高等学校教学参考书

地球中地震波的传播

[波] A. 汉尼加

地质出版社

高等学校教学参考书

地球中地震波的传播（摘译）

Seismic Wave Propagation in the Earth

编者 〔波〕A.汉尼加
(Andrzej Hanyga)
译者 何樵登 杨宝俊

地质出版社

内 容 简 介

本书是《地球内部物理学和演化》五卷丛书的第二卷。该丛书涉及固体地球物理最重要的问题，吸取了宇宙及行星研究的最新资料，提供描述当代地球动力学过程和演化的最普遍理论。

本书介绍了当代研究地震波传播中所包含的最新和较全面的数学问题。全书共五章（第一章未译），除集中讨论纯弹性地球中应力过剩型点震源及其理论记录的计算方法外，还讨论了地震记录的反演、用地震波研究地核的绕射、各向异性和预应力以及非线性效应，最后介绍了利用频散的体波和面波进行地球物理解释的方法。

高等学校教学参考书
地球中地震波的传播（摘译）
〔波〕A. 汉尼加 编
(A. Hanyga)
何樵登 杨宝俊 译
*
责任编辑 林清湲
地质出版社出版
（北京和平里）
地质出版社印刷厂印刷
（北京海淀区学院路29号）
新华书店总店科技发行所发行
*
开本：787×1092 1/16 印张：15.25 字数：359000
1990年4月北京第一版·1990年4月北京第一次印刷
印数：1—1005册 定价：3.05元
ISBN 7-116-00585-4/P·497

序　言

涉及地震波传播问题的书既有一些入门的专著和教科书（布伦 Bullen, 1963；巴特 Bath, 1968；伯尔里奇 Burridge, 1976；皮兰特 Pilant, 1979），也有一些高级的著作（伊文 Ewing、贾戴茨基 Jardetzky 和普瑞斯 Press, 1957；切尔韦尼 Cerveny 和拉万德拉 Ravindra, 1971）。就后者来说，伊文等的优秀著作对我们现在的要求还不够全面，而切尔韦尼等的书则范围过窄。

本书的目的是提供当代对地震波传播的研究中所包含的数学问题的最新而又较全面的信息。为教学法的原因而把问题简化是属于教科书的范畴，当讨论平面波和线源的某些性质时，我们才偶尔涉及这个范畴。一般我们都试图尽可能多地考虑地球结构的复杂性。

为了逻辑上的一致性，我们集中地讨论纯弹性地球中应力过剩型的标准点震源。介绍了计算这种震源的理论地震图的几种方法。其他的课题包括地震图的反演问题，利用地震波研究地球的结构，地核的绕射等。几个新论题包括预应力和各向异性的系统地讨论以及深入到波传播的非线性效应的简要说明。通过引入变分学的几何方法以及在讨论射线-波前对偶性时的哈密尔顿-雅各比理论，给讨论带来了一些新的活力。这些数学进展使读者能深入地了解射线-波前、旅行时等的特性。读了这本书之后，地球物理工作者会觉察到：高级的数学也可用于解决日常的问题。另一方面，我们假定读者只熟悉包括解析函数和某些超越函数的初等分析，非线性弹性波理论的阐述与参考文献相比已大为简化了。

第四章讨论了包括波型的频散在内的关于体波和面波的一些地球物理解释方法。

A.汉尼加（Andrzej Hanyga）

符　号

a, **b**, **c**	矢量
A, **B**, **V**	矩阵
^{t}**A**	矩阵**A**的转置
A$^+$	伴随矩阵
det**A**	矩阵**A**的行列式
tr**A**	矩阵**A**的迹
a·**b**, ⟨**a**, **b**⟩	矢量**a**，**b**的标量积
R	实数集
C	复数集
Z	整数集
R_+	正数集
Z_+	正整数集
R^n	n个有序数的实数集
B_{km}^{lp}	广义虎克定律的弹性模量，是四阶张量

目录

引言

理论地震学是在考虑了地震记录的有意义的各个方面的最简单地球模型和震源模型的基础之上建立的。就地震波传播而言，对于短的震中距地球可看作是不均匀各向同性弹性的半空间；而对大的震中距则可视为球体。对于许多应用而言，地球可认为是垂向不均匀的而忽略其水平不均匀性，必要时引入水平各向异性和阻尼的校正。

即使纯弹性的地球模型，理论地震图的复杂性也要求利用多种计算方法。因此，当初至是唯一感兴趣的目标时，渐近法和各种近似是令人满意的。在处理一般的不均匀性时，渐近法是最有效的。如果水平各向异性和不均匀性足够小而被看成是微扰的话，在中等震中距处计算全地震图可以用广义射线法。对于大的震中距，面波和其他槽波变为突出，振型展开结果已被证明是最方便的（见第2.4节）。地球的持续自由振荡尤其与那些对于球形地球模型的角变量是周期性的面波有关，这类问题将在《重力和低频地球动力学》一书中讨论。

第一章　地震波传播的渐近理论

1.1　引　言

在地震学所关心的一些情况（极短的波，波前不连续波）下，通过解的形式展开（对波长 $\lambda\to 0$ 的渐近展开，对波前的弗里德兰德展开），地震波传播理论可大大地简化。求解的形式展开包括两个步骤：（1）求信号路径（射线）；（2）求沿射线传播的信号强度。射线和波前的几何结构可根据几何光学表示。由于下列事实大大地提高了该法的实际价值，即地震学家想要知道的第一件事是一些容易识别的信号的走时、震中距和震源深度之间的关系。这些关系是由几何光学提供的，它是提出和解决地震学基本反演问题的手段。这里所说的反演问题就是由体波的观测确定地球不同深度的波速。

对某些目的而言，由渐近展开确定的信号强度是足够精确的。非折射体波的振幅由形式展开的首项很好地表示（WKBJ 近似），至少在波前附近或对极高的频率是如此。首波只出现在次级近似中。振幅为地震学的反演问题提供重要的补充信息。特别是在可能的奇点（尖点，三重量）附近，它们对确定观测的走时曲线的精确形状是有帮助的。奇点由于观测中固有的误差而趋于消失。

渐近法的应用范围相当大，因为它适用于所有种类的不均匀性和各向异性。即使是较复杂的地球模型，渐近解也十分容易求得。为此目的有一些方便的算法，然而，渐近法只

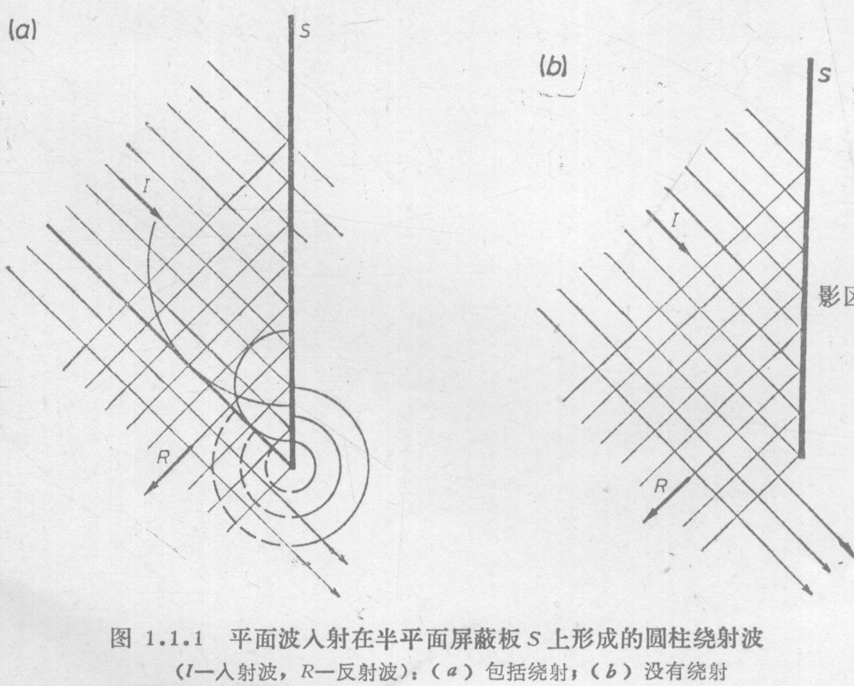

图 1.1.1　平面波入射在半平面屏蔽板 S 上形成的圆柱绕射波

（I—入射波，R—反射波）：（a）包括绕射；（b）没有绕射

提供频率域的解（对大的 ω）和孤立波前的强度。当要计算完整的地震图的形状时需要另外的方法（见第二章）。但是，这里所讨论的方法主要对于至多只有微小横向不均匀的垂向不均匀介质有效。

本章给出的渐近法正确地描述在照明区（如几何光学定义的，即介质中射线能达到的区域，它的对立物称为阴影区）的波。为了描述阴影区中的波场，必须考虑绕射波（见图1.1.1）。绕射波沿着造成影区的障碍物表面蠕动的射线传播。影区中或焦散区附近的波场能由将解展开为 ω^{-1} 的非整数幂的级数而获得。因为由地球内核产生的地震波的绕射在确定核-幔分界的问题中不能忽略，我们将在2.2.6节中给出绕射的渐近理论的粗略描述（对$\omega\to\infty$）。更详细的绕射理论参考詹姆斯（James）（1976），巴比奇（Babich）和布尔德列夫（Bul′dyrev）（1972）的著作。

1.2 渐近展开和WKBJ近似

1.2.1 快速振动解的渐近展开：射线、波前和传输方程

对于一个静预受力结构，令在不均匀的可能各向异性弹性体内的波场由位移 $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ 表示。假定波动 $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ 不是由任何体荷载造成的（在1.5节中将讨论由点源产生的波），并处于线性弹性理论的应用范围内，我们有如下的齐次运动方程：

$$(B_{k\ p}^{l\ q}(\mathbf{x})u^p_{,q})_{,l}=\rho(\mathbf{x})u^k_{,tt} \tag{1.2.1}$$

这里 $u^p_{,q}:=\partial u^p/\partial x^q, u^k_{,tt}:=\partial^2u^k/\partial t^2$，$B$ 为弹性模量等等。我们假设 ρ，$B_{k\ p}^{l\ q}$ 对$\mathbf{x}$连续并可微分。

将正规展开式

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t)\equiv\mathrm{Re}\left\{e^{i\omega S(\mathbf{x},t)}\sum_{n=0}^{\infty}(i\omega)^{-n}\mathbf{u}_n(\mathbf{x},t)\right\},\ i^2=-1 \tag{1.2.2}$$

代入（1.2.1）。如果，$\omega\to\infty$，即在快速变化的相位因子 $e^{i\omega S}$ 的情况下，

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t)=\mathrm{Re}\left\{e^{i\omega S(\mathbf{x},t)}\sum_{n=0}^{N}(i\omega)^{-n}\mathbf{u}_n(\mathbf{x},t)\right\}+O(\omega^{-N-1}) \tag{1.2.3}$$

表达式（1.2.2）是一个渐近展开式。程函 $S(\mathbf{x},t)$ 和系数 $\mathbf{u}_n(\mathbf{x},t)$ 将由方程（1.2.1）确定。

将（1.2.2）代入（1.2.1）并比较方程两边 $(i\omega)^{2-n}e^{i\omega S}$ 的系数，得到下列递推公式：

$$\begin{aligned}&[\mathbf{B}(\mathbf{x},\nabla S)-\rho S_{,t}^{2}\mathbf{E}]_{kl}u_n^l+\{B_{k\ p}^{l\ q}(S_{,q}\partial_l+S_{,l}\partial_q)-2\rho S_{,t}\delta_k^p\partial_t\\&\quad+(B_{k\ p}^{l\ q}S_{,ql}-\rho S_{,tt}\delta_k^p)+B_{k\ p}^{l\ q}{}_{,l}S_{,q}\}u_{n-1}{}^p\\&\quad+\{B_{k\ p}^{l\ q}{}_{,l}\partial_q+B_{k\ p}^{l\ q}\partial_q\partial_l-\delta_k^p\rho\partial_t^2\}u_{n-2}{}^p=0\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

其中 $\partial_q:=\dfrac{\partial}{\partial x^q}$，$\partial_t:=\dfrac{\partial}{\partial t}$，$\mathbf{u}_{-1}\equiv0$，$\mathbf{u}_{-2}\equiv0$，对任意$\mathbf{p}\in R^3$，$B(\mathbf{x},\mathbf{p})_{kp}:\equiv B_{k\ p}^{l\ q}(\mathbf{x})p_lp_q$

$n=0,1,2,\cdots$。考虑到

$$B_{k\ m}^{l\ p}=B_{m\ k}^{p\ l}$$

$$B^{lp}_{km}(\mathbf{x}) a^k a^m n_l n_p > 0, \ \forall \mathbf{a}, \mathbf{n} \neq 0$$

矩阵 $\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ 是正定对称的，它们特征值是 $\rho c_k(\mathbf{x},\mathbf{p})^2 > 0, k=1,\cdots,n \leqslant 3, c_k(\mathbf{x},\mathbf{p}) > 0$。我们选择对应于特征值 c_k 的 $\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ 的右特征向量 $\mathbf{r}_k^{(i)}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ 和左特征向量 $\mathbf{l}^k_{(j)}(\mathbf{x},\mathbf{p})$，$i,j=1,\cdots,S_k$ 并使

$$\langle \mathbf{l}^k_{(j)}(\mathbf{x},\mathbf{p}), \mathbf{r}_k^{(i)}(\mathbf{x},\mathbf{p}) \rangle = \delta^i_j, \quad i,j=1,\cdots,s_k \tag{1.2.5}$$

符号 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示在 R^3 中的普通内积。

把函数 $c_k(\mathbf{x},\mathbf{p})$ 选为 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{x}$ 的连续函数（倘若系数 $B^{lq}_{kp}(\mathbf{x})$ 连续依赖于 $\mathbf{x}$）总是可能的。我们将假定 $\mathbf{r}_k^{(i)}$，$\mathbf{l}^k_{(j)}$ 对 $\mathbf{x},\mathbf{p}$ 连续可微（注：如果对于某些 $l \neq k$ 和对于某些 $\mathbf{x},\mathbf{p}$ 的特定值 $c_k(\mathbf{x},\mathbf{p}) = c_l(\mathbf{x},\mathbf{p})$，这个假定可能不成立）。下列恒等式成立：

$$\det[\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{p}) - \rho c_k(\mathbf{x},\mathbf{p})^2 \mathbf{E}] \equiv 0, \quad k=1,\cdots,n \tag{1.2.6}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{p}) \mathbf{r}_k^{(i)}(\mathbf{x},\mathbf{p}) \equiv \rho(\mathbf{x}) c_k(\mathbf{x},\mathbf{p})^2 \mathbf{r}_k^{(i)}(\mathbf{x},\mathbf{p})$$

$$\text{对于 } i=1,\cdots,s_k,\ \text{所有的 } k \tag{1.2.7}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{p}) \mathbf{l}^k_{(j)}(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \rho(\mathbf{x}) c_k(\mathbf{x},\mathbf{p})^2 \mathbf{l}^k_{(j)}(\mathbf{x},\mathbf{p})$$

$$\text{对于 } j=1,\cdots,s_k \text{ 所有的 } k \tag{1.2.8}$$

由方程（1.2.6）得 $\forall \lambda > 0$，对某些 l 值 $c_k(\mathbf{x},\lambda\mathbf{p}) = \lambda c_l(\mathbf{x},\mathbf{p})$。令 $\lambda \to 1$，考虑到 c_k 的连续性，我们得到 c_k 是 $\mathbf{p}$ 的正齐性函数：

$$c_k(\mathbf{x},\lambda\mathbf{p}) \equiv \lambda c_k(\mathbf{x},\mathbf{p}), \quad \forall \lambda > 0 \tag{1.2.9}$$

我们采用下列的缩写符：

$$\nabla S := [\partial_1 S, \partial_2 S, \partial_3 S], \quad \tilde{\nabla} S := [\partial_t S, \partial_1 S, \partial_2 S, \partial_3 S],$$

$$\tilde{p} = [p_0, p_1, p_2, p_3]$$

和

$$\mathbf{M}(\mathbf{x},\tilde{p}) :\equiv \mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{p}) - \rho p_0^2 \mathbf{E} \tag{1.2.10}$$

方程（1.2.4）可写成紧凑的形式

$$\mathbf{M}(\mathbf{x},\tilde{\nabla}S)\mathbf{u}_n + \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n-1}) + \mathbf{g}(\mathbf{u}_{n-2}) = 0 \tag{1.2.11}$$

其中 $\mathbf{f},\mathbf{g}$ 表示两个线性微分算子。

对 $n=0$，假定方程（1.2.11）有特殊形式

$$\mathbf{M}(\mathbf{x},\ \tilde{\nabla}S)\mathbf{u}_0 = 0 \tag{1.2.12}$$

假设 $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},t) \neq 0$，我们得出结论：对某些 k 值程函 S 满足哈密尔顿-雅各比方程

$$S_{,t} = \pm c_k(\mathbf{x},\nabla S) \tag{1.2.13}$$

使用正号或负号。

令 S_k^+, S_k^- 为（1.2.13）的具有相应符号的某些解。令在（1.2.2）中 $S=S_k^+$ 或者 $S=S_k^-$，以及

$$\mathbf{r}_k^{(i)\pm}(\mathbf{x},t) :\equiv \mathbf{r}_k^{(i)}(\mathbf{x},\nabla S_k^\pm(\mathbf{x},t))$$

$$\mathbf{l}^k_{(j)}{}^\pm(\mathbf{x},t) :\equiv \mathbf{l}^k_{(j)}(\mathbf{x},\nabla S_k^\pm(\mathbf{x},t)) \tag{1.2.14}$$

我们显然有

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^{S_k} g_k^{(i)\pm}(\mathbf{x},t)(\mathbf{r}_k^{(i)})^\pm(\mathbf{x},t) \tag{1.2.15}$$

式中取适当的符号和某些系数 $g_k^{(i)\pm}$。

对 $n=1$，$S=S_k^+$ 或 S_k^- 以及由（1.2.15）式给出的 $\mathbf{u}_0$，（1.2.11）方程可解的必要条件

是假定S_k个线性微分方程组

$$\langle \mathbf{l}^k_{(j)}{}^{\pm}(\mathbf{x},t),\ \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)\rangle=0,\quad j=1,\cdots,s_k \tag{1.2.16}$$

由此式可确定迄今未知的函数 $g_k^{(i)\pm}(\mathbf{x},t)$，$i=1,\cdots,s_k$。方程（1.2.16）由恒等式 $\mathbf{M}(\mathbf{x},\tilde{p})\mathbf{l}^k_{(j)}(\mathbf{x},\mathbf{p})=0, j=1,\cdots,s_k$ 得到。

现在更详细地探讨微分算子（1.2.16）。我们用下列初值问题

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mp c_{k,p}(\mathbf{x},\nabla S(\mathbf{x},t)),\ \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y},0)=\mathbf{x}_0(\mathbf{y}) \tag{1.2.17}$$

定义曲线汇 $t \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y},t)$，式中$y$定义在$R^3$中的$\Omega$域，$\det[\partial\mathbf{x}_0/\partial\mathbf{y}]\neq 0$，对上面的符号，$S=S_k^+$，对下面的符号 $S=S_k^-$。我们称曲线 $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y},\cdot)$ 为与波前族 $S(\mathbf{x},t)=\alpha\in R$ 对应的射线。

微分算子 f 可写成下列形式：

$$\mathbf{f}(\mathbf{u})=\mathbf{M}_{,p_\alpha}(\mathbf{x},\tilde{\nabla}S)\ \partial_\alpha\mathbf{u}+\frac{1}{2}\mathbf{M}_{,p_\alpha p_\beta}(\mathbf{x},\tilde{\nabla}S)\partial_\alpha\partial_\beta S\mathbf{u}+[B^{l\,q}_{k\,p,l}S_{,q}u^p] \tag{1.2.18}$$

（遍及 $\alpha,\beta=0,1,2,3,\partial_0=\partial_t,\mathbf{M}_{,p\alpha}:=\partial\mathbf{M}/\partial p_\alpha$）。

现在分别对 $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=g(\mathbf{x},t)(\mathbf{r}_k^{(i)})^{\pm}(\mathbf{x},t)$，$S=S_k^{\pm}$计算表达式$\langle\mathbf{l}^k_{(j)}{}^{\pm},\mathbf{f}(\mathbf{u})\rangle$。先计算表达式

$$\langle\mathbf{l}^k_{(j)}{}^{\pm}(\mathbf{x},t),\ \mathbf{M}_{,p\alpha}(\mathbf{x},\tilde{\nabla}S_k^{\pm})\mathbf{r}_k^{(i)\pm}(\mathbf{x},t)\rangle\partial_\alpha g$$

对于 $p_0=\pm c_k(\mathbf{x},\mathbf{p})$ 将恒等式

$$\mathbf{M}(\mathbf{x},\tilde{p})\mathbf{r}_k^{(i)}(\mathbf{x},\mathbf{p})\equiv 0 \tag{1.2.19}$$

对 $\mathbf{p}$ 微分，并用向量 $\mathbf{l}^k_{(j)}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ 缩写其结果，对相应地满足 $dp_0=\pm c_{k,p}\cdot d\mathbf{p}$ 的任意 $d\tilde{p}$，得到恒等式

$$\langle\mathbf{l}^k_{(j)}(\mathbf{x},\mathbf{p}),\mathbf{M}_{,\tilde{p}}(\mathbf{x},\tilde{p})\mathbf{r}_k^{(i)}(\mathbf{x},\mathbf{p})\rangle\cdot d\tilde{p}=0 \tag{1.2.20}$$

利用（1.2.5），如果$p_0=\pm c_k(\mathbf{x},\mathbf{p})$ 容易得到

$$\langle\mathbf{l}^k_{(j)}(\mathbf{x},\mathbf{p}),\mathbf{M}_{,\tilde{p}}(\mathbf{x},\tilde{p})\mathbf{r}_k^{(i)}(\mathbf{x},\mathbf{p})\rangle=-2\rho p_0[1,\mp c_{k,p}]'$$

将 $\tilde{p}=\nabla\tilde{S}$ 代入，由于（1.2.17），分别对应于$S=S_k^+$和$S=S_k^-$，得

$$\langle\mathbf{l}^k_{(j)}(\mathbf{x},\nabla S),\mathbf{M}_{,p\alpha}(\mathbf{x},\tilde{\nabla}S)\mathbf{r}_k^{(i)}(\mathbf{x},\nabla S)\rangle\partial_\alpha g$$

$$=\mp 2\rho c_k(\mathbf{x},\nabla S)\ \frac{d}{dt}g(\mathbf{x},t),\ i,j=1,\cdots,s_k$$

$$\frac{d}{dt}:=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \tag{1.2.21}$$

算子$\dfrac{d}{dt}$表示沿着对应于波前 $S_k^+=\mathrm{const}$ 和 $S_k^-=\mathrm{const}$的射线的微商。

由于方程（1.2.13）

$$S^{\pm}_{k,tt}=\pm c_{k,p}\cdot\nabla S^{\mp}_{k,t}$$

$$=c_{k,p}\cdot\nabla c_k(\mathbf{x},\nabla S_k^{\mp}(\mathbf{x},t))=c_{k,p}\cdot c_{k,x}+c_{k,p_a}c_{k,p_b}\partial_a\partial_b S_k^{\pm}$$

（遍及 $a,b=1,2,3$ 求和，在右边 $\mathbf{p}=\nabla S_k^{\pm}$）。所以

$$\frac{1}{2}\mathbf{M}_{,p_\alpha p_\beta}\partial_\alpha\partial_\beta S_k^{\pm}=\mathbf{B}(\nabla)S_k^{\mp}-\rho c_{k,p_a}c_{k,p_b}\partial_a\partial_b S_k^{\pm}\mathbf{E}-\rho c_{k,p_a}c_{k,x^a}\mathbf{E} \tag{1.2.22}$$

其中 $\mathbf{B}(\nabla)S:=\frac{1}{2}\mathbf{B}_{,p_ap_b}\partial_a\partial_b S$.

将恒等式（1.2.19）对$\mathbf{p}$两次微分并用$\mathbf{l}^k_{(j)}(\mathbf{x},\mathbf{p})$简化其结果，得到恒等式

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{l}^k_{(j)}{}^{\pm}, \mathbf{B}(\nabla)S^{\pm}_k \mathbf{r}_k^{(i)\pm}\rangle = & \frac{1}{2}\rho\frac{\partial^2 c_k^2}{\partial p_a \partial p_b}\delta^i_j\partial_a\partial_b S^{\pm}_k \\
& -\langle \mathbf{l}^k_{(j)}{}^{\pm}, B_{,p(_a}\mathbf{r}_k^{(i)}{}_{,p_b)}(\mathbf{x},\nabla S^{\mp}_k)\rangle\partial_a\partial_b S^{\pm}_k \\
& +\langle \mathbf{l}^k_{(j)}{}^{\pm}, \mathbf{r}_k^{(i)}{}_{,p(_a}\rangle\frac{\partial c_k^2}{\partial p_{b)}}\partial_a\partial_b S^{\pm}_k
\end{aligned}
\tag{1.2.22a}
$$

其中$\mathbf{p}=\nabla S^{\pm}_k$。因为

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{l}^k_{(j)}{}^{\pm}, \mathbf{M}_{,p_a}\partial_a \mathbf{r}_k^{(i)\pm}\rangle = & \langle \mathbf{l}^k_{(j)}{}^{\pm}, \mathbf{B}_{,p_a}(\nabla S^{\pm}_k)\mathbf{r}_k^{(i)}{}_{,x^a}(\mathbf{x},\nabla S^{\pm}_k)\rangle \\
& +\langle \mathbf{l}^k_{(j)}{}^{\pm}, \mathbf{B}_{,p_a}(\nabla S^{\pm}_k)\mathbf{r}_k^{(i)}{}_{,p_b}(\mathbf{x},\nabla S^{\pm}_k)\rangle\partial_a\partial_b S^{\pm}_k \\
& -2\rho c_k\langle \mathbf{l}^k_{(j)}{}^{\pm}, \mathbf{r}_{k,p_a}\rangle[c_{k,x^a}(\mathbf{x},\nabla S^{\pm}_k)+c_{k,p_b}(\mathbf{x},\nabla S^{\pm}_k)\partial_a\partial_b S^{\pm}_k]
\end{aligned}
$$

有

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{l}^k_{(j)}{}^{\pm}, \mathbf{f}(\mathbf{u})\rangle = & \mp 2\rho c^{\pm}_k\frac{\mathrm{d}g^{(j)}}{\mathrm{d}t}+\sum_i g^{(i)}\{\langle(\mathbf{l}^k_{(j)})^{\pm}, \mathbf{B}_{,p_a}(\nabla S^{\pm}_k)(\mathbf{r}_k^{(i)}{}_{,x^a})^{\pm}\rangle \\
& -2\rho c^{\pm}_k\langle \mathbf{l}^k_{(j)}{}^{\pm}, (\mathbf{r}_k^{(i)}{}_{,p_a})^{\pm}\rangle(c_{k,x^a})^{\pm}\}+\rho c^{\pm}_k(c_{k,p_ap_b})^{\pm}\partial_a\partial_b S^{\pm}_k g^{(j)} \\
& -\rho(c_{k,p_a})^{\pm}(c_{k,x^a})^{\pm}g^{(j)}+\sum_i(\mathbf{l}^k_{(j)}{}^{\pm})^m B^{l\,q}_{mp,l}S^{\pm}_{k,q}(\mathbf{r}_k^{(i)\pm})^p g^{(i)}
\end{aligned}
\tag{1.2.23}
$$

方程（1.2.23）中的上标加号和减号分 别表示代入$\mathbf{p}=\nabla S^{+}_k$和$\mathbf{p}=\nabla S^{-}_k$。

令$\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y},t)$，是（1.2.17），的一个解，并令

$$
J(t,\mathbf{y}):\equiv\det\left[\frac{\partial\tilde{x}^k}{\partial y^l}\right]
\tag{1.2.24}
$$

根据我们关于初始数据的假定，对于足够小的 t

$$
J(t,\mathbf{y})\neq 0
\tag{1.2.25}
$$

在有界集Ω的情况下，对于所有$t<T$和所有的$\mathbf{y}\in\Omega$,有一个数$T>0$使（1.2.25）成立。

现在计算$\mathrm{d}J(t,\mathbf{y})/\mathrm{d}t$。对一个依赖于参数$t$的任意可逆矩阵$\mathbf{A}=[A^i_k(t)]$，有

$$
\begin{aligned}
(\mathring{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1})\text{ 的迹} & =\mathring{\mathbf{A}}^i_k(A^{-1})^k_i=\varepsilon_{ki_2\cdots i_n}\varepsilon^{ii_2\cdots i_n}\mathring{\mathbf{A}}^i_k A^{i_2}{}_{j_2}\cdots A^{i_n}{}_{j_n}\frac{(\det\mathbf{A})^{-1}}{(n-1)!} \\
& =\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(\det\mathbf{A})
\end{aligned}
\tag{1.2.26}
$$

这里$\mathring{\mathbf{A}}=\mathrm{d}\mathbf{A}/\mathrm{d}t$，$\varepsilon^{i_1\cdots i_n}=\varepsilon_{i_1\cdots i_n}=\pm 1$，如果$\{i_1,\cdots,i_n\}$是$\{1,\cdots,n\}$的偶/奇排列；否则$\varepsilon^{i_1,\cdots,i_n}=\varepsilon_{i_1,\cdots,i_n}=0$。导出（1.2.26）时，利用了行列式的定义

$$
\varepsilon_{ki_2\cdots i_n i}A^k_j A^{i_2}{}_{j_2}\cdots A^{i_n}{}_{j_n}=\det\mathbf{A}\,\varepsilon_{jj_2\cdots j_n}
\tag{1.2.27}
$$

它直接蕴涵对逆矩阵$\mathbf{A}^{-1}$的如下公式：

$$
(\mathbf{A}^{-1})^i_k=\frac{1}{(n-1)!}\varepsilon_{ki_2\cdots i_n}A^{i_2}{}_{j_2}\cdots A^{i_n}{}_{j_n}(\det\mathbf{A})^{-1}\varepsilon^{ij_2\cdots j_n}
\tag{1.2.28}
$$

根据（1.2.17）和（1.2.26），有

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln J(t,\mathbf{y})=\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\frac{\partial^2\tilde{x}^i}{\partial y^a\partial t}=\frac{\partial f^i}{\partial x^i}(\mathbf{x},t)
\tag{1.2.29}
$$

其中 $f^{i}(\mathbf{x},t):\equiv c_{k,p_i}(\mathbf{x},\nabla S_k^{\pm}(\mathbf{x},t))$。所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln J(t,\mathbf{y})=\mp\left\{\left(-\frac{\partial^2 c_k}{\partial p_i\partial x^i}\right)^{\pm}+\left(\frac{\partial^2 c_k}{\partial p_i\partial p_j}\right)^{\pm}\partial_i\partial_j S_k^{\pm}\right\} \tag{1.2.30}$$

把方程（1.2.30）代入（1.2.23），得到对系数函数 $g_k^{(j)\pm}$ 的传输方程：

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{l}^k_{(j)}{}^{\pm},\ \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)\rangle \equiv \rho\Big\{&\mp c_k^{\pm}\frac{\mathrm{d}\ln(J(g_k^{(j)\pm})^2)}{\mathrm{d}t}\\ &-[(c_{k,p_i x^i})^{\pm}c_k^{\pm}-(c_{k,p_i})^{\pm}(c_{b,x^i})^{\pm}]\Big\}g_k^{(j)\pm}\\ &+\sum_{i=1}^{S_k}\{\langle \mathbf{l}^k_{(j)}{}^{\pm},\mathbf{B}_{,p_a}(\nabla S_k^{\pm})(\mathbf{r}_k^{(i)}{}_{,x^a})^{\pm}\rangle-2\rho c_k^{\pm}c_{k,x^a})^{\pm}\langle \mathbf{l}^k_{(j)}{}^{\pm},(\mathbf{r}_k^{(i)}{}_{,p_a})^{\pm}\rangle\\ &+(\mathbf{l}^k_{(j)}{}^{\pm})^m B^{l\,q}_{mp,l}S^{\pm}_{k,q}(\mathbf{r}_k^{(i)\pm})^p\}(g_k^{(i)})^{\pm}=0,\ j=1,\cdots,s_k\end{aligned} \tag{1.2.31}$$

1.2.2 初值问题的渐近解

我们要描述对有初始数据

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x},\ 0)&=\mathrm{e}^{i\omega S_0(\mathbf{x})}\{\mathbf{u}_0(\mathbf{x})+(i\omega)^{-1}\mathbf{u}_1(\mathbf{x})+\cdots\}\\ \mathbf{u}_{,t}(\mathbf{x},\ 0)&=i\omega\mathrm{e}^{i\omega S_0(\mathbf{x})}\{\mathbf{v}_0(\mathbf{x})+(i\omega)^{-1}\mathbf{v}_1(\mathbf{x})+\cdots\}\end{aligned} \tag{1.2.32}$$

的无界介质求解方程（1.2.1）的方法。

令 $S_k^{\pm}(\mathbf{x},t)$ 是有初始条件 $S_k^{\pm}(\mathbf{x},0)=S_0(\mathbf{x})$ 的条件下哈密尔顿-雅各比方程（1.2.13）的一个解。并令

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x})=\sum_k\sum_{i=1}^{S_k}a_k^{(i)}(\mathbf{x})\mathbf{r}_k^{(i)}(\mathbf{x},\nabla S_0(\mathbf{x}))$$

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x})=\sum_k\sum_{i=1}^{S_k}b_k^{(i)}(\mathbf{x})c_k(\mathbf{x},\nabla S_0(\mathbf{x}))\mathbf{r}_k^{(i)}(\mathbf{x},\nabla S_0(\mathbf{x})) \tag{1.2.33}$$

因为 $c_k>0$ 和向量 $\mathbf{r}_k^{(i)}(\mathbf{x},\nabla S_0(\mathbf{x}))$ 跨越 R^3，方程（1.2.33）可对 $a_k^{(i)}$，$b_k^{(i)}$，$i=1,\cdots,s_k$，$k=1,2,\cdots$ 求解。

令

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\equiv&\mathrm{Re}\sum_{k,i,\pm}\mathrm{e}^{i\omega S_k^{\pm}(\mathbf{x},t)}g_k^{(i)\pm}(\mathbf{x},t)\mathbf{r}_k^{(i)\pm}(\mathbf{x},t)\\ &+\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}(i\omega)^{-n}\sum_{k,\pm}\mathbf{u}^{\pm}_{n,k}(\mathbf{x},t)\ \mathrm{e}^{i\omega S_k{}^{\pm}(\mathbf{x},t)}\end{aligned} \tag{1.2.34}$$

从（1.2.34）和（1.2.33），对方程（1.2.31）有初始数据

$$\begin{aligned}\bar{g}_k^{(i)+}(\mathbf{y},0)+\bar{g}_k^{(i)-}(\mathbf{y},0)&=a_k^{(i)}(\mathbf{y})\\ \bar{g}_k^{(i)+}(\mathbf{y},0)-\bar{g}_k^{(i)-}(\mathbf{y},0)&=b_k^{(i)}(\mathbf{y}),\ \mathbf{y}\in R^3\end{aligned} \tag{1.2.35}$$

初值问题（1.2.31），（1.2.35）有唯一解 $\{\bar{g}_k^{(i)\pm}(\mathbf{y},t),\ i=1,\cdots,s_k\}$。令 $\widetilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y},t)$ 为具有初值 $\mathbf{x}_0(\mathbf{y})=\mathbf{y}$ 的（1.2.17）的唯一解。对充分小的 t 方程 $\mathbf{x}=\widetilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y},t)$ 反演，得到 $\mathbf{y}=\widetilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x},t)$。令

$$g_k^{(i)\pm}(\mathbf{x},t)\equiv\bar{g}_k^{(i)\pm}(\widetilde{g}(\mathbf{x},t),t)$$

因此，得到零级近似（WKBJ近似）：

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x},t)\equiv\sum_{k,i,\pm} g_k^{(i)\pm}(\mathbf{x},t)\,e^{i\omega S_k^{\pm}(\mathbf{x},t)}\mathbf{r}_k^{(i)\pm}(\mathbf{x},t) \tag{1.2.36}$$

容易看出$\mathbf{u}_0$满足（1.2.12）和（1.2.15）。

现在假设对所有的$k,i,\pm$，已确定前n项

$$\mathbf{u}_m=\sum_{k,\pm} e^{i\omega S_k^{\pm}}\,\mathbf{u}_{m,k}^{\pm}$$

$$\mathbf{u}_{m,k}^{\pm}(\mathbf{x},t)\equiv\sum_{l,i\pm} g_{m;k;l}^{(i)\pm}(\mathbf{x},t)\mathbf{r}_l^{(i)}(\mathbf{x},\nabla S_k^{\pm}),\quad m=0,1,2,\cdots,n-1 \tag{1.2.37}$$

和

$$\langle \mathbf{l}_{(i)}^{k}(\mathbf{x},\nabla S_k^{\pm}(\mathbf{x},t)),\ \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n-1,k})+\mathbf{g}(\mathbf{u}_{n-2,k})\rangle=0 \tag{1.2.38}$$

令

$$\mathbf{u}_n=\sum_k e^{i\omega S_k^{\pm}}\mathbf{u}_{n,k}^{\pm},\quad \mathbf{u}_{n,k}^{\pm}=\sum_{l;i} h_{k;l}^{l;\pm}\mathbf{r}_l^{(i)}(\mathbf{x},\nabla S_k^{\pm}(\mathbf{x},t))$$

用$\mathbf{l}_{(i')}^{k'}(\mathbf{x},\nabla S_k^{\pm})$，$k'\neq k$缩写方程

$$\mathbf{M}(\mathbf{x},\tilde{\nabla}S_k^{\pm})\mathbf{u}_{n,k}^{\pm}+\mathbf{f}(\mathbf{u}_{n-1,k}^{\pm})+\mathbf{g}(\mathbf{u}_{n-2,k}^{\pm})=0 \tag{1.2.11a}$$

并利用方程（1.2.5），（1.2.8）和（1.2.15），对所有的$k'\neq k$，i'，$\pm$得到

$$\begin{aligned}h_{k;i'}^{k';\pm}\equiv&\{\rho[c_{k'}(\mathbf{x},\nabla S_k^{\pm})^2-c_k(\mathbf{x},\nabla S_k^{\pm})^2]\}^{-1}\\&\times\langle \mathbf{l}_{(i')}^{k'}(\mathbf{x},\nabla S_k^{\pm}),\ \mathbf{f}(u_{n-1,k}^{\pm})+\mathbf{g}(\mathbf{u}_{n-2,k}^{\pm})\rangle\end{aligned} \tag{1.2.39}$$

于是，根据（1.2.34），方程（1.2.11a）的解$\mathbf{u}_{n,k}^{\pm}$假定为以下形式：

$$\mathbf{u}_{n,k}^{\pm}=\mathbf{w}_k^{\pm}+\sum_i h_{k;\,i}^{k;\,\pm}\mathbf{r}_k^{(i)\pm}(\mathbf{x},t) \tag{1.2.40}$$

$$\mathbf{w}_k^{\pm}=\mathbf{w}_{k,n}^{\pm}:=\sum_{l(\neq k)}{}'\sum_j h_{k;\,j}^{l;\,\pm}\mathbf{r}_l^{(j)}(\mathbf{x},\nabla S_k^{\pm}) \tag{1.2.41}$$

剩下的是确定系数$h_{k;i}^{k;\pm}=:h_k^{(i)\pm}=h_{k;n}^{(i)\pm}$，它们应由$\mathbf{u}_{n+1,k}^{\pm}$的相容性方程确定：

$$\langle \mathbf{l}_{(j)}^{k\pm},\mathbf{f}(\mathbf{u}_{n,k}^{\pm})+\mathbf{g}(\mathbf{u}_{n-1,k}^{\pm})\rangle=0 \tag{1.2.42}$$

其初始数据为

$$\begin{aligned}&\sum_{k,i}\{\bar{h}_k^{(i)+}(\mathbf{y},0)+\bar{h}_k^{(i)-}(\mathbf{y},0)\}\mathbf{r}_k^{(i)}(\mathbf{y},\nabla S_0(\mathbf{y}))\\&\quad=\mathbf{u}_n(\mathbf{y})-\sum_k\{\bar{\mathbf{w}}_k^{+}(\mathbf{y},0)+\bar{\mathbf{w}}_k^{-}(\mathbf{y},0)\}\end{aligned} \tag{1.2.43}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k,i}c_k(\mathbf{y},\nabla S_0(\mathbf{y}))\{\bar{h}_k^{(i)+}(\mathbf{y},0)-\bar{h}_k^{(i)-}(\mathbf{y},0)\}\mathbf{r}_k(\mathbf{y},\nabla S_0(y))\\&\quad=\mathbf{v}_n(\mathbf{y})-\sum_k c_k(\mathbf{y},\nabla S_0(\mathbf{y}))[\mathbf{w}_k^{+}(\mathbf{y},0)-\mathbf{w}_k^{-}(\mathbf{y},0)]\\&\quad\quad-\sum_k[\bar{\mathbf{u}}_{n-1,k,t}^{+}(\mathbf{y},0)+\bar{\mathbf{u}}_{n-1,k,t}^{-}(\mathbf{y},0)]\end{aligned} \tag{1.2.44}$$

其中

$$\bar{\mathbf{u}}_{n-1,k,t}^{\pm}(\mathbf{y},0):\equiv\sum_i\{\bar{g}_{n-1,k,t}^{(i)\pm}(\mathbf{y},0)\bar{\mathbf{r}}_k^{(i)\pm}(\mathbf{y},0)\pm\bar{g}_{n-1,k}^{(i)\pm}(\mathbf{y},0)$$

$$\times \mathbf{r}_k^{(i)}{}_{,p_a}(\mathbf{y},\nabla S_0(\mathbf{y}))[c_{k,y^a}(\mathbf{y},\nabla S_0(\mathbf{y}))+c_{k,p_b}(y,\nabla S_0(\mathbf{y}))\partial_a\partial_b S_0(\mathbf{y})]\} \tag{1.2.45}$$

显然，方程（1.2.43）和（1.2.44）能对 $h_k^{(i)\pm}(\mathbf{y},0)$ 求解。这些函数然后被用作常微分方程组（1.2.42）的初值。方程（1.2.42）是（1.2.31）的非齐次形式。

对常微分方程组求解一个初值问题可以求得主系数 $h_k^{(i)\pm}$。对 $\mathbf{u}^{\pm}_{n-1,k}$ 和 $\mathbf{u}^{\pm}_{n-2,k}$ 应用某些微分算子可以确定附加系数 $h^{(i)\pm}_{k,l}$，$k\neq l$。

递推地应用上述步骤，将求得在时间区间 $[0,T]$ 中定义的 $\mathbf{u}_n$，使对所有的 $k,\pm,\mathbf{y}$ 而言，$J^{\pm}_k(\mathbf{y},t)\neq 0$。能够证明对于 $k\neq l$ 如果 $c_k(\mathbf{x},\mathbf{p})\neq c_l(\mathbf{x},\mathbf{p})\ \forall\,\mathbf{x},\mathbf{p}$，则形式表达式 $\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{u}_n$ 是真实解的渐近展开（Maslov 和Fedorynk, 1976）。

1.2.3 简谐波的渐近展开

现在，讨论（1.2.1）的简谐解

$$\mathrm{Re}\{\mathbf{u}_+(\mathbf{x})\mathrm{e}^{i\omega t}+\mathbf{u}_-(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\}$$

的渐近展开。$\mathbf{u}_\pm(\mathbf{x})$ 的渐近式可通过把

$$\mathbf{u}_\pm(\mathbf{x})=\sum_k\sum_{n=0}^{\infty}(i\omega)^{-1}\mathrm{e}^{\,i\omega S_k(\mathbf{x})}\,\mathbf{u}^{\pm}_{n,k}(\mathbf{x})$$

代入弹性动力学的简化方程

$$(B^{l\,q}_{k\,p}(\mathbf{x})u^p_{,q})_{,l}+\rho\omega^2u^k=0,\quad k=1,2,3 \tag{1.2.46}$$

而求得。

我们令

$$S^{\pm}_k(\mathbf{x},t)\equiv\pm t+S_k(\mathbf{x}) \tag{1.2.47}$$

利用另外的方法求得对简谐波的渐近公式，作为在 1.2.1 节中导出的解的特殊情况，函数 $S_k(\mathbf{x})$ 满足哈密尔顿-雅各比方程

$$c_k(\mathbf{x},\nabla S_k(\mathbf{x}))=\pm 1 \tag{1.2.48}$$

方程（1.2.48）的特征方程

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\tau}=c_{k,p}(\mathbf{x},\nabla S_k(\mathbf{x})) \tag{1.2.49}$$

定义二参数曲线族 $\tilde{\mathbf{x}}(\tau,u^1,u^2)$，该方程具有初始条件 $\tilde{\mathbf{x}}(0,u^1,u^2)=\mathbf{x}_0(u^1,u^2)$，$(u^1,u^2)\in\Omega\subset R^2$。这些曲线称为波前族 $S_k(\mathbf{x})=\tau$ 的射线（注：因 $\nabla S_k\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\tau}=c_{k,p}\cdot\mathbf{p}=1$，所以在 $\mathbf{x}$ 处 τ 的值是 $\tau=S_k\mathbf{x}(+\tau_0)$。我们要令 $\tilde{J}_k(\tau,u^1,u^2):=\det[\mathbf{x}_\tau,\mathbf{x}_{u^1}\mathbf{x}_{u^2}]$ 并假设 $\tilde{J}_k(0,u^1,u^2)\neq\sigma$。这个不等式是加于起始表面 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0(u^1,u^2)$ 的一个条件。它限定起始表面横截从它发出的射线。由方程（1.2.49）和（1.2.17）表明，波前族 $S^{\pm}_k=\mathrm{const}$ 的射线分别由 $\tilde{\mathbf{x}}(\tau\mp t,u^1,u^2)$ 给出。这些射线的参数 $\mathbf{y}$ 用 (τ,u^1,u^2) 来表示。按照我们的假定，对于充分小的 $t\mp\tau$ 而言 $J(t,\mathbf{y})\neq 0$。因为 $\mathrm{d}\ln J(t,\mathbf{y})/\mathrm{d}t$ 并不依赖于参数 $\mathbf{y}$ 的选择，方程（1.2.30）仍然有效。所以 $\tilde{J}_k(\tau,u^1,u^2)=J(0,\tau,u^1,u^2)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\tilde{J}_k(\tau,u^1,u^2)=\frac{\partial^2c_k}{\partial p_i\partial x^i}+\frac{\partial^2c_k}{\partial p_i\partial p_j}\partial_i\partial_jS \tag{1.2.50}$$

其中 $\mathbf{p}=\nabla S_k$。