普通高等教育"十一五"国家级规划教材

线性代数

INTRODUCTION OF LINEAR ALGEBRA

文志雄　何耀　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21世纪经济与管理规划教材
经济数学系列

线性代数

INTRODUCTION OF LINEAR ALGEBRA

文志雄　何耀 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/文志雄,何耀编著.—北京:北京大学出版社,2008.4
(21世纪经济与管理规划教材·经济数学系列)
ISBN 978-7-301-12891-6

Ⅰ.线…　Ⅱ.①文…　②何…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第192234号

书　　　名:线性代数
著作责任者:文志雄　何　耀　编著
责 任 编 辑:朱启兵
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-12891-6/O·0735
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区成府路205号　100871
网　　　址:http://www.pup.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752926
出版部 62754962
电 子 邮 箱:em@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京飞达印刷有限责任公司
经　销　者:新华书店
730毫米×980毫米　16开本　13.25印张　238千字
2008年4月第1版　2008年4月第1次印刷
印　　　数:0001—5000册
定　　　价:24.00元

丛书学术顾问

丛书执行主编

丛书编委

丛书序言

在最近二十多年中，我国社会生活的各个方面发生了巨大变化，经济建设取得了令世人瞩目的奇迹，经济体制正在全面地向市场经济体制转轨。经济与社会的全面转型产生了对市场经济知识的巨大需求，这又极大地推动了我国经济学教育水平的整体提高与进步。

今天，我国大学里的经济学教育已经越来越趋向规范化与国际化，一种更加有利于经济学理论发展的学术氛围已经形成，一大批拥有现代经济学知识与新型经济学理念的崭新人才正在脱颖而出。但是，不可否认的是，我国经济学教育和研究的整体水平与世界一流大学相比还有比较大的差距。突出表现在，我们自己培养的经济学博士很少能够在欧美一流大学任教；在国际著名的经济学期刊上，特别是顶级的经济学期刊上也不多见纯粹由国内经济学家完成的研究成果发表，这些都说明要想提高我国经济学教育和研究的水平并缩短这些差距，我们要走的路仍然很长！

近五十年来，经济学的研究与其成果越来越呈现出科学化的态势，其中一个突出的表现形式就是数学理论与经济学研究的紧密结合。具有严密逻辑的数学方法彻底改变了以往经济学分析中存在的一些缺点，如论证缺乏逻辑一致性以及所得出结论的模糊性。同时，随着数学方法在经济学中的广泛应用，不论是经济学研究方法还是经济学的研究成果，都越来越具有科学的特征。而且经济学家们所构建的经济学理论在很大程度上具有可检验性，这就避免了我们接受那些似是而非、模棱两可的结论。应该说，这是一种对传统社会科学，尤其是对经济学研究理念的根本性突破。随之而来的就是许多经济学领域的研究成果也逐渐被科学界所认可，一个最突出的现象就是，瑞典皇家科学院从 1969 年开始，特别为经济学领域内的那些具有开创性的成果设立了诺贝尔经济科学纪念奖，使经济学这一最具科学特征的社会科学也跻身于科学行列之中。

经济学在近半个世纪已经取得了一大批突破性的研究成果，这些成果不仅加深了人类对现实经济问题的洞察，而且也影响着人类社会的进一步向前发展。几乎所有这些成果都是用数学方法或数学语言所完成的，它们的核心内容都是建立在完备的数学模型与严密的数学论证的基础之上的，而且相当数量成果本身就是由优秀数学家取得的。尤其是获得诺贝尔经济学奖的重大研究成果，更是如此。从最早获奖的计量经济学理论、一般均衡理论，到最近获奖的资产定价理论、信息经济学理论与博弈理论，其分析方法与内容都是建立在数学理论与方法的基础之上的。近十年来两度获得诺贝尔经济学奖的博弈理论的主要贡献者

纳什(Nash)与奥曼(Aumman)就是出色的数学家。因此,从某种意义上讲,这些成果在经济学理论上的突破,其实就是数学理论的研究应用及其分析方法的拓展。今天,数学已经融入经济学之中,成为了现代经济学最重要的分析工具与研究方法。

事实上,在人类文明的发展进程中,数学一直占据核心的位置,许多推动人类文明发展并影响人类生活的重大科学发现与科学理论,都离不开数学所起到的奠基性贡献。今天,不仅是在自然科学,而且在人文社会科学的诸多学科中,使用数学语言或数学模型进行理论分析和观点阐述的现象也非常普遍。而一些社会科学中的许多重大发展也源于数学工具的改进与数学思想的发展。因此,我们可以这样说,数学知识的进步在很大程度上是人类文明进步的一个重要标志。

在整个社会科学中,经济学应该说最具有科学的特征,这主要归功于数学在经济学中的广泛应用,我们相信,数学必将继续推动经济学理论不断地向前发展。因此,掌握现代经济学的一个必要前提条件就是要先学好数学的基础知识。

当前,国内许多高校的经济学院系也都根据现代经济学发展的需要,调整、修订并实施了新的数学教学计划,加大了数学课的教学时数,加深了数学课的难度,这就对经济管理专业学生的数学水平提出了更高的要求。正是在这种背景下,北京大学出版社策划出版了《21世纪经济与管理规划教材·经济数学系列》丛书。

本丛书主要是针对高等院校的经济学、管理学各专业学生所编写的。丛书的编著者分别是中国人民大学、复旦大学、南京大学、武汉大学和华中科技大学等著名高校的教师,他们中的多数都同时具有数学与经济学硕士以上的学位,他们不仅有深厚的数学功底,而且深谙现代经济学理论,所研究的课题也在经济学的前沿领域内。他们有多年为经济与管理专业本科生、研究生讲授微积分、线性代数、运筹学、概率论与数理统计等多门课程的教学经验,目前又承担着本科生、研究生的中高级微观经济学、中高级宏观经济学、计量经济学、数理经济学、金融经济学、博弈论与信息经济学等经济学理论课的教学工作。这是一支知识结构合理、教学经验丰富的写作团队。

在内容的选择上,每本教材都尽量考虑到不同层次、不同专业的教学需要,尽可能地使本系列教材在教学过程中为任课教师提供一个合理的选择空间。当然,不足之处难免存在,希望广大师生不吝赐教,以便本丛书今后不断修订完善。

在本丛书的策划、出版过程中,经北京大学中国经济研究中心姚洋老师推荐,中国人民大学经济学院的李军林老师做了大量的组织协调工作。丛书编委会在此对他们表示诚挚的感谢!

丛书编委会

2006年6月

前　言

在高等院校经济与管理类专业的教学中，数学的重要性日益突出。特别是将宏观经济学、微观经济学、金融学、计量经济学等作为本科专业教学的核心课程以来，其中涉及的数学知识既“广”又“专”，而线性代数是必不可少的。但是教师和学生一直都面临着两难的问题：如果选择文科类的数学教材，教学内容有所欠缺；如果选择理科类的数学教材，教学时间明显不够。为了适应经济与管理类专业的数学教学需要，我们有针对性地编写了这套经济数学系列教材中的《线性代数》。

数学作为一种工具，着重点在于其具体应用方面的实用性。同时，数学又是一种语言，应强调其抽象思维方面的逻辑性和系统性。我们在编写教材时，对于这两方面的内容既有融合，又有偏重。编写经济与管理类专业的数学教材，既要满足教学大纲的要求，又应给出提高学生理论水平的空间，还需提供与经济分析相关的应用工具，我们综合处理了这三部分的需要。

为训练学生的数学思维和运算能力，教材内容的重点放在线性代数的基础理论体系上，在保证其内容的严密逻辑性和较完整的自洽性的同时，充分注意了代数较为抽象、学生初学比较不习惯的特点，也考虑了学生继续学习高等代数的理论准备，由简入难。本书让学生从熟悉的线性方程组出发，逐步引入及处理行列式、矩阵、向量空间等概念、运算方法和相应的理论推演，突出初等变换和分块处理对矩阵问题的作用，结合大量的习题，让学生在循序渐进地掌握基本概念和基本理论的基础上，更加得心应手地处理相关代数问题。在知识的提高方面，我们预留了让教师和学生选择的内容。另外，在数学记号和术语上与现代数学通行的符号和描述保持一致，使学生在进一步阅读数学和经济学数理分析的文献时，不至产生疏离感。

为给学生提供经济学与管理学中数学应用的工具，我们在线性代数的理论基础上，简要介绍了矩阵和行列式的几个特殊应用，如投入产出模型、雅可比行列式、海塞矩阵、矩阵的克罗内克乘积、向量的微分等，它们会出现在经济学的静态分析、比较静态分析以及计量经济学的有关算法中。这些介绍基本上是描述性的，偏重于概念的建立与较简单的运用，以便对后续的经济管理类本科专业课程提供几个基础性的工具，以期引起学生对经济数理分析的兴趣和激发进一步学习有关内容的愿望。

本教材适用于40—60学时的课程,除去标上“*”号的部分,大约需要讲授40学时左右。对于超出40学时的部分,可以首先考虑讲述第六章的主要内容,如果学时充裕,还可讲授加有“*”号的证明和例题,以加深学生的理解和处理实际问题的能力。应用部分可针对具体需要而增减。第七章涉及多元函数问题,需要授课对象具备相应的基础,亦可供高年级本科生和研究生参考。

习题的设置分为A、B两部分,习题A着重于加深对基本知识的理解和运用,习题B则着重于对知识体系理解的深化和提高。习题的设置亦考虑了考研的大纲,因此也适合这方面的需求。

本教材也适合高等学校非数学专业相应学时的线性代数课程选用,亦可供需要该课程的其他专业本科学生和研究生参考。

衷心感谢北京大学出版社和丛书编委会为我们提供了编写这本教材的机会,并促使其被评为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。感谢复旦大学的金路教授,中国人民大学的李军林教授、蔡海鸥副教授,南京大学的李晓春副教授,为我们共同的编写计划提出了中肯的建议。还要感谢北京大学出版社的林君秀、陈莉、张迎新等同志的尽力支持和帮助,以及朱启兵同志在编辑此教材中付出的辛勤劳动。

希望使用这本教材的老师和同学提出宝贵的批评意见和建议,帮助我们修正书中的错误。

编著者

2007年8月于武汉

目　　录

预备知识与记号

$A := B$(或 $B =: A$)表示以表达式 B 来定义 A. 如果命题 P_1 能推出命题 P_2(也叫 P_1 蕴涵 P_2),称 P_1 是 P_2 的充分条件,记做 $P_1 \Rightarrow P_2$,也可称 P_2 是 P_1 的必要条件. 如果 P_1 是 P_2 的充分必要条件,称 P_1 与 P_2 是等价的命题(也称 P_2 成立当且仅当 P_1 成立,记做 iff),记做 $P_1 \Longleftrightarrow P_2$(或 P_1 iff P_2). 记号"$\forall$"表示"对所有的",记号"$\exists$"表示"存在".

我们称具有某种属性的对象全体为**集合**,其中的对象叫做这个集合的**元素**. 不含任何元素的集合叫做**空集**,记做$\varnothing$. 如果 a 是集合 S 的元素,我们记做 $a \in S$. 如果集合 T 的元素也都是集合 S 的元素,则称 T 是 S 的**子集**,记做 $T \subset S$(或 $S \supset T$,也叫做 S 包含 T). 于是

$$(T \subset S) \text{ iff } (\forall a,\ a \in T \Rightarrow a \in S).$$

如果 $T \subset S$ 并且 $S \supset T$,则称 S 与 T 相等,记做 $S = T$. 于是

$$(T = S) \text{ iff } (\forall a,\ a \in S \Longleftrightarrow a \in T).$$

如果一个集合所含元素的个数是有限的,则称这集合是有限集,否则称无限集. 集合 S 所含元素的个数记做 $\# S$.

令 A 与 B 都是集合 S 的子集.

- A 与 B 的**并集** $A \cup B := \{s \mid s \in A$ 或 $s \in B\}$.
- A 与 B 的**交集** $A \cap B := \{s \mid s \in A$ 并且 $s \in B\}$.
- A 与 B 的**差集** $A \backslash B := \{s \mid s \in A,\ s \notin B\}$.
- A 在 S 中的**补集** $A^c := S \backslash A$.

设 A 与 B 是两个集合. 如果对集合 A 的每个元素 a,都有一个法则 f,使集合 B 中有唯一的元素 b 与 a 对应,则称 f 是集合 A 到集合 B 的一个**映射**,记做 $f: A \to B$,这个对应也记做 $f(a) = b$(或 $a \to b$),元素 b 叫做元素 a 的**像**,a 叫做 b 的一个**原像**. 对 A 的子集 X,f 关于 X 的像集 $f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$;对 B 的子集 Y,f 关于 Y 的像源(原像)集 $f^{-1}(Y) := \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$.

- 如果 $\forall s, t \in A$, $f(s) = f(t) \Rightarrow s = t$,则称 f 是**单射**.
- 如果 $\forall b \in B$, $\exists\ a \in A$,使得 $f(a) = b$,即 $f(A) = B$,则称 f 是**满射**.
- 如果 f 既是单射,又是满射,则称 f 是**双射**.
- 将集合 S 中每个元素 s 对应到自身 s 的 S 到 S 的映射叫做**恒等映射**,记

做 id_S. 容易看到 id_S 是双射.

- **复合映射**:令 $f:A\to B, g:B\to C$ 是两个映射. 那么对每个 $a\in A$,通过 $a\to g(f(a))$定义的 A 到 C 映射称为 f 与 g 的复合映射,记做 $g\circ f$.

- **可逆映射**:令 f 是 A 到 B 的映射,如果存在 B 到 A 的映射 g,使得 $g\circ f=\mathrm{id}_A, f\circ g=\mathrm{id}_B$,则称 f 是可逆映射,g 叫做 f 逆(映射). 可以证明,f 是可逆的当且仅当 f 是双射的,并且 f 的逆 g 是唯一的,因此也记做 f^{-1}. 容易看到,如果 $f(a)=b$,那么 $f^{-1}(b)=a$.

本书中我们以$\mathbb{R}$表示实数集合. 习惯上,把映射 $f:A\to\mathbb{R}$ 叫做定义在 A 上的函数;集合到自身的映射叫变换.

运算:设 S 与 T 是集合. 由 S 与 T 中所有的有序元素对$(s,t)(s\in S,\ t\in T)$构成的集合叫做 S 与 T 的**直积集合**,记做 $S\times T$. 又记 $S^n:=\underbrace{S\times\cdots\times S}_{n个}$. 集合 S 上的一个运算是映射 $p:S^2\to S$,即集合 S 中的任意一对元素(a,b)可通过运算得到集合 S 唯一确定的一个元素 $p(a,b)$. 如整数集合的加法 $a+b$,乘法 $a\cdot b$.

求和号及乘积号:

$\sum\limits_P a$ 及$\prod\limits_P a$ 分别表示对所有具有属性 P 的数 a 求和及乘积. 例如

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 10\\ n是素数}} n = 2+3+5+7,$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 100\\ n是偶数}} n = 2+4+6+\cdots+100 = \sum_{i=1}^{50}2i,$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i = a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

$$\prod_{k=1}^{n}k = 1\times 2\times\cdots\times n = n!,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots.$$

注意到数关于加法的结合律与交换律,我们有

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\Big) = \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\Big) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}.$$

特别地

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_ib_j = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}a_ib_j\Big) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}a_i\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}b_j\Big) = \Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant n}a_i\Big)\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}b_j\Big).$$

复数及其运算:设 i 是满足关系 $\mathrm{i}^2=-1$ 的形式符号. 复数具有形式 $z=a+b\mathrm{i}$,其中 a 和 b 是实数,分别叫做 z 的实部和虚部,i 也叫虚单位. 令 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$,

$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$. 按如下方式在全体复数集合$\mathbb{C}$上定义加法和乘法：

$$z_1+z_2 := (a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i},$$
$$z_1\cdot z_2 := (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}.$$

记 $0=0+0\mathrm{i}$, $1=1+0\mathrm{i}$. 对于加法，我们又定义 $-z=(-a)+(-b)\mathrm{i}$；对于乘法，如果 $z\neq 0$，定义 z 的倒数 $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{a+b\mathrm{i}}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$. 容易验证：$z+(-z)=0=(-z)+z$, $zz^{-1}=1=z^{-1}z$. 不难验证，加法和乘法都满足结合律、交换律，乘法对加法满足分配律. 进一步，我们可以定义加法和乘法的逆运算减法和除法：

$$z_1-z_2 := z_1+(-z_2),\quad z_1/z_2 := z_1z_2^{-1}.$$

带有这样运算的集合$\mathbb{C}$叫做复数域. 复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的复共轭 $\bar{z}$ 定义为 $a-b\mathrm{i}$. 容易验证 $z\bar{z}=a^2+b^2$. $\sqrt{z\bar{z}}$叫做 z 的绝对值(或模). 关于复数共轭，有

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\quad \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2.$$

数域：设 F 是$\mathbb{C}$的子集，如果满足

1) $0,1\in F$；

2) 对所有 $a,b\in F$，都有 $a-b\in F$, $ab^{-1}\in F(b\neq 0)$.

则称 F 是一个数域.

简言之，F 中任意两个数经过$+$、$-$、$\times$、$\div$都还在 F 中. 不难验证，有理数集合$\mathbb{Q}$、实数集合$\mathbb{R}$、复数集合$\mathbb{C}$都是数域. 而自然数集合$\mathbb{N}$、整数集合$\mathbb{Z}$都不是数域.

代数基本定理 次数至少是 1 的任一复数系数的多项式在复数域中至少有一个零点 z（即 z 是方程 $p(x)=a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的一个根，$n\geq 1$，$a_0\neq 0$）.

第一章 行 列 式

§1.1 行列式概念的引入与定义

求解一次方程组是线性代数的基本问题之一. 它来源于大量实际问题. 一个典型例子如下:我们知道一个一次方程在解析几何里表示一条直线. 于是,在代数中看,给定的几条直线共点的充分必要条件就是由这些直线方程组成的一次方程组(线性方程组)有唯一解. 类似地,平面上两条直线重合的充分必要条件是这两条直线方程所组成的线性方程组有无穷多解,平行(不重合)的充分必要条件是这两条直线方程所组成的线性方程组没有解.

下面我们用消元法(也叫消去法)求解由两条直线给出的线性方程组(两个方程、两个未知数):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

将 a_{22} 乘第一个方程,$-a_{12}$ 乘第二个方程,再将得到的两个新方程相加,得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

类似地,

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

为方便起见,记 $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $D_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$, $D_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$. 那么,当 $D \neq 0$ 时,方程(1.1)有解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

容易验证,这的确是方程(1.1)的解,并且上面的方法告诉我们,当 $D \neq 0$,方程(1.1)的解是唯一的. 观察 D, D_1, D_2 这三个数,它们都是两个数的乘积减去另两个数的乘积. 如果我们用写成两行两列的符号 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 表示数 $ad - bc$,那么我们有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

这样的符号我们叫做二阶行列式.

同样的方法,对于线性方程组(三个方程、三个未知数)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1.2}$$

定义由九个数排成三行三列的三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

再令

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

那么当方程(1.2)的系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程(1.2)有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例 1.1.1 求

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + 2y + 3z = 4, \\ x + 4y + 9z = 16. \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 3 + 4 - 12 - 9 - 2 = 2 \neq 0,$$

得知方程有唯一解. 再分别计算得 $D_1 = 2, D_2 = -6, D_3 = 6$，所求方程的解为

$$x = 1, \quad y = -3, \quad z = 3.$$

仔细观察比较二阶和三阶行列式. 它们的共同特点是一些乘积项的代数和，并且

1. 二阶行列式的每个项是两个数的乘积，共有 $2=2!$ 项；三阶行列式的每个项是三个数的乘积，共有 $6=3!$ 项；

2. 每个乘积项中的因子来自不同的行，不同的列：注意到上面行列式中的数 a_{ij} 的第一个脚标 i 和第二个脚标 j 分别表示 a_{ij} 在行列式中所在的行数和列数，我们分别在第一、第二以及第三行取定一个数，于是三阶行列式的每个乘积项可写成 $a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}a_{3\pi(3)}$，其中 $\pi(1),\pi(2),\pi(3)$ 来自不同的列，即 $\pi(1)\pi(2)\pi(3)$ 是 $\{1,2,3\}$ 的一个排列. 这样的排列共 $6=3!$ 个.