常微分方程简明教程

曹之江　阿拉坦仓　编著

科学出版社
www.sciencep.com

常微分方程简明教程

曹之江　阿拉坦仓　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书论述现代常微分方程理论中基础原理部分，其主体内容基本上在传统教材框架之内，但论述的观点、重心和风格有较多迥异. 全书共分 8 章，前 6 章属于基础原理部分，内容包括基本概念、一阶微分方程、初值定解的适定性、高阶线性微分方程、微分方程的级数解、常微分方程组，这部分是本教程的主体，若用于教学，一般需要 60 个学时. 后两章主要讲述现代常微分方程中两个主干分支——常微分算子和动力系统理论的基本概念和背景，简略介绍它们的部分内容和新发展.

本教程选材得当，论述简洁明澈，主干脉络清晰，语言平易流畅，并且紧密联系物理与应用背景，不仅在理论上表现出鲜明的科学性和先进性，而且具有很好的可读性. 全书配有精选的练习题（附答案）.

本书可作为数学、物理类专业本科生教材，及其他理工类相关专业本科生或研究生教材，对于广大从事工程学或自然科学的读者，本书也不失为一本很好的参考书或自学入门教材.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程简明教程/曹之江，阿拉坦仓编著 .—北京：科学出版社，2007

ISBN 978-7-03-020078-5

Ⅰ. 常… Ⅱ. ①曹… ②阿… Ⅲ. 常微分方程-教材 Ⅳ. O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 194418 号

责任编辑：姚莉丽/责任校对：陈玉凤

责任印制：张克忠/封面设计：陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 12 月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2007 年 12 月第一次印刷 印张：11 1/2

印数：1—4 000 字数：218 000

定价：18.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换<长虹>）

前　言

提及微分方程的技术，常常不由得使人想起 1687 年牛顿发表《自然哲学的数学原理》这件划时代的大事. 牛顿在该书中不仅向全世界揭示了主宰着冥冥宇宙的万有引力机制，同时也公布了他为创建自己的动力学体系而发明的流数术与反流数术，即后来所谓的微分法与积分法. 微积分与微分方程的问世，完全冲破了传统数学仅仅以静态、孤立的量作为推算对象的局限，而破天荒地将物质的运动及轨道，量之间的变化制约关系作为运算和研究的对象，从而使自己成为对现实世界中各种动力机制（包括社会与经济的运作机制）和运动形态进行定量研究的基本语言和锐利武器，在短短的不到两个世纪的时间内，它石破天惊地证实了行星运动的开普勒三律，发现了海王星、冥王星，预言了电磁波的存在，并断言光就是电磁波等（这里姑且不论后来在 20 世纪导致的物理学的种种重大发现）. 这些匪夷所思的“神算”，促进了它在很短的时间内，长驱直入地占领了天文学、力学、物理学以至一切自然科学和应用技术，并渗入社会经济文化的各个领域，决定性地开创了现代科技文明，并无可置疑地确立了自己在现代科技与文化中的不可摇撼的地位，成为现代社会中一切从事理论科学与工程技术人员所必须掌握的语言工具与运算手段.

从 19 世纪下半叶开始，随着微积分学的公理化与严密化，微分方程逐渐从微积分中独立并分离出来，形成了自己系统而严密的理论体系，发展成为常微分方程和偏微分方程两大现代数学分支. 本教程将致力于讨论常微分方程现代理论中作为基础的部分，阐释它的内容、方法和原理. 常微分方程与经典的动力学是同根同源的孪生兄弟，在其后的三百余年内，一直是物理学家赖以对动态世界进行定量描述，破解造物主在宇宙万物中设置的密码的一种主要手段，它同时也是应用科学家和工程学家进行精确设计和计算所不可或缺的工具. 因此，这个在人类探索和改造自然的实践中应运而产生、发展起来的理论，先天地具有深远而广阔的现实背景. 常微分方程的这种现实性使它在现代数学中占有了特殊一席，成为了庞大理性数学王国联系现实世界并从中汲取养料的主要渠道之一. 微分方程从物理世界中提炼出来的众多挑战性问题，使得它成为几乎所有抽象数学分支的用武之地，从而极大地丰富了理论数学的内容并有力地推动了它们的发展.

常微分方程理论的现实性，注定了它内容的生动性与实在性. 从本质上来讲，它是一门非常有趣味且内蕴无穷的学问，然而现代数学的形式化与结构主义，常常湮灭了这种现实性与生动性. 加上教学上的不得法，造成了不少大学生对它仍然感到乏味、不得要领，甚至茫然不知所云，这是非常糟糕的. 因此应该

怎样去讲授常微分方程这门课程，使得既保持数学训练水平的要求，而又显得平易、实在而启人兴趣呢？

本书的编写要旨：

1. **定位**. 具有三百余年历史的常微分方程，其“基础理论”的界定，是应不同的需要而有不同尺度的. 它可以是一种具有较高抽象度的严密的纯粹数学公理体系；它也可以是一种适度抽象化的，既注重数学的原理与训练，又联系现实模型和应用的理论系统；它还可以仅仅是各种类型微分方程求解法的汇集. 本书作为常微分方程基础理论的教材，将定位在上述的第二种类型上，它面向的对象主要是数学类和物理类专业的本科大学生，以及其他理工类专业的大学生与研究生. 本教程不仅向他们提供了一种原理清澈、方法明晰的有效的数学工具，而且其本身也不失为一本严谨、系统，且有相当理论水平的现代数学基础教材.

2. **返璞归真**. 现代数学的严密逻辑与形式语言训练，并不意味着数学教学的全盘形式化与符号化. 恰恰相反，愈是抽象的数学，在认知上愈是要做到将它与人的直觉经验相联系，实行教学上的返璞归真. 所谓返璞归真，就是要把数学问题和概念的原始背景及来源，问题求解的原始方法和思想，以及这些方法和思想的演化发展等等，有机地渗透在日常的讲授之中.

3. **先进性与可读性**. 本书内容分为两大部分. 第一部分（前 6 章）讲述常微分方程基础理论的原理和方法，由曹之江教授主笔. 这部分的主体内容大致在传统教材的内容框架之内，这样使得本教程与现行的教学有一个较好的衔接，然而在讲授的观点、重心与风格上，却与现行教材有一定迥异. 第二部分（第 7、8 章）讲述现代常微分方程理论的两大主干分支——微分动力系统和常微分算子的基本概念和背景，简略介绍它们的若干内容和新发展，以使读者能一窥常微分方程现代理论的大略. 这部分由阿拉坦仓教授主笔.

对于一个讲授基础数学理论的教材，怎样才堪称是先进的？其标志主要不在于它是否列有若干非基础的现代“新成果”，而是视其对经典的基础性内容进行论述的观点、语言和重心. 从教学法上尚需视其能否发人思索，使人“悟”到什么. 一般来讲，先进的基础教材能够使学生顺利地进入其后的现代专业理论的学习与进行前沿性研究. 教材的先进性还必须体现在它有很好的可读性，要有清澈的理论，准确的语言，明晰的脉络，使全书显得简练、生动而明达，不感到冗繁与艰涩. 诚然，上述种种都是作者所努力追求的，然而本书在多大程度上达到了这些要求，这将留待读者们去评述了.

由于作者学识与水平所限，书中差失与不当之处在所难免，恳希国内同仁与广大读者批评指正.

作　者

2007 年 5 月

目　　录

* 号的章节，在教学上其数学论证可不作要求，但其内容读者仍应能理解运用.

第1章 基本概念

1.1 微分方程及其解

什么叫“方程”? 按照词的本义,所谓方程,就是约束在平衡或相等关系下的演算,在西文中,方程式的对应词是 equation,也是等式的意思. 因此确切地讲,方程式就是指未知量和已知量在平衡(等式)约束下的一种运算关系式,它包含着三个本质因素:未知量、已知量以及把未知量与已知量结合起来的运算. 例如在初等数学里,众所熟知的二次方程式

$$ax^2+bx+c=0,$$

其中 x 表示欲求的数,是方程式中的未知量,a,b,c 则表示已知的数,代表已知量,而将已知量与未知量结合在等式中的则是加、乘的代数运算. 如上所示以数作为未知量的方程式中,所出现的运算当然可以是多种多样的. 人们常常依据方程式中出现的不同运算关系而把方程式称为代数方程式、有理方程式、无理方程式、三角方程式…… 在初等数学里,人们接触最多的是那种用加、减、乘运算组合的代数方程式(即多项式方程),并根据方程中未知量出现的最高次数把它们称为一次的(线性的)、二次的或 n 次的方程式.

什么是微分方程式(以下简称微分方程)? 微分方程是在近代的变量数学中出现的、以函数为未知量和已知量的一种数学方程式,它与古典的以数为对象的代数方程式有着本质区别. 在微分方程中,结合未知函数和已知函数的运算是函数的求导以及函数间的代数运算与复合运算. 本书仅限于讨论未知函数仅具有单自变量的微分方程式,即常微分方程式. 至于未知函数具有多个自变量的微分方程式,即偏微分方程式,将在另外的专门课程里进行讨论.

若以 $y(x)$(或 $y(t)$)表示未知函数,下面列举若干常微分方程的例子:

$$y'=\frac{y}{10+x}, \tag{E1}$$

$$yy'^2+2xy'-y=0, \tag{E2}$$

$$(x-1)y''-xy'+y=0, \tag{E3}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+k^2y=A\sin\omega t. \tag{E4}$$

由上述例子可见,常微分方程也可说成是未知函数及其导数和已知函数间的一种运算组合关系式. 在微分方程中,未知函数导数的最高阶数,是方程式的一个

本质参数，称为方程的阶数. 因此上面例子中前两个方程的阶数是1，后两个方程的阶数是2，分别称为是一阶的和二阶的微分方程式. 当然还可以举出更高阶的方程的例子.

一阶微分方程，在微分方程中具有最基本和最重要的地位，它的一般形式可表示为

$$F(x,y,y')=0, \tag{1.1.1}$$

其中 F 表示任一个3变元的函数. 形如(1.1.1)的方程常称为隐式的微分方程. 假如可以从(1.1.1)式中将 y' 解出来，直接表为 x、y 的函数，则得到显式的微分方程

$$y'=f(x,y), \tag{1.1.1$'$}$$

此时函数 $f(x,y)$ 在坐标平面上的定义域，就称为方程(1.1.1′)的定义域. 例如由(E1)所列举的方程，就是一个一阶的显式方程，其定义域为坐标平面上除去直线 $x+10=0$ 的部分. 对于一个隐式方程，我们有时可根据隐函数定理，从中解出若干个显示方程分支. 例如由(E2)列出的方程，经过简单的代数演算，即可得到两个显式方程

$$y'=\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y},\quad y'=\frac{-x-\sqrt{x^2+y^2}}{y}.$$

一个微分方程，若阶数超过1，即称为高阶方程. 若设阶数为 n，则 n 阶方程的一般表示式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \tag{1.1.2}$$

这里 F 表示任一个 $n+2$ 元的函数. 若函数 F 对于变元 $y,y',\cdots,y^{(n)}$ 而言都是一次的，则相应微分方程称为线性微分方程，其一般形式可表为

$$p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=f(x), \tag{1.1.3}$$

这里 $p_0,p_1,\cdots,p_n,f$ 均表示在某确定区间上的已知函数. 在前面列举的微分方程中，(E3)、(E4)是二阶的线性方程，(E1)则是一个一阶的线性方程.

设 $\varphi(x)$ 是区间 I 上的 n 次可微函数，若将它及它的各阶导数都代入到微分方程(1.1.2)中 y 及 $y',y'',\cdots,y^{(n)}$ 的相应位置，使 F 成为 I 上的恒等式，即有

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0\qquad (x\in I),$$

则称 $\varphi(x)$ 是方程式的一个解.

例如，对一阶方程 $y'=\dfrac{y}{10+x}$，略加观察就不难发现，$\varphi(x)=10+x$ 是方程的一解. 若再深入观察，又可验证对于任何常数 C，函数 $C\varphi(x)=C(10+x)$ 也都是方程的解，这样我们就发现该方程有可由一个任意常数联串起来的解族. 同样，我们若认真观察方程(E3)，可以看出方程式的两个解 $\varphi(x)=e^x$，$\psi(x)=x$，而且对于任何自由选取的常数 C_1、C_2，函数 $C_1\varphi(x)=C_1e^x$，$C_2\psi(x)=C_2x$ 以及它们的叠加

$C_1\varphi(x)+C_2\psi(x)=C_1e^x+C_2x$ 均仍为方程式的解，这样我们就得到了方程的由两个独立常数联串起来的一个解族.

注意在上面列举中所碰到的性质：一个解乘任意常数以及任意两个解的叠加仍是方程的解，这仅仅是线性微分方程的特征，对于一般的非线性方程，并不成立.例如 $\varphi(x)=-\dfrac{1}{x}$ 是方程 $y'=y^2$ 的一个解，但是 $C\varphi(x)=-\dfrac{C}{x}$ 当 $C\neq 0,1$ 时均不是解.

从上述例子中可以看到，一阶方程可以具有由一个任意常数联系起来的单参数解族，二阶方程可以具有由两个独立的任意常数联系起来的双参数解族.这个事实具有一般性，我们在以后的章节中可以证明，对于一个 n 阶的微分方程，若它满足一定的基本条件，则它就具有由 n 个独立的任意常数（n 个独立参数）联系起来的解族，这个解族，有时候能够用组合着 n 个独立参数的初等函数及其积分式解析地表示出来，这时这个解族的统一的解析表示式就称为微分方程的通解（注意通解中独立常数的个数应与方程的阶数一致）.但在更多的场合，我们不可能得到解族的这种解析表示式，这时候我们常常也用通解这个词去通称没有解析表示式，但实际存在的解族.注意通解不是微分方程中的精确概念，它更多地是微分方程解族的一种通称.

例如，以后很易于证明

$$y'=2y \quad \text{的通解为} \quad y=Ce^{2x},$$

$$y''+y=0 \quad \text{的通解为} \quad y=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=g \quad \text{的通解为} \quad y=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2,$$

$$y'=-y^2 \quad \text{的通解为} \quad y=\frac{1}{x+C} \quad \left(\text{或}\frac{C}{Cx+1}\right).$$

相对于通解而言，微分方程满足特殊条件的个解，就称为特解.例如 $\varphi(x)=2x+20$ 是微分方程(E1)的经过点(0,20)的特解，$\varphi(x)=e^x-2x$ 是微分方程(E3)满足条件 $y(0)=1,y'(0)=-1$ 的特解.

人们自然要问：n 阶微分方程的包含着 n 个独立任意常数的通解式，是否可因任意常数的不同选取而得到微分方程的一切解？对于线性微分方程而言，答案是完全肯定的，这将在第 3 章得到充分说明.因此通解式 $y=C(10+x)$ 包含了方程(E1)的全部解，通解式 $y=C_1e^x+C_2x$ 包含了方程(E3)的全部解.然而对于非线性方程而言，这个事实并不一定成立.例如方程 $y'=-y^2$，其通解 $y=\dfrac{1}{x+C}$ 不包含特解 $y=0$.方程的另一通解式 $y=\dfrac{C}{1+Cx}$ 包含了特解 $y=0$（对应于 $C=0$），但却不包含特解 $y=\dfrac{1}{x}$.这表明了通解的内含要受到表示式的局限.

在实际问题中，若需要寻求的未知函数的个数不止一个，则相应的微分方程式的个数也要增加，这就出现有若干个独立的微分方程式构成的微分方程组. 一般来讲，微分方程组中独立方程式的个数应与未知函数的个数相当，这与代数方程组的情况类似. 微分方程组的最简单的例子，譬如要确定一个质点的平面运动，就须确定质点在平面上两个坐标参数的运动方程：$x=x(t)$，$y=y(t)$. 这时在动力学里面，必然相应地要给出由两个独立微分方程所组成的方程组. 在一般情况下，若未知函数的个数为 n，则微分方程组便称为是 n 元的. n 元的一阶微分方程组一般可以写成如下的标准形状：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=f_1(t,y_1,y_2,\cdots,y_n), \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=f_2(t,y_1,y_2,\cdots,y_n), \\ \qquad\cdots\cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t}=f_n(t,y_1,y_2,\cdots,y_n), \end{cases}$$

其中 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 表示未知函数，t 表示自变量，$f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是任意的 $n+1$ 元函数. 关于微分方程组的理论与求解我们将在第 6 章进行专门讨论.

1.2　微分方程的物理背景——动力机制的数学模型

微分方程是物理科学与各种应用科学、工程科学的基本语言和工具. 微分方程的技术和理论，最早溯源于牛顿在天体力学中对行星运动及其轨道的定量研究，1687 年牛顿发表了划时代的巨著《自然哲学的数学原理》，书中不仅提出了万有引力的动力学体系，并同时首创了微积分（流数和反流数）和微分方程这种全新的数学技术. 其后微分方程不仅是对天体力学，而且也是对一切物质运动及其动力机制进行本质刻画和定量研究的主要手段. 一个物质运动，它的运动过程是由物质所在系统的内部物理机制和外部作用力所决定的. 那么，如何由运动的物理机理和外部的作用力来精确地确定运动过程？这就需要我们运用数学的工具，将运动机理与外部动力的作用定量地表示成数学模型——微分方程，然后应用数学的运算技巧，将实际的运动过程从微分方程中求解出来. 例如行星绕日运动，其物理机制就是物质运动的惯性和牛顿的运动第二定律，其动力是太阳对行星的引力. 把它们的作用准确地写成数学模型，就是著名的牛顿二体运动方程. 这个二体运动方程，包含了一切在万有引力作用下的两物体间的相对运动，包括九大行星运动、千万个小行星运动、彗星的运动、人造卫星的运动等. 而其中任一个具体运动，只需提供必须的物理参量及初始数据，就都可以从二体运动方程中求解出来. 因此，从动力学的角度来看问题，所谓微分方程，就是物质运动动力机制的数学表述. 下面将列举若干个

对实际物理过程及其运行机制进行定量描述的微分方程模型，使读者对于微分方程理论与方法的来龙去脉有一直觉印象.

1. 质点的弹性振动

介质中质量为 m 的质点，假定处在弹性约束之下作一维振动(即仅需一个位置参数就可完全描述质点状态的运动)，我们常常以弹簧作为这类一维弹性振动的代表模型(图 1.1).

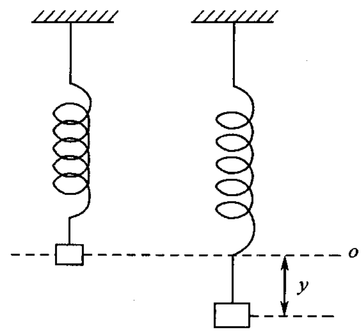

图 1.1

令质点的运动参数 $y \triangleq y(t)$ 为质点离开平衡位置的距离. 于是质点运动的瞬时速度 $v(t)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，瞬时加速度 $a(t)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$.

已知质点在介质中运动所受阻力 f_1 与质点速度成正比，$f_1=-rv=-r\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$($r$ 为阻力系数).

据胡克(Hooke,R.)定律，质点受到的弹性恢复力 f_2 与位移 y 成正比，$f_2=-ky$(k 为弹性系数).

再设质点受到外力 $f_3=F(t)$. 于是据牛顿第二定律，$ma=\sum f_i$，将上述各力的数学表示式代入，即得

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+r\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ky=F(t),$$

上式即为有阻尼的质点弹性振动的微分方程. 由上例可见，微分方程事实上就是物理定律的数学表述.

若令$\frac{r}{m}=2\gamma,\frac{k}{m}=\omega^2,\frac{F(t)}{m}=f(t)$，则方程可表为如下规范形式：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\omega^2y=f(t). \tag{1.2.1}$$

特例 1　落体运动. 若 $r=k=0$，即介质阻尼与弹性约束为 0，且 $F=-mg$，则微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-g.$$

若当 $t=0$ 时，$v(0)=v_0$，$y(0)=y_0$，则应用如上初始数据对方程式在$[0,t]$区间上作两次积分，即得

$$y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0.$$

这就是熟知的(真空中)落体运动方程.

特例 2　简谐振动. 若在方程(1.2.1)中，$r=0$，$F(t)=0$，则微分方程为

$$\frac{d^2 y}{dt^2}+\omega^2 y=0.$$

这时可以验证方程式的解为(解法见 4.4 节)

$$y(t)=A\cos(\omega t+\alpha),$$

这是简谐振动(质点匀速圆周运动在坐标轴上投影)的数学表示式,其中常数 A, α 由运动的初始数据确定. 由此可见无阻尼无外力作用的弹性振动为简谐振动.

2. *RLC* 交变电路

一个由电阻 R、电感 L 和电容 C 等元件构成的电路(图 1.2),其状态参量可有

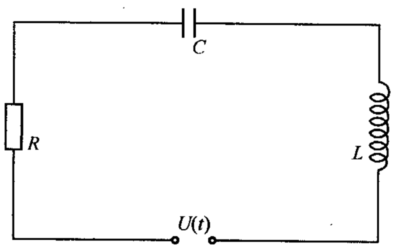

图 1.2

电流 $i=i(t)$,

电阻的电势降 $u_R=u_R(t)$,

电感的电势降 $u_L=u_L(t)$,

电容的电势降 $u_C=u_C(t)$,

电容电荷 $Q=Q(t)$,

此外令电路输入电压 $U=U(t)$.

根据电路的欧姆定律、楞次定律等实验定律,可有

$$u_R=Ri,\quad u_L=L\frac{di}{dt},\quad u_C=\frac{Q}{C},$$

$$i=\frac{dQ}{dt}=C\frac{du_C}{dt}.$$

这些关系说明电路中的独立状态参量只有一个,因此关于电路的微分方程必是一维的.

据 Kirchhoff 定律,知闭电路中各元件的电压降与外电压代数和为 0,即有

$$U(t)-u_R-u_L-u_C=0.$$

将上述关系式代入即得

$$LC\frac{d^2 u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U(t),$$

这是电容电压 u_C 所满足的微分方程. 若令

$$\frac{R}{L}=2\gamma,\quad \frac{1}{LC}=\omega^2,\quad \frac{1}{LC}U(t)=f(t),$$

并记 $u_C=y$,则微分方程与方程(1.2.1)形式上完全一致. 这说明有阻尼的机械振动与 RLC 电路,其运动变化机理,在数学上是统一的.

3. 冷却与衰变

考虑另一种类型的过程描述.

例 1.1 一温度为 500℃物体置于 20℃的环境中，2 分钟后温度降为 400℃，问 10 分钟后温度降至多少度？

解 本问题为一散热过程的定量描述，过程的状态参量为温度 $T=T(t)$. 据冷却定律，物体温度下降速率和物体与环境温差成正比，于是将定律表成数学形式即得

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-20),$$

其中 k 为比例常数. 由此即得时间 t 与温度 T 的微元关系

$$-kdt=\frac{dT}{T-20}.$$

积分后即解得(求解方法见 2.1 节)

$$T-20=Ce^{-kt}.$$

将初始状态数据 $t=0,T=500$ 以及 $t=2,T=400$ 代入，即可确定 $C=480,k=\frac{1}{2}\ln\frac{24}{19}$. 于是即得物体降温过程的定量描述

$$T=20+480e^{-\frac{t}{2}\ln\frac{24}{19}}.$$

令 $t=10$，代入即得 10 分钟后的温度

$$T(10)=20+480e^{-5\ln\frac{24}{19}}=20+480\times\left(\frac{19}{24}\right)^5.$$

例 1.2 放射性衰变.

质量为 $m=m(t)$ 的放射性物体，已知其质量的放射速率与质量本身成正比. 将放射律用数学表示，即得

$$\frac{dm}{dt}=-km,$$

其中 k 为比例常数. 放射律的微分方程与冷却律的方程本质上相同. 应用积分即可得

$$m=Ce^{-kt}.$$

若测知 $t=t_0, m=m_0$，则据此即可定出常数 $C=m_0e^{kt_0}$，从而得放射过程为

$$m=m_0e^{-k(t-t_0)}.$$

4. 人口增长

从宏观统计上看，一个国家或一个地区的人口增长，有自身的动力机制，因此也可按动力学的方法进行分析. 下面列举两个最简单的理想数学模型.

(1) 马尔萨斯(Malthus) 人口律

若人口的生存环境宽松，食物充裕，则其增长率与人口基数成正比. 设某地区

人口总数 $N=N(t)$，则按马尔萨斯人口律，得

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\alpha N,$$

其中 $\alpha>0$ 为比例常数，为人口的自然增长率. 设 $t=t_0$ 时 $N=N_0$，则经过简单计算可得马尔萨斯的人口增长规律

$$N(t)=N_0\mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)}.$$

这是一个按指数增长的规律. 按照这个增长规律，立即可以推出，若取一个等差的时间数列，则相应的人口成一等比数列. 因此从离散的角度来看，若在等间隔的时间内统计人口，则马尔萨斯人口律就是按等比增长的人口律. 马尔萨斯人口律曾被生物学家用田鼠、试管中的草履虫等许多实验精确地验证，证明它是在不受生存条件约束下生物生长的普遍规律.

(2) Logistic 人口律

按马尔萨斯人口律，人口可按指数无限增长，这自然是不合理的. 事实证明人口数量增长到一定限度，人口就不按马尔萨斯律增长，经验证明，在生存环境与食物等条件受到限制的情况下，生物群内部的生存竞争就要抑制生物数量的增长. 根据统计分析可知，在人口群体中，由于生存竞争而产生一个与人口平方成正比的负增长率. 19 世纪德国数学、生物学家 Verhulst 将这个负增长率列到人口模型中，即得到 Logistic 人口律

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=aN-bN^2,$$

其中 a,b 为正常数，$b\ll a$，若令 $N(t_0)=N_0$，则可从上述方程中解得 Logistic 人口函数(解法见 2.1 节)

$$N=\frac{aN_0}{bN_0+(a-bN_0)\mathrm{e}^{-a(t-t_0)}}.$$

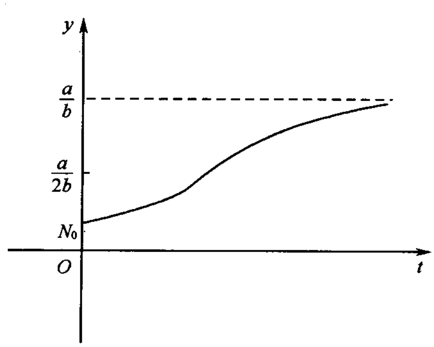

图 1.3

由上述 $N(t)$ 的表达式，可知 $N(t)$ 为一单增函数，且 $\lim\limits_{t\to\infty}N(t)=\frac{a}{b}$，这说明 Logistic 人口增长，有一个极限值. 此外，容易证明当 $N=\frac{a}{2b}$（即人口达到极限值半数）时，Logistic 人口曲线达到扭转点，人口的增长率由上升转变为下降（图 1.3）. Logistic 人口律，经过检验，被认为是一个比较合理的人口增长模型. 生物学家用原生动物的繁殖对照 Logistic 曲线，得到比较精确的验证，美国商业部曾用近 260 年地球人口的统计数字，去拟合 Logistic 曲线，也取得很好的效果. 按 Logistic 人口律，算出地球人口倍增期为 34.6 年，而据 1700～1761 年地球人口数据统计，平均倍增期为 35 年.

5. 溶液淡化

下面将提出另一种类型（微元分析）的过程模型.

例 1.3 容器内有 100 升浓度为 10% 的盐溶液，若以 3 升/秒的匀速往容器中注入净水，同时又以 2 升/秒的速度将搅匀后的溶液排出. 问过程开始后 1 小时溶液的浓度？

解 设在淡化过程中时刻为 t 时溶液的含盐量为 $x=x(t)$. 由于溶液中的盐量和浓度是不断变化的量，因此淡化是一个不均匀的过程，这说明须应用微元分析来讨论问题.

任选时间微元区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$，由于 $\mathrm{d}t$ 充分小，因此在微元时间间隔内，过程可视为均匀的. 由于溶液每秒注入 3 升，排出 2 升，因此净增 1 升. 于是在 t 时刻溶液容积为 $(100+t)$ 升，因而其浓度为 $\frac{x}{100+t}$. 于是在 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 时间区间内，溶液中盐排出量

$$-\mathrm{d}x=\frac{x}{100+t}\,2\mathrm{d}t,$$

再加上初始数据 $x(0)=100\times10\%=10$，即得到 $x(t)$ 由微元关系所构造的方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{2x}{100+t},\\ x(0)=10.\end{cases}$$

容易从方程中解出（见 2.1 节）

$$x(t)=\frac{10}{\left(1+\frac{t}{100}\right)^2}.$$

于是求得 1 小时后盐量 $x(60)=\frac{10}{1.6^2}$，同时即得浓度为

$$\frac{x(60)}{100+60}=\frac{1}{10\times1.6^3}.$$

6. 二体运动(行星绕日运动)

行星究竟按什么规律绕太阳运动以及为什么这样运动？这是 17 世纪之前困扰哲学家们的大问题. 16 世纪波兰天文学家哥白尼(Copernicus, N.)首先提出地球绕日做圆周运动. 17 世纪德国天文学家开普勒(Kepler, K.)在总结著名天文学家布拉赫(Brache, T.)二十余年观察数据基础上，又经过自己近二十年的观察、分析和归纳，提出了著名的 Kepler 三律(被称为"太空的宪法").

(A)行星绕日运动轨道是椭圆，太阳在轨道的一焦点上.

(B)太阳与行星的连线(向径)在相同时间间隔内扫过相同的面积.

(C)行星公转周期的平方与它到太阳平均距离的立方成正比.

Kepler 三律是人类对周围世界在观察、分析基础上，作出科学归纳的最辉煌范例. 然而 Kepler 三律仅是揭示了行星运动的表象规律，而冥冥之中，究竟是什么样的动作机理和什么样的力量造成行星如此地运动呢？为了回答这一哲学难题，就必须要求人们在已掌握的表象的基础上，作深入而精密的理性分析. 这意味着需要创造一种对过程进行精确的定量分析的武器，它不仅能够准确精密地表现物质运动过程，而且能够精确地定量描述物质间的相互作用，并从相互作用的机制中计算出运动过程. 1687 年牛顿发表了划时代的巨作《自然哲学的数学原理》，提出了万有引力定律，并且运用他所创立的微积分这一新的数学工具，提出了行星绕日的二体运动方程，同时从二体运动方程推导出 Kepler 三律. 人们以往只是以观察与归纳去认识世界，而牛顿第一次运用人的理性智慧与推证思维的锐利武器——数学模型，去探索自然，这在人类文明发展的历史上，被公认为最伟大的里程碑.

下面我们根据牛顿的万有引力机制，导出二体运动方程.

由于行星绕日为一平面运动，因此我们可在轨道平面上建立坐标. 令太阳所在点为原点 O，行星所在点记为 P(图 1.4)，其坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，这里 $r=r(t), \theta=\theta(t)$表示动点 P 的极坐标. 由于行星做平面运动，因此常可用矢量来表示

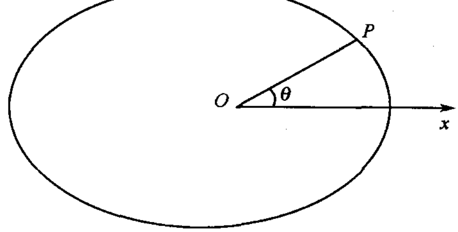

图 1.4