部分人直接利用洛必达法则,致使运算更为复杂.也有一部分人在上式(*)处利用洛必达法则求之,由于运算复杂而出现运算错误.

例 6(06104) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$________.

本题考查的知识点 等价无穷小量代换.

解析

$$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot x}{\frac{x^2}{2}}=2.$$

本题难度系数 0.627.

典型运算错误 有些考生看到问题为求"$\dfrac{0}{0}$"型极限,没有先进行等价无穷小量代换,而是直接利用洛必达法则求解,致使运算复杂,出现错误.

例 7(08204) 已知函数$f(x)$连续,且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$,则$f(0)=$________.

本题考查的知识点 等价无穷小量代换.

解析 由题设可知

$$1=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}[xf(x)]^2}{x^2f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2}=\frac{f(0)}{2},$$

因此$f(0)=2$.

4. 利用无穷小量的性质求极限.

常用的无穷小量性质有:有界变量与无穷小量之积为无穷小量;无穷大量的倒数为无穷小量,等等.

例 8(92103,92203) 当 $x\to1$ 时,函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限( ).

A. 等于2 B. 等于0 C. 为∞ D. 不存在,但不为∞

本题考查的知识点 无穷小量的倒数为无穷大量,分段点处的极限.

解析 由于 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$,又因为

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty,\ \lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty,$$

因此

$$\lim_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,\ \lim_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

可知 $\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{1}{x-1}}$不存在,也不为零和无穷大.故知本题应选 D.

典型运算错误 部分考生由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$,得出 $\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$,忽视了 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$,$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$,导致错误.

特别指出,当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$为无穷大量,但是当 $x\to x_0$ 时,$a^{f(x)}$不一定为无穷大量.这里需要分 $a>1$ 与 $0<a<1$两种情形讨论,还需要讨论当 $x\to x_0$ 时,是$f(x)\to+\infty$,还是$f(x)\to-\infty$,否则必然导致错误!

例 9(97205) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

本题考查的知识点　无穷小量的性质:无穷大量的倒数为无穷小量,无穷小量与有界函数之积为无穷小量.

解析　所给极限为“$\frac{\infty}{\infty}$”型问题,不能直接利用极限四则运算法则,也不能利用洛必达法则求之.通常解决无穷大量运算的基本原则是将其转化为无穷小量运算.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}\overset{(*)}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+x+1}{-x\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1.$$

本题难度系数　0.45.

本题解题技巧　在上述运算(*)处,将无穷大量运算转化为无穷小量运算.

典型运算错误　上述运算(*)处,当$x\to-\infty$,且$|x|$足够大时,$\sqrt{x^2}=|x|=-x$,这是解题中的关键.相当多的考生在此处出现错误,误答为3,这是错误地认为

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+x+1}{x\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}.$$

说明　本题在命制时,曾考虑以下两种变式:

变式1　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=$________.

此变式较例9简单,只需注意$|x|=x$.

变式2　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

此变式较例9复杂,需分别讨论$x\to-\infty$与$x\to+\infty$两种情形.

5. 利用极限的概念与性质求极限.

例10(00203)　若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$为(　　).

A. 0　　B. 6　　C. 36　　D. ∞

本题考查的知识点　极限的性质,洛必达法则.

解析　由于$f(x)$为抽象函数,因此需要利用性质间接求出$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.

欲由已知条件导出$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$,可先将所给求极限的表达式恒等变形:

$$0=\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x+6x+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 6x-6x}{x^3}+\frac{6+f(x)}{x^2}\right),$$

利用洛必达法则可求得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3}=-36,$$

可知
$$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36.$$

故选 C.

本题难度系数 0.18.

本题解题技巧 将所给求极限的表达式恒等变形,并利用若 $\lim\limits_{x\to x_0}u$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}v$ 都存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}(u-v)$ 存在可求解.

6. 求分段函数在分段点处的极限.

例 11(00105) 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

本题考查的知识点 求分段函数在分段点处的极限.

解析 注意求极限的函数在点 $x=0$ 处间断,且在 $x=0$ 的两侧表达式不相同,因此应考虑利用左极限与右极限来判定极限是否存在.

由于
$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty, \tag{$*$}$$

因此
$$\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty,\ \lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0.$$

当 $x>0$ 时,$|x|=x$;当 $x<0$ 时,$|x|=-x$,可得
$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$
$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

故
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

本题难度系数 0.64.

典型运算错误 ① 将 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$分成两个极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}$和 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{|x|}$讨论.由于这两个极限都不存在,因此误答为原题极限不存在.

② 一些考生没有在($*$)处分左极限、右极限讨论,误认为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty$,$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$.

7. 利用极限存在的准则求极限.

对于无穷多项和的极限,常常考虑利用夹逼定理求其极限.

对于由递推公式给出的数列,判定其极限存在通常利用"单调有界数列必有极限"的准则.

例 12(08104,08204) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是( ).

A. 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　B. 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛　　D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛

本题考查的知识点 极限存在准则.

解析 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,当 $\{x_n\}$ 单调时,$\{f(x_n)\}$ 必为单调有界数列,可知 $\{f(x_n)\}$ 收敛,因此选 B.

例 13(96105) 设 $x_1=10$,$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$,证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

本题考查的知识点 "单调有界数列必有极限"准则的运用.

解析 数列 $\{x_n\}$ 是由递推公式形式表示的,判定其极限是否存在通常利用数列极限的存在准则:单调有界