当代
杰出青年
科学文库

弹箭通用射表及弹道一致性检验方法

王中原 张领科 编著

科学出版社
www.sciencep.com

当代杰出青年科学文库

弹箭通用射表及弹道一致性检验方法

王中原　张领科　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

同一武器系统中配用不同种类的弹箭对应的通用射表或弹道一致性要求是外弹道学中常遇到的问题。

本书对不同弹箭的通用射表和弹道一致性问题及其在实际中的应用、通用射表对应的弹丸设计方法等内容进行了系统分析和介绍。全书共7章:第1章介绍概率统计基础;第2章介绍射击精度分析和射击精度指标估计方法;第3章介绍现行弹道一致性判据分析和相关数据检验方法;第4章介绍改进的弹道一致性检验判据;第5章介绍多参数弹道一致性综合评定方法;第6章介绍基于射击效果的通用射表判据;第7章介绍通用射表的检验决策与弹丸设计方法。

本书可作为弹道、弹药和弹箭测试研究人员的参考用书,也可作为武器系统应用与工程、火炮等相关专业的研究生的教学用书。

图书在版编目(CIP)数据

弹箭通用射表及弹道一致性检验方法/王中原,张领科编著. —北京:科学出版社,2008

(当代杰出青年科学文库)

ISBN 978-7-03-020268-0

Ⅰ. 弹… Ⅱ. ①王… ②张… Ⅲ. ①导弹-射表射击试验②火箭-射表射击试验③导弹-外弹道试验④火箭-外弹道试验 Ⅳ. TJ013 TJ06

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第035259号

责任编辑:刘宝莉 陈 婕 / 责任校对:钟 洋

责任印制:刘士平 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年4月第 一 版 开本:720×1000 B5

2008年4月第一次印刷 印张:12 1/4

印数:1—2 000 字数:240 000

定价:45.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

前　　言

在外弹道学中，射表、通用射表和弹道一致性等是常见的术语，它们有明确的含义和对应的用途。一般来说，任何一种常规弹箭均需有其配用的射表，它是保证枪、炮进行有效射击的重要文件，也是设计火控指挥仪、瞄准机具等的基本依据。为准确命中目标，枪炮实际射击前均由射表确定出射击诸元；同时，射表也给出了主要飞行弹道诸元。通用射表是指在同一武器系统上配备的两种(或两种以上)弹药，可以共用一个射表。由通用射表的含义可见，它的作用是保障在同一枪炮上采用同一射表装定的射击诸元，不同弹种可以达到相近的射击效果。通用射表限定了一个弹种在有效的弹道段上弹道诸元与射表值之差要较小。弹道一致性是指同一火炮(或枪)武器系统，在气象条件、射击方法等都相同的条件下，发射的两种不同种类炮弹(或枪弹)在飞行弹道上(或某一段飞行弹道上)的平均弹道参数差异不大的性质，换言之，如果两种炮弹的射击试验表明它们的平均弹道参数差异比较小，满足某一界限值，则可认为其满足弹道一致性。由通用射表和弹道一致性的含义可知，尽管满足这两种要求的不同弹种其飞行弹道非常接近，但两者严格意义上说还是有差异的。弹道一致性强调的是射击过程中两种弹的平均弹道参数差异的状况，而通用射表强调的是一种弹射击试验反映出的飞行弹道参数同一表定值差异的状况。

在弹箭武器装备研制中，为满足不同作战要求，提高射击效果，常常在同一火炮上配备多种弹药。对同一火炮，针对某一具体弹种已编制了射表的情况下，根据作战使用和火控设计等方面的需要，往往要求后研制的或配用的新弹种能够同原弹种通用射表。因此，实际中通用射表是同一火炮配备多弹种时常遇到的问题，但对新研制的弹种检验其是否满足通用射表，则面临需确定同射表值差异的允许界限。目前，满足通用射表的确定还无理论方法可依据，实际中有时根据需要确定一界限作为检验依据，而大多数情况下都将检验通用射表问题转化为检验弹道一致性问题来解决(可以说实际中大多数弹道一致性问题原本关注的是通用射表问题)，因为目前国内检验弹道一致性有确定的检验判据(如国家军用标准中的弹道一致性检验判据)，可供在实际中检验操作。

但弹道一致性检验判据作为替代判别通用射表的检验方法，在长期的工程实践中发现其存在一些不足，主要表现在：

(1) 现行弹道一致性检验判据检验结果受弹丸散布影响较大，有时两种弹平均弹着点很近，而将试验数据代入对应的判据检验，结果却不满足弹道一致性，特

别是在某种弹(如新配弹)弹道散布很小的情况下易于出现这种情况。换言之,当新配弹种的散布很小,同原弹种平均弹道较为接近却不满足弹道一致性要求,从通用射表检验思想的本意及射击理论角度考虑,是不合适的。

(2) 现行弹道一致性检验判据检验结果受试验用弹量影响较大,有时出现几组试验数据,每组分别检验计算都满足弹道一致性,但几组合并统一检验却不满足弹道一致性。工程实际应用发现,采用现行检验方法,当试验组数越多、每组试验用弹量越大,检验结果越不容易满足弹道一致性,造成实际应用中对试验用弹量的控制常有不同的看法。虽然现行弹道一致性检验判据中也通过选取不同的置信水平 α 来调节试验组数的影响,然而这样处理一方面并不能完全消除组数变化带来的影响,另一方面如何确定 α 也缺乏理论依据。

正是由于上述原因,现行弹道一致性检验方法在工程实际应用中存在不足已被许多相关研究人员认同。但由于没有更加完善且得到广泛认同的弹道一致性检验判据,实际中对遇到的通用射表检验问题仍广泛采用现行的弹道一致性检验判据。因此,有必要从理论上开展弹箭弹道一致性和通用射表检验方法的研究,为今后完善这些检验方法提供理论基础。

本书内容主要包括:概率统计基础、弹箭射击误差分析和试验数据精度估计、弹道一致性检验方法和判据研究、通用射表检验方法和判据研究、弹道一致性和通用射表检验方法工程应用等内容。

由于水平有限,书中难免存在不足之处,敬请读者批评指正。

王中原　张领科

2008 年 1 月于南京理工大学

目　　录

第1章 概率统计基础

概率统计是研究如何有效地收集、整理和分析受随机因素影响的数据，对所考察的问题做出推断，进而为制定决策和采取行动提供科学依据的一门学科。在常规兵器试验中，数据处理的主要任务是以概率统计理论为工具，对试验数据从统计分析的角度出发，研究试验数据的分布情况；通过假设检验和统计推断，给出相应的结论。当然，弹道一致性分析和弹丸通用射表的界定离不开概率统计的知识。为此，这里对其基本的概念和与本书研究内容联系密切的相关理论进行简单的介绍。

1.1 样本与样本分布

1.1.1 样本与总体

通过观察或试验得到的数据，称为**样本**。例如，从某批炮弹中随机抽取 n 发进行射程射击试验，得到的试验结果为：$X_1, X_2, \cdots, X_n$（单位：km），则它们的全体 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$ 称为样本，它们的观测值为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$。取得样本是提供所研究问题的有关信息，样本就是所研究对象的一批观测值，观测值的数目 n 称为**样本量**，或称样本大小。

从实用的观点看来，样本就是一批已知的数据。但是，数理统计所处理的是含随机性影响的数据，由于样本 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$ 是在总体中随机抽样得到，其取值具有随机性。从概率论观点看来，样本是 n 维随机变量；而表现为已知数字的具体样本，则是这 n 维随机变量的观测值。

一个统计问题有它明确的研究对象，研究对象的全体称为**总体**，总体中的每个成员称为**个体**。例如，研究某批军工产品的质量指标时，这批产品的全体就是总体，每个产品就是个体。然而在统计学研究中，人们关心总体仅仅是关心其每个个体的一项（或几项）数量指标和该数量指标在总体中的分布情况，这时，每个个体具有的数量指标的全体就是总体。由于在样本中每个个体的出现是随机的，所以，相应的数量指标的出现也带有随机性，从而可以把这种数量指标看作是一个随机变量，因此随机变量的分布就是该数量指标在总体中的分布。这样，总体就可以用一个随机变量及其分布来描述。例如，研究某批炮弹的射程时，关心的数量指标就是射程 X，那么，此总体可以用随机变量 X 表示，或用其分布函数 $F(x)$表示。类似

地，在研究武器弹药的射击效能时，关心的是弹丸落点坐标，若用 X 和 Z 分别表示落点的纵向坐标和横向坐标，那么此总体就可用二维随机变量 (X,Z) 或其联合分布函数 $F(x,z)$ 来表示。

1.1.2 样本分布与总体分布

样本 $\boldsymbol{X}$ 既然是 n 维随机变量，就有一定的概率分布，这一概率分布称为**样本分布**。样本分布是样本所受随机性影响的最完整统计描述，它既与总体有关，又与抽样方式有关。抽样方式主要有不放回抽样和放回抽样。从总体中一次同时抽取所需个数的抽样单元，或逐个抽取，且已抽到的单元不放回到总体中去，这种抽样方法称为**不放回抽样**。逐个抽取且每个被抽取到并经观测后的抽样单元，在抽取下一个抽样单元前都必须放回总体中去，这种抽样方法称为**放回抽样**。

从总体中随机抽取一个个体，结果为一随机变量，这个随机变量所有可能取值的集合就是总体各种不同数值全体所构成的集合，这个随机变量的概率分布反映了总体数量指标的分布情况。因此，人们把抽样得到的随机变量的概率分布称为**总体分布**。总体分布定为样本量为 1 的样本分布，总体的统计特性完全由总体分布刻画，因此，一个总体必然对应着一个完全确定的总体分布。

知道样本分布可以完全确定总体分布，但知道总体分布，并不能完全确定样本分布。抽样的目的是由取得的样本对总体分布中某些未知因素做出统计推断。为了使样本能更好地反映总体信息，必须采用恰当的抽样方法。最常用的一种抽样方法叫做**“简单随机抽样”**，它应满足以下两个方面的要求：

(1) 代表性：样本 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 中每一个 X_i 都能同样反映总体的特性，即样本中每个个体与所考察的总体有相同的分布。

(2) 独立性：样本 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 中每一个 X_i 既不受样本中其他 $n-1$ 个分量的影响，也不影响其他 $n-1$ 个分量的取值，即样本中各个个体是相互独立的随机变量。

由简单随机抽样得到的样本 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 称为**简单随机样本**，或称**独立同分布样本**，它可以用与总体独立同分布的 n 个相互独立的随机变量 X_1，X_2，$\cdots$，X_n 表示。假如总体的分布函数为 $F(x)$，则其简单随机样本的联合分布函数为 $F(x_1)F(x_2)\cdots F(x_n)$。

1.2 统计量与抽样分布

1.2.1 统计量

样本的观测值是进行统计分析和统计推断的依据。从样本观测值出发，要得

到有关总体某些性质的推断，就必须对样本进行加工、处理和提炼，以便把分散在样本中的关于总体某方面的信息集中起来。为此，必须针对不同的问题构造样本的某种函数，而把这种完全由样本决定的函数称为**统计量**。

统计量定义中关键的一点在于：它只依赖于样本，而不能依赖于任何其他未知量。例如，设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态分布总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，令 $P = X_1 - X_2 - \mu$，若 μ 已知，则 P 是统计量，若 μ 未知，则 P 不是统计量。

设 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$ 是来自某一总体的样本，则称

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{1.1}$$

为**样本均值**；又称

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \tag{1.2}$$

为**样本方差**；而称其算术平方根

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \tag{1.3}$$

为**样本标准差**。

$\overline{X}$ 反映了样本的中心位置特征，S^2 刻画了样本分散程度的特征，像 $\overline{X}$ 和 S^2 这样的样本 $\boldsymbol{X}$ 的函数，它们不依赖于总体分布的任何未知参数，故称为统计量。

由样本构造统计量，实质上是对样本所含的总体信息按某种要求进行加工，将分散在样本中的信息集中到统计量上来，不同的统计推断要求不同的统计量。

样本矩也是一类常用的统计量。

设 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$ 是来自某总体的样本，则称

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \tag{1.4}$$

为**样本 k 阶原点矩**；而称

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k \qquad k = 1, 2, \cdots \tag{1.5}$$

为**样本 k 阶中心矩**。

三、四阶矩主要用于下面的两个统计量，称

$$\beta_1 = \frac{M_3}{M_2^{3/2}} \tag{1.6}$$

为**样本偏度系数**；而称

$$\beta_2=\frac{M_4}{M_2^2} \tag{1.7}$$

为**样本峰度系数**。

样本偏度系数用于考察分布的对称性：若总体分布关于某点对称，则其总体偏度系数为 0，故样本偏度系数也接近为零。样本峰度系数用于考察总体分布的正态性：当总体分布为正态时，其总体峰度系数为 3，故样本峰度系数也接近为 3。因此样本偏度系数和峰度系数可用来检验样本是否来自正态分布。

次序统计量是统计理论中另一个重要的统计量。设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$，不论观测值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 取怎样的值，若 $X_{(i)}$ 总是以 $x_{(i)}$ 为其观测值，设 $x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 按大小次序重新排列而得，则称 $X_{(i)}$ 是第 i 个次序统计量，$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$ 称为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的次序统计量。

显然，有

$$X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)} \tag{1.8}$$

式中：$X_{(1)}$ 称为最小次序统计量；$X_{(n)}$ 称为最大次序统计量。

样本中位数 m 是指 $X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$ 中居中的一个量（n 为奇数时），或居中的两个量的平均（n 为偶数时），即

$$m=\begin{cases}X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)}+X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} & n\text{ 为偶数}\end{cases} \tag{1.9}$$

对于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，在每一个 x_i 有相等概率 $\dfrac{1}{n}$ 的概率分布称为其**经验分布**。经验分布的分布函数表达成一个跃度为 $\dfrac{1}{n}$ 的阶梯函数

$$F_n(x)=\begin{cases}0 & x<x_{(1)}\\ \dfrac{k}{n} & x_{(k)}\leqslant x\leqslant x_{(k+1)}\\ 1 & x\geqslant x_{(n)}\end{cases} \tag{1.10}$$

用 $X_{(k)}$ 代替 $x_{(k)}$ 时，得

$$F_n(x)=\begin{cases}0 & x<X_{(1)}\\ \dfrac{k}{n} & X_{(k)}\leqslant x\leqslant X_{(k+1)}\\ 1 & x\geqslant X_{(n)}\end{cases} \tag{1.11}$$

式(1.11)表示的 $F_n(x)$ 称为**经验分布函数**。对于任意固定的 x,$F_n(x)$ 是样本的函数,即为统计量。在数理统计中,经验分布函数用于估计总体分布函数 $F(X)$。

1.2.2 常用分布及抽样分布

设 X 是一随机变量,则称函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\} \qquad -\infty<x<\infty \tag{1.12}$$

为 X 的**分布函数**。

当 X 是连续型随机变量时,设密度函数为 $f(x)$,则

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.13}$$

当 X 是离散型随机变量时,设概率分布为 $P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots)$,则

$$F(x) = \sum_{x_i\leqslant x} p_i \tag{1.14}$$

设 X 是一连续型随机变量,若存在数值 x_p 满足

$$F(x_p)=P\{X\leqslant x_p\}=p \tag{1.15}$$

式中:$p\in[0,1]$,称 x_p 为 X 的对应于概率 p 的**分位数**,简称 p 分位数。

1. 常用的离散型分布

1) 二项分布

设离散型随机变量 $X\sim B(n,p)$,其概率分布为

$$P\{X=x\}=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \qquad x=0,1,\cdots,n \tag{1.16}$$

式中:$p>0,q>0,p+q=1$;n 为正整数。

X 的分布函数为

$$B(x|n,p) = \sum_{i=0}^{[x]} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \tag{1.17}$$

且均值 $E(X)=np$,方差 $\mathrm{Var}(X)=npq$。

2) 泊松分布

设离散型随机变量 $X\sim P(\lambda)$,其概率分布为

$$P\{X=x\}=\frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda} \qquad x=0,1,2,\cdots \tag{1.18}$$

式中:λ 为正实数。

X 的分布函数为

$$P(x|\lambda) = \sum_{i=0}^{[x]} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \tag{1.19}$$

且均值 $E(X)=\lambda$，方差 $\mathrm{Var}(X)=\lambda$。

3) 几何分布

设离散型随机变量 $X \sim G(p)$，其概率分布为

$$P(X=x)=pq^{x-1} \qquad x=1,2,\cdots \tag{1.20}$$

式中：$p>0, q>0, p+q=1$，且均值 $E(X)=\dfrac{1}{p}$，方差 $\mathrm{Var}(X)=\lambda$。

2. 常用连续型分布的分布

1) 均匀分布

设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{1.21}$$

取 X 的分布函数记为 $U(x|a,b)$，简记为 $F(x)$，则

$$U(x|a,b)=F(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\leqslant x\leqslant b \\ 1 & x>b \end{cases} \tag{1.22}$$

称 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布，记为 $X \sim U(a,b)$，且均值 $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$，方差 $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$。其概率密度函数 $f(x)$ 和分布函数 $F(x)$ 的图形分别如图 1.1 与图 1.2 所示。

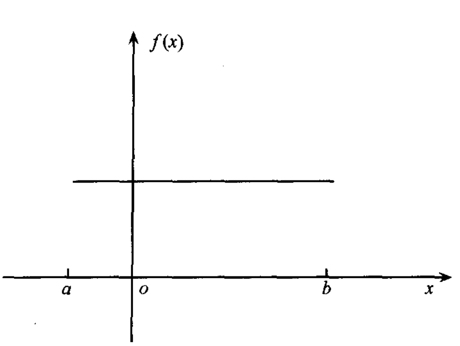

图 1.1　均匀分布的概率密度函数

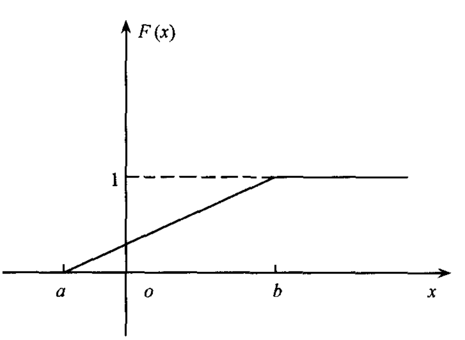

图 1.2　均匀分布的分布函数

2）正态分布

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty<x<\infty \tag{1.23}$$

式中：μ、$\sigma(\sigma>0)$为常数。

X 的分布函数记为 $F(x)$，则

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t \qquad -\infty\leqslant x\leqslant\infty \tag{1.24}$$

称 X 服从参数 μ、σ 的正态分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且均值 $E(X)=\mu$，方差 $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$。其概率密度函数 $f(x)$与分布函数 $F(x)$分别如图 1.3 与图 1.4 所示。

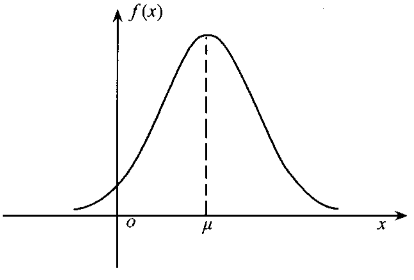

图 1.3　正态分布的概率密度函数

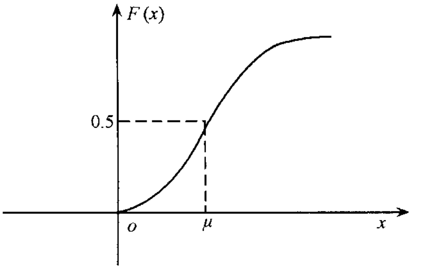

图 1.4　正态分布的分布函数

特别地，当 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时称 X 服从标准正态分布，若其概率密度函数和分布函数分别用 $\varphi(x)$、$\Phi(x)$表示，则有

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1.25}$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \tag{1.26}$$

3）指数分布

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases} \tag{1.27}$$

式中：$\lambda>0$ 为常数。

记 X 的分布函数为 $E(x|\lambda)$，简记为 $F(x)$，则

$$E(x|\lambda)=F(x)=\int_{0}^{x}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t \qquad x>0 \tag{1.28}$$

称 X 服从参数为 λ 的指数分布，记为 $X \sim e(\lambda)$，且均值 $E(X)=\frac{1}{\lambda}$，方差 $\mathrm{Var}(X)=\frac{1}{\lambda^2}$。其概率密度函数 $f(x)$ 与分布函数 $F(x)$ 分别如图 1.5 与图 1.6 所示。

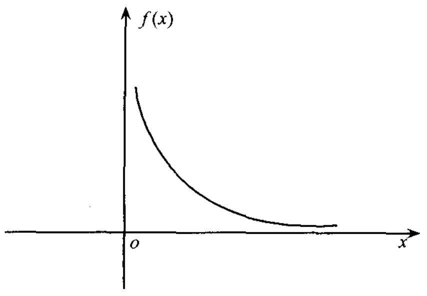

图 1.5　指数分布的概率密度函数

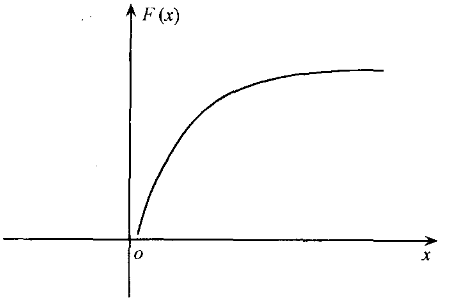

图 1.6　指数分布的分布函数

4）Gamma 分布

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}\mathrm{e}^{-bx} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}\tag{1.29}$$

式中：$a>0$，$b>0$，且 a、b 为常数。

记 X 的分布函数为 $G(x|a,b)$，简记为 $F(x)$，则

$$G(x\mid a,b)=F(x)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_0^x t^{a-1}\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t \qquad x>0\tag{1.30}$$

称 X 服从参数 a、b 的 Gamma 分布，记为 $X\sim\Gamma(a,b)$，其中 $\Gamma(a)$ 为 Gamma 函数，

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\tag{1.31}$$

且均值 $E(X)=\frac{a}{b}$，方差 $\mathrm{Var}(X)=\frac{a}{b^2}$。其概率密度函数 $f(x)$ 与分布函数 $F(x)$ 分别如图 1.7 与图 1.8 所示。

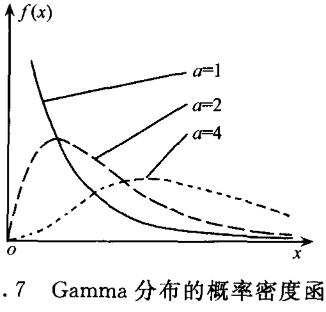

图 1.7　Gamma 分布的概率密度函数

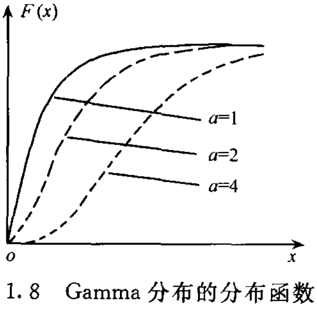

图 1.8　Gamma 分布的分布函数

5）Beta 分布

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\mathrm{B}(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1} \qquad 0<x<1 \tag{1.32}$$

式中：$a>0,b>0,\mathrm{B}(a,b)$为 Beta 函数，且有

$$\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t=\mathrm{B}(b,a)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \tag{1.33}$$

记 X 的分布函数为 $I_x(a,b)$，简记为 $F(x)$，则

$$I_x(a,b)=F(x)=\frac{1}{\mathrm{B}(a,b)}\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t \qquad 0<x<1 \tag{1.34}$$

称 X 服从参数 a、b 的 Beta 分布，记为 $X\sim\beta(a,b)$，且均值 $E(X)=\frac{a}{a+b}$，方差 $\mathrm{Var}(X)=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$。其概率密度函数 $f(x)$与分布函数 $F(x)$分别如图 1.9 与图 1.10 所示。

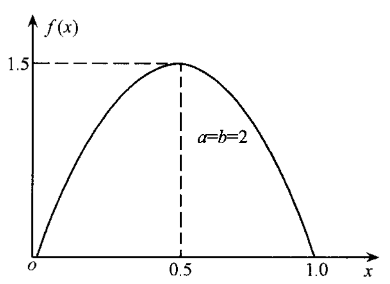

图 1.9　Beta 分布的概率密度函数

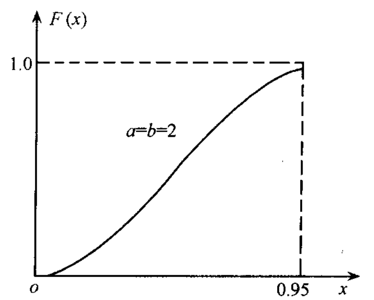

图 1.10　Beta 分布的分布函数

3. 重要抽样分布

设样本为$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，统计量 $T=T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的函数，因$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$有一定的概率分布，故 T 也有一定的概率分布，这种分布称为 T 的**抽样分布**，它完全由样本的概率分布确定。简言之，抽样分布就是统计量的分布。在使用统计量进行统计推断时常常需要知道它的分布。当总体的分布函数已知时，抽样分布是确定的，然而要求出统计量的精确分布，一般来说是困难的。下面给出三个样本来自正态总体的抽样分布。

1) χ^2 分布

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立，$X_i \sim N(a_i, 1)$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $X=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 的分布称为具自由度为 n、非中心参数 $\delta=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ 的 χ^2 分布，记为 $X \sim \chi^2(n,\delta)$。当 $\delta=0$ 时，X 的 χ^2 分布称为中心的，记作 $X \sim \chi^2(n)$。概率密度函数为 $h(x|n,\delta)$，有

$$h(x|n,\delta)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{\delta^2+x}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(\frac{\delta^2}{2}\right)^i \left[\frac{x^{i+\frac{n}{2}-1}}{2^{i+\frac{n}{2}}\Gamma\left(i+\frac{n}{2}\right)}\right] & x>0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.35}$$

当 $\delta=0$ 时，概率密度函数为 $h(x|n)$，简记为 $f(x)$，有

$$h(x|n)=f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & x>0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.36}$$

记 X 的分布函数为 $H(x|n)$，简记为 $F(x)$，有

$$H(x|n)=F(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^x t^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \tag{1.37}$$

且均值 $E(X)=n$，方差 $\mathrm{Vax}(X)=2n$，其不同 n 值对应的 χ^2 分布的概率密度函数 $f(x)$ 与分布函数 $F(x)$ 分别如图 1.11 与图 1.12 所示。

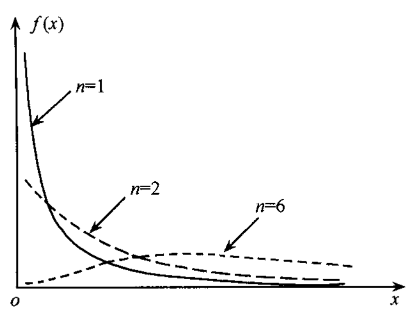

图 1.11 χ^2 分布的概率密度函数

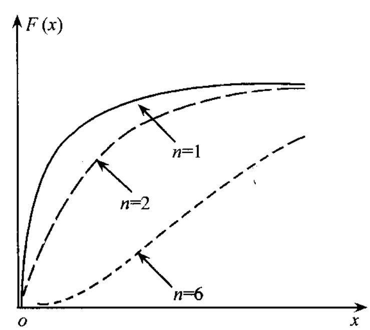

图 1.12 χ^2 分布的分布函数