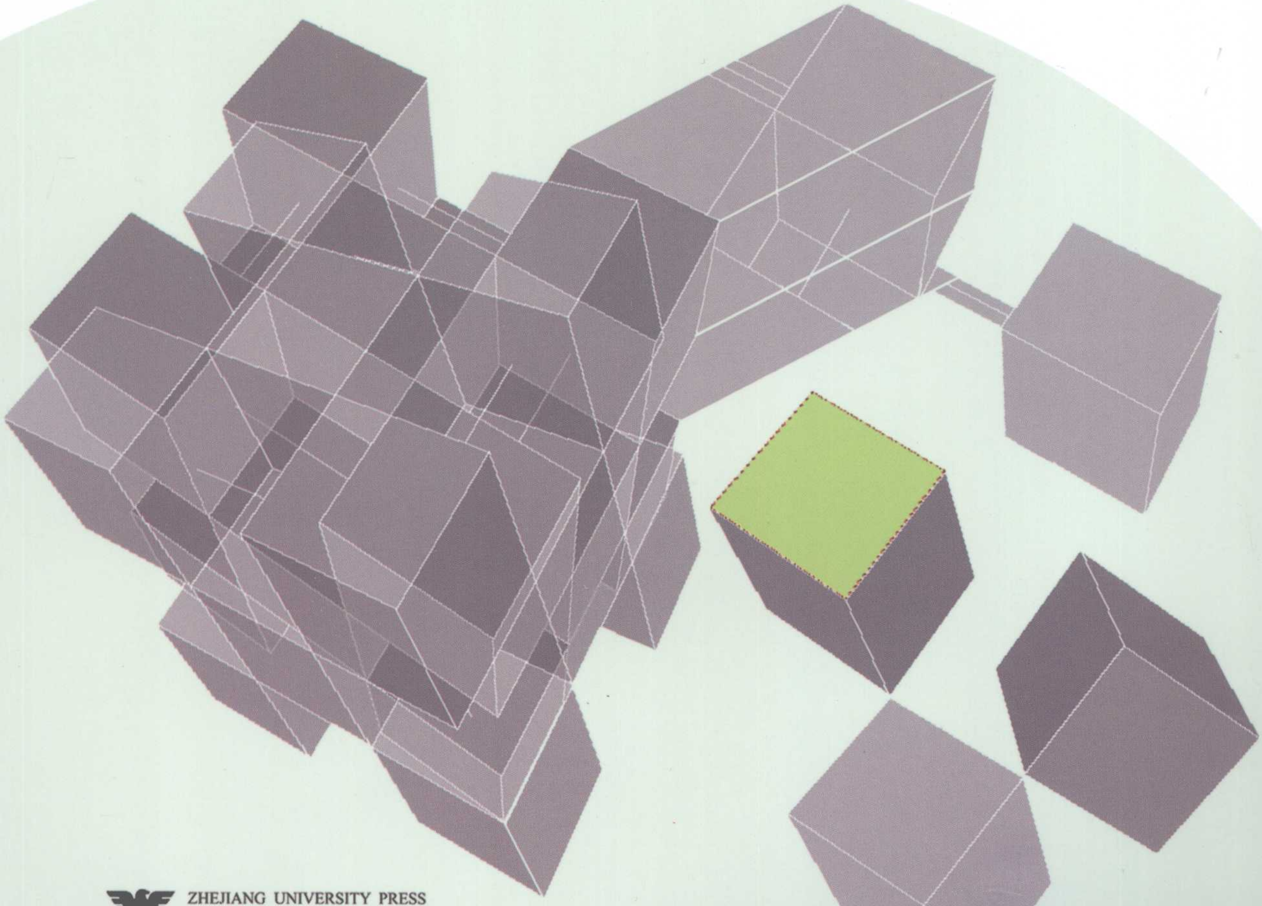
概率论与数理统计辅导教程

王炳兴 主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

概率论与数理统计辅导教程

主　编　王炳兴
编　著　王　波　丁嘉华　王炳兴　朱孟虎
　　　　蔡光辉　韩兆秀　钱晓莉

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计辅导教程/王炳兴，龚小庆主编. 杭州：浙江大学出版社，2007.12
ISBN 978-7-308-05666-3

Ⅰ.概… Ⅱ.①王…②龚… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 177445 号

概率论与数理统计辅导教程

主　　编　王炳兴

责任编辑　徐素君　夏庆民
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　杭州杭新印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　11.75
字　　数　262 千
版 印 次　2007 年 12 月第 1 版　2007 年 12 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-05666-3
定　　价　19.80 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

前　　言

概率论与数理统计是高等学校经济类和理工类各专业的重要基础课,它是研究随机现象的一门数学学科,具有很强的理论性和应用性.为帮助学生掌握这门课程的主要内容和基本方法,适当强化解题技能,我们编写了本书,以供读者学习辅导及备考应试之参考.

本书分成九章,内容涵盖随机事件与概率,随机变量、随机向量及其分布,数字特征,极限定理,抽样分布,参数估计,假设检验,一元线性回归分析.每章包括内容提要,例题分析,练习题.最后的模拟试题是本课程的综合测试题.

本书编写的具体分工如下:第一章王波,第二章丁嘉华,第三章和第七章王炳兴,第四章朱孟虎,第五章蔡光辉,第六章和模拟试题韩兆秀,第八章和第九章钱晓莉.全书由王炳兴、韩兆秀统核、定稿.

由于编者水平有限,加之时间仓促,在编写中难免有差错和欠缺,还望广大读者批评指正.

编者

2007 年 11 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

内 容 提 要

一、预备知识

1. 两个基本原理

(1) 加法原理

做一件事,完成它可以有 n 类办法,在第一类办法中有 m_1 种不同的方法,在第二类办法中有 m_2 种不同的方法,……,在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有:$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ 种不同的方法.

(2) 乘法原理

做一件事,完成它需要分成 n 个步骤,做第一步有 m_1 种不同的方法,做第二步有 m_2 种不同的方法,……,做第 n 步有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有:$N = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n = \prod\limits_{i=1}^{n} m_i$ 种不同的方法.

2. 排列

(1) 排列和排列数

从 n 个不同元素中,任取 m 个($m \leqslant n$)不同元素,按照一定的顺序排成一列,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一种排列.所有这样不同排列的种数(排列数)有 A_n^m 种,这里 $A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$.

(2) 可重复元素的排列

从 n 个不同元素中取出 m 个($m \leqslant n$)元素(元素可以重复),按照一定的顺序排成一列,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个可重复元素的排列.所有这样可重复排列的种数(可重复排列数)有 n^m.

3. 组合

(1) 组合和组合数

从 n 个不同元素中,任取 m 个($m \leqslant n$)不同元素,不计顺序并成一组,叫做从 n 个

不同元素中取出 m 个元素的一种组合.这样不同的组合种数(组合数)有 C_n^m 种,这里

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

(2) 组合数的性质

$$C_n^m = C_n^{n-m},\ C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}.$$

二、随机现象、随机试验、随机事件

1. 随机现象

在一定条件下,可能发生也可能不发生的现象称为随机现象.随机现象仅就一次观察呈现不确定性,但在大量重复试验中,具有某种统计规律性.

2. 随机试验、随机事件

(1) 随机试验

对随机现象进行观察称为随机试验.

随机试验具有以下特征:

① 重复性　试验在相同的条件下可重复进行;

② 明确性　每次试验结果不止一个,并事先明确所有可能的结果;

③ 随机性　每次试验前,不能预知出现的可能结果.

(2) 随机事件

① 基本事件和样本空间　随机试验的每一个可能结果称为基本事件或样本点,所有基本事件构成的集合称为样本空间,记作 S.

② 随机事件　由样本空间中某些样本点所组成的集合即样本空间的子集,称为随机事件,简称事件,用大写英文字母 A,B,C 等表示.事件 A 发生,当且仅当 A 所包含的一个样本点出现.特别地,样本空间 S 称为必然事件,空集 $\varnothing$ 称为不可能事件.

3. 事件间的关系与运算

(1) 事件间的关系与运算(如表 1-1 所示)

(2) 完备事件组

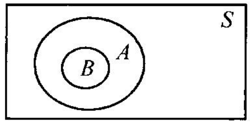
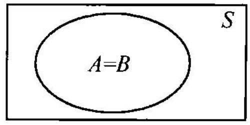
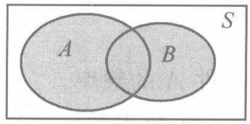
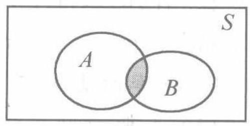
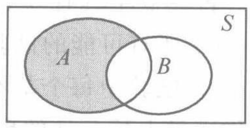
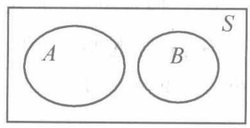
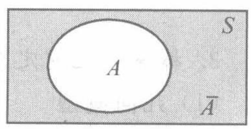
如果一组事件 A_1, A_2, …, A_n, 满足

① 两两互不相容(互不相容性);

② $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = S$ (完备性),

则称事件组 A_1, A_2, …, A_n 为完备事件组.

表 1－1　事件的运算及关系图表

运算或关系名称	记　号	定　义	文 氏 图
A 包含 B （包含关系）	$A \supset B$ 或 $B \subset A$	事件 B 的发生，必然导致事件 A 的发生	
A、B 相等 （相等关系）	$A=B$	A、B 相互包含	
和事件 （加法运算）	$A+B$ 或 $A \cup B$	事件 A 与 B 至少有一个发生（A 或 B 发生）	
积事件 （乘法运算）	AB 或 $A \cap B$	事件 A 与 B 同时发生（A 且 B 发生）	
差事件 （减法运算）	$A-B$	事件 A 发生，但事件 B 不发生	
互不相容 （互斥关系）	$AB=\varnothing$	事件 A 和 B 不能同时发生	
对立事件 （互逆关系）	$\overline{A}$ $A+\overline{A}=S$ 且 $A\overline{A}=\varnothing$	A、$\overline{A}$ 两事件中必有一个发生，但不能同时发生	

（3）运算的性质

① **交换律** $A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$

② **结合律** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

③ **分配律** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

④ **对偶律(德·莫根律)** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

一般地

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

三、概率的定义

1. 概率的统计定义

(1) 频率　在相同条件下进行 n 次重复试验,事件 A 出现 m 次,则称

$$f_n(A) = \frac{m}{n}$$

为事件 A 的频率.

(2) 概率的统计定义

在相同的条件下,重复进行多次试验,事件 A 的频率的稳定值 p 称为随机事件 A 的概率,记作 $P(A) = p$.

2. 概率的古典定义

(1) 古典概型

古典概型具有以下特点:

① 所有可能的试验结果只有有限个,即试验的基本事件个数有限;

② 试验中每个基本事件发生的可能性相等.

并称满足上述条件的事件组为等概基本事件组.

(2) 概率的古典定义

在古典概型中,设基本事件总数为 n,事件 A 包含的基本事件数为 m ($m \leqslant n$),则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

3. 概率的几何定义

(1) 几何概型

设平面(或直线,空间)上有一区域 S,区域 $A \subset S$,在区域 S 内任意投掷一点,假设该点落在任意一点处都是等可能的,并且落在区域 S 的任何部分 A 内的概率,只与这部分的面积成正比例,而与其位置与形状无关.

(2) 概率的几何定义

在几何概型中,在区域 S 内任意投掷一点,而落在区域 A 内的概率为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}.$$

这里，$L(A)$ 与 $L(S)$ 表示平面上相应区域的面积(或直线上区间的长度，空间中区域的体积).

4. 概率的公理化定义

设试验 E 的样本空间为 S，每一个事件 $A \subset S$ 对应一个数 $P(A)$，称为 A 的概率，必须满足下面三条公理：

(1)(非负性) $P(A) \geqslant 0$；

(2)(规范性) $P(S)=1$；

(3)(可列可加性) 对于任意可列个互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i} P(A_i).$$

四、概率的计算

1. 概率的基本运算公式(加法公式)

(1) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；

(2) $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(3) $P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B\overline{A})$；

(4) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$.

2. 概率的乘法公式

(1) 条件概率

设 A, B 为两事件，且 $P(A)>0$，在事件 A 已发生的条件下，事件 B 发生的概率称为事件 B 在给定事件 A 下的条件概率，记作 $P(B \mid A)$.

(2) 概率的乘法公式

若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B \mid A)$；

若 $P(AB)>0$，则 $P(ABC)=P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB)$；

一般地，若 $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)>0$，则

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

(3) 事件的相互独立性

① 对于任意事件 A、B，若 $P(A)>0$，有 $P(B \mid A)=P(B)$ 成立，则称事件 A 与事件 B 相互独立；

② 事件 A 与事件 B 相互独立的充分必要条件是 $P(AB)=P(A)P(B)$；

③ 若事件 A 与事件 B 相互独立,则 A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

3. 全概率公式与贝叶斯(Bayes)公式

(1) 全概率公式

如果事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成完备事件组,且 $P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$,则对于任意事件 B,有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i).$$

(2) 贝叶斯公式(逆概公式)

如果事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成完备事件组,且 $P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$,则对于任一具有正概率的事件 B,有

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i)}, k = 1, 2, \cdots, n.$$

例 题 解 析

例 1 写出下列随机试验的样本空间及代表所述事件的子集:

(1) 袋中装有红、黑、白色球各 3 个,同一种颜色的 3 个球分别标有号码 1, 2, 3,从袋中任取一球.

A:"取到红球"; B:"取到的不是 3 号球".

(2) 相继掷一枚硬币两次.

A:"第一次出正面"; B:"第二次出反面"; C:"两次出同一面".

解 (1) 以 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 依次代表标号为 1, 2, 3 的红球,以 $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ 依次代表标号为 1, 2, 3 的黑球, 以 $\omega_7, \omega_8, \omega_9$ 依次代表标号为 1, 2, 3 的白球. 依题设即有

$$S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9\},$$
$$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}.$$

由于取到的不是 3 号球也就是取到的是 1 号或 2 号球,因此

$$B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_7, \omega_8\}.$$

(2) 以 ω_1 表示第一次出正面,第二次也出正面,以 ω_2 表示第一次出正面,第二次出反面,以 ω_3 表示第一次出反面,第二次出正面,以 ω_4 表示第一次出反面,第二次出反面. 依题设即有

$$S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$
$$A = \{\omega_1, \omega_2\}, B = \{\omega_2, \omega_4\}, C = \{\omega_1, \omega_4\}.$$

例 2 化简下列事件的表示式:

(1) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$;

(2) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$;

(3) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

解 (1) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup AB \cup A\overline{B} \cup B\overline{B}$ (分配律)

$= A$ $(AB \cup A\overline{B} = A, B\overline{B} = \varnothing)$

(2) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap (\overline{A} \cup B)$ (利用(1)的结果)

$= A\overline{A} \cup AB$ (分配律)

$= AB.$ $(A\overline{A} = \varnothing)$

(3) $(A \cup B) \cap (B \cup C) = AB \cup B \cup AC \cup BC$ (分配律)

$= B \cup AC.$ $(AB \cup BC \subset B)$

例 3 证明下列关于事件的等式:

(1) $A \cup B = A \cup (B\overline{A})$;

(2) $(A - B) \cup (B - A) = \overline{(AB) \cup (\overline{A} \cdot \overline{B})}$;

(3) $B - A = \overline{A}B - \overline{\overline{A}B}$.

证明 (1) $A \cup B = (A \cup B) \cap S = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})$

$= A \cup AB \cup B\overline{A}$ $(A\overline{A} = \varnothing)$

$= A \cup B\overline{A}.$ $(AB \subset A)$

(2) $\overline{(AB) \cup (\overline{A} \cdot \overline{B})} = \overline{AB} \cap \overline{(\overline{A} \cdot \overline{B})}$ (对偶律)

$= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup B)$ (对偶律)

$= \overline{A}A \cup \overline{B}A \cup \overline{A}B \cup \overline{B}B$ (分配律)

$= A\overline{B} \cup B\overline{A}$ $(A\overline{A} = B\overline{B} = \varnothing)$

$= (A - B) \cup (B - A).$

(3) $\overline{A}B - \overline{\overline{A}B} = (\overline{A}B) \cap (\overline{A}B) = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A}B)$ (对偶律)

$= \overline{A}B.$ (分配律, $B\overline{B} = \varnothing$)

例 4 设 A, B, C 表示三个随机事件,试用事件的运算表示下列随机事件.

(1) A 发生而 B, C 都不发生;

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生;

(3) A, B, C 三个事件都发生;

(4) A, B, C 三个事件至少有一个发生;

(5) A, B, C 三个事件至少有两个发生;

(6) A, B, C 三个事件都不发生;

(7) A, B, C 不多于一个发生;

(8) A, B, C 不多于两个发生;

(9) A, B, C 恰有两个发生.

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $(A - B) - C$;

(2) $AB\overline{C}$；

(3) ABC；

(4) $A\cup B\cup C$；

(5) $AB\cup BC\cup AC$；

(6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$；

(7) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；

(8) $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；

(9) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.

注 复合事件常用"恰有"，"只有"，"至多"，"至少"，"都发生"，"都不发生"，"不都发生"等词来描述，为了准确地用一些简单事件的运算来表示出复合事件，必须弄清楚这些概念的含义. 随机事件可以根据定义直接表示出来，也可以用其逆事件的逆事件来表示. 如(4)和(6)是互逆事件，因此(6)可以用 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 表示，也可以用 $\overline{A\cup B\cup C}$ 表示. 在(9)中"恰有两个发生"的含义是若有两个事件发生，则第三个事件就不能发生，因此与(5)有区别，可以用 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$ 表示，也可以用 $AB\cup BC\cup AC-ABC$ 来表示. 在一些情况下，需要将事件表示成互不相容事件的和，这样在计算概率时会容易些.

例 5 对于同时投掷甲、乙两枚硬币的试验，试回答下列问题：

(1) 写出题设试验下的样本空间 S；

(2) 若记 $A=\{$甲、乙硬币均正面朝上$\}$，则其对立事件 $\overline{A}=\{$甲、乙硬币都不是正面朝上$\}$，对吗？为什么？

解 设 $B=\{$甲币正面朝上$\}$，$C=\{$乙币正面朝上$\}$.

(1) $S=\{BC, B\overline{C}, \overline{B}C, \overline{B}\,\overline{C}\}$；

(2) 不对. 因为 $A=\{BC\}$，其对立事件应为"甲、乙硬币不都正面朝上"，也可以说成"至少有一反面朝上"，即 $\overline{A}=\{B\overline{C}, \overline{B}C, \overline{B}\,\overline{C}\}$.

例 6 在金融系的学生中任选一名学生，令事件 A 表示被选学生是男生，事件 B 表示该生是二年级学生，事件 C 表示该生是校篮球队的队员.

(1) 叙述事件 $AB\overline{C}$ 的意义.

(2) 在什么条件下 $ABC=C$ 成立？

(3) 什么时候关系式 $C\subset B$ 是正确的？

(4) 什么时候 $\overline{A}=B$ 成立？

解 (1) 该生是二年级的男生，不是校篮球队队员.

(2) 在金融系的校篮球队员都是二年级男生的条件下 $ABC=C$ 成立.

(3) 在金融系的校篮球队员全是二年级学生时 $C\subset B$ 是正确的.

(4) 当金融系二年级学生都是女生，而其他年级都是男生时，$\overline{A}=B$.

例 7 "事件 A, B, C 两两互斥"与"$ABC=\varnothing$"是不是一回事？并说明它们的联系.

解 不是一回事.

"事件 A,B,C 两两互斥"指 A,B,C 三事件中任意两个事件不能同时发生(图 1-1),即 $AB=\varnothing$, $AC=\varnothing$, $BC=\varnothing$ 同时成立. "$ABC=\varnothing$"指 A,B,C 三事件不能同时发生(图 1-2).

它们的联系是:"两两互斥"$\Rightarrow$"$ABC=\varnothing$",反之则未必成立.

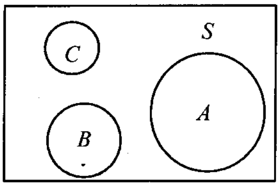


图 1-1

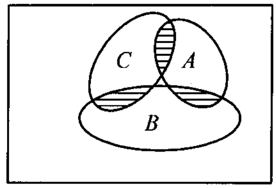


图 1-2

注 明确"两两互斥"与"$ABC=\varnothing$"的区别与联系,有利于正确把握有关运算. 例如,三个事件的加法公式

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC),$$

只有在 A,B,C 两两互斥条件下,才能简化成

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C).$$

若仅有 $ABC=\varnothing$ 成立,则

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC).$$

例 8 如图(1-3)所示的开关电路中,字母 A,B,C,D 分别表示相应开关不闭合的事件. 试用 A,B,C,D 的运算表示事件{灯亮}与{灯不亮},并用对偶律验证其结果.

解 记 $E=\{灯亮\}$,于是

$$E=\overline{A}\cdot\overline{B}\cup\overline{C}\cup\overline{D},$$
$$\overline{E}=(A\cup B)CD,$$

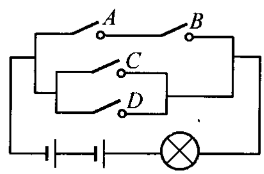


图 1-3

按对偶律,有

$$\overline{E}=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cup\overline{C}\cup\overline{D}}=(\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}})\overline{\overline{C}}\cdot\overline{\overline{D}}=(A\cup B)CD.$$

例 9 100 件外形完全相同的产品,其中 40 件为一等品,60 件为二等品. 设 A:"从 100 件产品中任取一件,连续抽取三次,所得三件均为一等品". 试求在下列两种情况下事件 A 的概率.

(1) 每次取出一件,经测试后放回,再继续抽取下一件(有放回抽样);

(2) 每次取出一件,经测试后不放回,在余下的产品中继续抽取下一件(无放回抽样).

解 (1) 有放回抽样的每次抽取都是在相同的条件下进行,这是一个重复排列问

题，故随机试验的基本事件总数 $n=100^3$. 事件 A 要求所抽取的三次均是一等品，故事件 A 所包含的基本事件数 $m=40^3$. 依概率的古典定义，有

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{40^3}{100^3}=0.064.$$

(2) 无放回抽样的第一件是在 100 件中抽取的，第二件是在余下的 99 件中抽取的，第三件是在余下的 98 件中抽取的，所以这是选排列问题，基本事件总数为 $n=A_{100}^3$. 事件 A 包含的基本事件数则是在 40 件一等品中任取三件的排列数，即 $m=A_{40}^3$. 依古典概率的定义，有

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A_{40}^3}{A_{100}^3}=0.061.$$

注 此例是产品的随机抽样问题(即摸球问题)，它与后边例中的分球入盒问题(即分房问题)和随机取数问题是古典概型的三大典型问题. 掌握典型问题的解法有助于举一反三，触类旁通，提高解题的能力.

例 10 设有 n 个人，每个人都等可能地被分配到 N 个房间中的一个房间去住($n\leqslant N$)，求下列事件的概率：

(1) 指定的 n 间房间里各有一人住；

(2) 恰有 n 间房各有一人；

(3) 某一指定的房中恰有 m 个人($m\leqslant n$).

解 E：将 n 个人等可能地分配到 N 间房中去. S 含有 N^n 个基本事件(每一个人分配到 N 间房中去都有 N 种方法，这里没有限制每间房住多少人).

设 $A=\{$指定的 n 间房里各有一人住$\}$，

$B=\{$恰有 n 间房各有一人$\}$，

$C=\{$某一指定的房中恰有 m 个人$\}$.

(1) n 个人要分到指定的 n 间房中去，使每间房各有一人. 第一个人有 n 种住法，第二个人有 $n-1$ 种住法，第三个人有 $n-2$ 种住法，…，最后一间第 n 个人住，所以共有 $n!$ 种住法，即事件 A 包含有 $n!$ 个基本事件，则

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

(2) n 个人分配到 n 间房，并且每间房只有一人，有 $n!$ 种分法，而 n 间房可以从 N 间中任意选取，有 C_N^n 种方法，则

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}.$$

(3) 首先从 n 个人中任选 m 个人分配到指定的某一房间中去，有 C_n^m 种选法. 再把剩下的 $n-m$ 个人分配到 $N-1$ 个房间去的分法有$(N-1)^{n-m}$种. 则

$$P(C)=\frac{C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

注 这是分房问题.在这类问题中,人与房子都是有其特性的.处理实际问题时,要弄清什么是"人",什么是"房",一般不可颠倒.常遇到的分房问题,有 n 个人的生日问题,n 封信装入 n 个信封问题(配对问题),掷 n 个骰子问题.分房问题有时也叫球在盒中的分布问题(如果把人看成球).这类问题在现代统计物理学中有重要的应用.

例 11 在 0,1,2,…,9 中依次取出 4 个数排列在一起,能组成 4 位偶数的概率为多少?

解 设样本空间 $S=\{abcd\mid 0\leqslant a,b,c,d\leqslant 9$ 且 a,b,c,d 互不相等$\}$,则 S 中样本点数 $n=A_{10}^4=5040$.再来计算构成的 4 位偶数的个数为

$$A_9^3C_5^1-A_8^2C_4^1=2520-224=2296,$$

从而所求概率
$$p=\frac{2296}{5040}=0.46.$$

注 此问题是随机取数问题.四位偶数的构成可以这样来考虑,在个位上任取一个偶数,则有 C_5^1 种取法,而千、百、十位上由剩下的 9 个数中任取 3 个排列,共有 A_9^3 种排法.但当 0 排在千位上时不能构成 4 位数,因此要去掉 0 排在千位上的偶数的数目,共有 $A_8^2C_4^1$ 种.

例 12 从一副扑克牌 52 张中任取 5 张,求下列事件的概率:

(1) 5 张牌同一花色;

(2) 3 张牌有同一个点数,另 2 张牌也有相同的另一个点数;

(3) 5 张牌中有 2 个不同的对(没有 3 张牌点数相同);

(4) 5 张牌中有 4 张牌点数相同.

解 从 52 张牌中取 5 张,基本事件总数是 C_{52}^5.

(1) 可设想为先从 4 种花色中取出一种,再在这花色的 13 张牌中取出 5 张牌,因此欲求之概率为

$$\frac{C_4^1C_{13}^5}{C_{52}^5}=\frac{33}{166600}=0.00198.$$

(2) 可设想为先从 13 种点数中取出一种,再从有这一点数的 4 张牌中取 3 张,然后从余下的 12 种点数中再取一种,并从这一点数的 4 张牌中取 2 张,因此欲求之概率为

$$\frac{C_{13}^1C_4^3C_{12}^1C_4^2}{C_{52}^5}=\frac{6}{4165}=0.00144.$$

(3) 可设想为先从 13 种点数中取出 2 种,再从有这 2 种点数的各 4 张牌中各取 2 张,然后从余下的 44 张牌中取出 1 张,因此欲求之概率为

$$\frac{C_{13}^2C_4^2C_4^2C_{44}^1}{C_{52}^5}=\frac{198}{4165}=0.04754.$$