



陈政清桥梁力学

论 文 精 选

陈政清 著

湖南大学出版社

陈政清桥梁力学论文精选

陈政清 著

湖南大学出版社

2007年·长沙

内 容 简 介

本论文集精选了作者 20 多年来具有原创性重要成果的论文 34 篇,内容涉及柔性工程结构大变形分析理论,桥梁风致振动理论和控制技术研究,几何、物理双重非线性边界元法,弹性半空间边界元法与固体力学变分原理应用等。为便于国际交流,原在英文学术期刊发表的论文本次仍以英文刊出。有些论文是作者与学生的共同研究成果。该论文集体现了“源于实践,高于实践,指导实践”的创新思想。

其研究成果及时地为我国大跨度柔性桥梁的建设提供了关键技术支持,曾在我国一系列重大桥梁工程中得到应用,先后荣获国家科学技术进步二等奖 1 项,省部级一等奖多项,并在国内外文献中获得广泛引用与正面评价。相关研究工作曾得到国家自然科学基金多次资助和教育部留学人员回国基金资助。

本论文集内容丰富,涉及面广,信息量大,学术水平较高,可供桥梁与力学研究工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

陈政清桥梁力学论文精选/陈政清著.

—长沙:湖南大学出版社,2007.4

ISBN 978-7-81113-163-5

I. 陈... II. 陈... III. 桥梁结构—结构力学—文集

IV. U441-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 031984 号

陈政清桥梁力学论文精选

Chen Zhengqing Qiaoliang Lixue Lunwen Jingxuan

作 者: 陈政清 著

责任编辑: 卢 宇

特约编辑: 陈灿华

封面设计: 张 毅

出版发行: 湖南大学出版社

社 址: 湖南·长沙·岳麓山 邮 编: 410082

电 话: 0731-8821691(发行部), 8821315(编辑室), 8821006(出版部)

传 真: 0731-8649312(发行部), 8822264(总编室)

电子邮箱: pressluy@hnu.cn

网 址: <http://press.hnu.cn>

印 装: 长沙瑞和印务有限公司

开本: 787×1092 16 开

印张: 24.5

字数: 628 千

版次: 2007 年 5 月第 1 版

印次: 2007 年 5 月第 1 次印刷

书号: ISBN 978-7-81113-163-5/O·71

定价: 72.00 元

版权所有, 盗版必究

湖南大学版图书凡有印装差错, 请与发行部联系

自序

从我撰写第1篇研究论文算起,至今已有25个年头了。随着研究领域的扩展,渐渐有了编印1本论文集的想法。最先促使我产生这一想法的是一位不相识的欧洲学者,他给我寄来一大叠他的研究论文作为交换,要求我将我的博士论文寄给他,即便是中文的也行。他是仔细研究了我在1990年的一篇英文论文后提出这一要求的,这篇论文刊登在“Numerical Method in Applied Mechanics and Engineering”1990年第一卷第一篇的醒目位置,虽然长达18页,但仍只是我博士学位论文的一个详细摘要。显然这位学者想深入研究我的博士学位论文,他的要求使我很为难,为难之处并不是有什么保密、保守的地方,而是论文的版面太差,国际交流拿不出手,当时(1987年)计算机的中文文字处理能力很差,一个汉字或一行带上下标的数学公式要用9针打印机打两行才能形成,复印后版面效果就更差了。思前想后,最后还是把这篇博士论文寄出去。我因此而一直心存愧疚,也由此产生了编印论文集的想法。最初的打算编成一本内部资料,以方便自己及我的研究小组成员查阅,也可用于学术交流。后来几位从我这毕业后工作多年并且也带有一大帮研究生的博士们鼓励我精选一批论文正式出版。我与他们一道反复论证多次,觉得出版论文集还是具有一定的学术价值和积极意义,现定名为《陈政清桥梁力学论文精选》。趁着出版的机会,我想谈谈自己多年科学研究的一点体会,希望能对读者特别是青年科技工作者有所帮助。

我是个安于天命的人,不怎么见异思迁。大学期间在力学专业学习,在10年时间里按部就班地获得了学士、硕士与博士学位。毕业后7天,分配到桥梁教研室工作,埋头于桥梁工程的教学与研究,又度过了20个春秋。两次出国研修,也是研究桥梁工程,坚实的理论基础和长期稳定的研究方向是我取得科研成果的重要保证。从事力学研究的时候,我总是问自己研究成果有何应用,从事桥梁研究的时候,我努力去发现哪些是当前尚未解决的问题,哪些是今后即将需要的技术,它们可否归结为某个力学问题并加以解决。由于有了这种极强的理论与应用相结合的指导思想,我们的科学研究一般都经历了“从工程实践中提炼课题,在研究过程中实现技术和理论创新,在实际应用中实现成果转化”的完整过程。20世纪80年代末,我意识到中国急需结构非线性分析理论和方法,便着手研究建立了“空间杆系结构大变形内力分析的UL列式法”理论,并依据这个理论开发出了大跨度桥梁空间静动力有限元分析NACS程序,它被应用到我国最早建造的两座悬索桥以及后来一系列桥梁工程中,并及时地为我国20世纪90年代初开始的大跨度桥梁建设提供了技术支持。

从事工程科学的研究人员虽然不能像数学家那样自由地从事超越现实世界的科学研究,但也一定要有适当超前研究的意识,努力推动本专业的技术进步而不只是提供技术服务。高等院校的桥梁科学研究人员,适当从事技术服务工作是必要的,但更要有义务有勇气去寻找和承担那些可以推动科技进步的课题。因此,我们研究组内部提出了“横向课题按纵向课题要求,面上项目按重点项目要求”的口号,促进了科技创新成果的不断产生。

依据研究方向的不同,本论文集分为6章,基本上每章覆盖一个研究方向。各章内容虽然不同,但实际上存在有内在的联系。例如,空间杆系结构大变形内力分析的UL列式法的建立,得益于双重非线性边界元研究中打下的有限变形理论的坚实基础。论文集中很多论文的

研究思路其实是相同的,就是认识到任何力学问题的解是一个未知函数,它总可以用一组已知的标准基函数的组合去近似,从而将求未知函数转化为求已知标准函数的组合系数问题。这种标准函数可以是有限元的分片函数,也可以是三角级数序列,也可以是振型坐标。通过这些论文的不同研究对象,读者可以发现更多有益的东西。

美国一位著名的华裔教授曾经自豪地对我说过:“在美国,没有华人的学校一定不是好学校”。在中国人走向世界的今天,本论文集中英文混排的格式,有望起到国际学术交流的作用。

最后,我们要感谢国家自然科学基金委对本人和研究小组的长期资助和支持。早期的力学研究,是在杜庆华、嵇醒两位导师的带领下靠国家自然科学基金重点项目资助完成的。桥梁方面的研究,特别是那些为今后桥梁工程发展所作的基础性和公益性的研究,几乎全靠国家自然科学基金的支持。每个国家自然科学基金资助项目的编号,均在相关的论文中载明,这里不再一一列出。

25年的研究历程,我得到了老师、同事、学生及家人的支持、帮助与参与,很多论文是共同研究成果,借此出版机会,向他们表示衷心的感谢。将众多论文重新编排、制图及校对,是一项非常繁重的工作,我的众多研究生与出版社一道,付出了巨大的努力。尽管如此,错误与遗漏在所难免,敬请读者不吝批评指正。

著者 陈政清

2007年4月

目 次

自 序

第 1 部分 索杆柔性结构的三维大变形分析方法与应用

- 导 言..... (3)
- 空间杆系结构大挠度问题内力分析的 UL 列式法..... 陈政清,曾庆元,颜全胜(4)
- Geometric nonlinear analysis of flexible spatial beam structures
..... Z. Q. Chen , T. J. A. Agar(14)
- 基于 UL 列式的两节点悬链线索元非线性有限元分析 杨孟刚,陈政清(33)
- 大跨度斜拉桥的非线性分析 陈政清,颜全胜(42)
- 悬索桥主缆初始位形的悬链线方程精细迭代分析法..... 陈常松,陈政清,颜东煌(47)

第 2 部分 柔性桥梁风致振动

- 导 言..... (61)
- Finite element-based flutter analysis of cable suspended bridges-discussion
..... Z. Q. Chen, T. J. A. Agar(62)
- The three dimensional analysis and behaviors investigation on the critical flutter
state of bridges Z. Q. Chen(65)
- 桥梁风致颤振临界状态的全域自动搜索法 华旭刚,陈政清(72)
- Wind-induced self-excited loads on bridges
..... Z. Q. Chen, X. D. Yu, G. Yang, B. F. Spencer Jr(79)
- 大跨桥梁颤振自激力的强迫振动法研究 陈政清,于向东(95)
- 桥梁颤振导数识别的时域法与频域法对比研究 陈政清,胡建华(107)
- 数值模拟桥梁断面气动导数和颤振临界风速 祝志文,陈政清(118)
- Identification of flutter derivatives applying the forced vibration method in bridge
wind-resistant safety assessment Yu Xiangdong, Chen zhengqing(126)
- 有偏心桥梁断面气动导数识别的分段扩阶最小二乘迭代法
..... 罗廷忠,陈政清,韩 艳(136)

第 3 部分 拉索风雨振与控制

- 导 言..... (151)
- MR damping system for mitigating wind-rain induced vibration on Dongting Lake
cable-stayed bridge
..... Z. Q. Chen, X. Y. Wang, J. M. Ko, Y. Q. Ni, B. F. Spencer Jr, G. Yang, J. H. Hu(152)
- 斜拉桥拉索风雨振观测及其控制..... 王修勇,陈政清,倪一清(163)
- 斜拉桥拉索风雨激振的两质量三自由度理论模型..... 李寿英,陈政清,顾 明(172)

永磁调节式 MR 阻尼器试验研究及工程应用

..... 禹见达,陈政清,曹 宏,王修勇(181)

斜拉桥拉索风雨振响应特性..... 胡建华,王修勇,陈政清,倪一清,高赞明(187)

第 4 部分 双重非线性的边界元方法

导 言..... (201)

弹塑性体有限形变问题的边界元法及拉伸颈缩分析(博士学位论文)..... 陈政清(202)

A new approach to finite deformation problems of elastoplasticity-Boundary

element analysis method Z. Q. Chen, X. Ji(250)

Boundary element analysis of finite deformation problems of elastoplasticity

..... Z. Q. Chen, X. Ji(266)

第 5 部分 动力基础半空间理论的边界元方法

导 言..... (277)

轴对称动力扭转的边界单元法(BEM)及其在动力基础半空间理论中的应用

(硕士学位论文摘要稿)..... 陈政清(278)

轴对称空间弹性扭转动力问题变换方程之基本解 陈政清,王 磊(287)

The closed form of the dynamic fundamental solution of axisymmetric elasticity

..... Z. Q. Chen(292)

The BEM scheme for axisymmetric dynamic torsion problems and the evaluation

of dynamic stiffness of the foundation Chen Zhingqing(298)

第 6 部分 力学与桥梁工程应用的其他论文

导 言..... (311)

四边简支部分固定矩形薄板的弯曲..... 陈政清,钟正华,熊祝华(312)

The application of Weinstein-Chien's method—the upper and lower limits of

fundamental frequency of rectangular plates with edges being a mixture of

simply supported portions and clamped portions Chen Zhengqing(323)

万因斯坦-钱伟长法的应用——简支与固支混合边界矩形板基频上下限

..... 陈政清(334)

Fatigue damage reliability analysis for the nanjing Yangtze River bridge with the
structural health monitoring data

..... He Xuhui, Chen Zhengqing, Yu Zhiwu, Huang Fanglin(343)

双肢薄壁高墩施工过程稳定性分析的快速算法..... 李开言,陈政清,韩 艳(349)

确定斜拉桥索力的有约束优化方法 乔建东,陈政清(357)

钢箱提篮拱桥施工控制的关键技术研究 田仲初,陈得良,颜东煌,陈政清(364)

预应力混凝土桥梁收缩与徐变变形试验研究 胡 狄,陈政清(370)

附录 1 作者简介 (380)

附录 2 作者近年来已发表的论文目录 (382)

第 1 部分

The first part

索杆柔性结构的三维大变形 分析方法与应用

**The analysis and applications of Cable-Beam flexible
spatial structure with large displacements**

导 言

大多数土木工程结构都可以用线性理论来分析设计,但是不要忘记,我们实际上是生活在一个非线性的世界里,线性理论是人们认识和反映现实世界的一个近似。结构或构件柔到一定程度,就必须用几何非线性理论来分析,否则,误差太大甚至无法设计。1 km 以下的斜拉桥,非线性力学行为的影响一般在 20% 左右,但 1 km 左右的悬索桥,这种影响就可能是 100% 以上。因此,专门针对悬索桥设计的非线性分析理论——挠度理论在 19 世纪就已提出,在 20 世纪初得到广泛应用。

但是,非线性理论不是线性理论的一种自然延伸,真实的力的平衡方程应该建立在变形后的结构形态(structural configuration)上,这一构形恰好是待求的未知构形。为了能在当时无计算机的条件下获得设计应用,挠度理论本身及其求解方法都引入了多种近似。已故的著名桥梁专家李国豪院士 20 世纪 40 年代攻读博士学位,就是研究挠度理论的求解。

现代有限元方法能灵活地模拟各种复杂结构与边界条件,更适合工程实际应用。20 世纪 80 年代至 90 年代,很多学者都致力于开发基于几何非线性理论的杆系结构有限元方法用于各种柔性结构的求解,而不仅限于悬索桥的大变形分析。值得指出的是,在有限元历史上,杆系结构线性有限元最早建立,而在非线性领域,几何大变形的杆系结构有限元却是最后建立起来的,块件、平面、板壳有限元的非线性理论早在 20 世纪 70 年代就建立了。这是因为杆系结构各构件之间仅在结点有约束,并且空间梁单元具有 6 个广义自由度,其中 3 个转动自由度只在微转动时有意义,不具备累加性,所以,建立非线性理论的难度最大。

在当时的研究者中,著名的 ADINA 程序开发人、美国的 R. J. Bathe 教授提出了从连续介质力学的三维虚功增量方程推导空间梁结构非线性有限元分析方法的思路,这一思路的最大优点是建立在严格的非线性理论基础之上。但他建立的分析格式不是纯粹的杆系理论,每个单元刚阵都要由三维积分完成,并且只能用于矩形截面和圆形截面,难以实际应用。

作者于 1988 年有幸参与了我国设计的第一座 400 m 跨度的斜拉桥的几何非线性影响分析工作,因此,与国际上其他学者同时独立地投入到空间杆系结构大变形分析的有限元方法研究。本章论文是国际上最早研究杆系结构大变形有限元的文献之一,主要贡献在于:

1) 在 Bathe 思路基础上,建立了真正意义上的杆系结构几何非线性分析方法,即空间杆系结构大挠度问题内力分析的 UL 列式法。在这一方法中,单元刚阵可直接计算或由一维积分(这是为计算材料非线性准备的)完成,因而计算效率比 Bathe 提出的方法提高 50 倍以上,可真正用于实际的大型复杂结构的分析。

2) 以杆系结构为示范,表明任何一种广义结构单元的几何非线性分析方法均可从三维虚功增量方程出发,引入结构广义位移增量与质点位移增量之间的关系,再经适当解析积分导出。这些贡献得到了国际同行(包括 Bathe 本人)的高度评价。这一方法经多次改进并推广到索结构,由此产生了一系列研究成果。

作者依据这一方法编制了特别适用于桥梁结构的空静动力非线性有限元分析的 NACS 程序,1990 年用它确定了我国设计中的第一座达 400 m 跨度的斜拉桥各力学量的非线性影响因素,为我国最早建设的两座现代悬索桥及时提供了设计分析工具,在此后的重大柔性桥梁设计中一直得到应用。

空间杆系结构大挠度问题内力分析的 UL 列式法

陈政清, 曾庆元, 颜全胜

摘要:以三维连续体的虚功增量方程为基础, 导出了空间梁元大挠度问题内力分析的 UL 列式法. 提出了新的几何刚度矩阵形式. 理论与算例结果都表明: 采用本文方法所得精度与 ADINA 的 4 号梁元精度相同, 但计算时间大大减少, 并能用于任意形状截面的杆件. 用本文方法编制的 NACS 程序具有分析大型空间柔性结构在非规范荷载下的强非线性行为的能力, 已用于斜拉桥、悬索桥的非线性分析.

关键词:大型空间柔性结构; 非线性分析; UL 列式法

A UL formulation for internal force analysis of spatial frame structures with large displacements

Chen Zhengqing, Zeng Qingyuan, Yan Quansheng

Abstract :Based on the virtual work increment equation for the three-dimensional continuum, the update lagrangian formulation for large displacement analysis of spatial beam elements was developed and a new type of geometric stiffness matrix was presented. Compared with No. 4 Element in ADINA, the proposed method has the same accuracy but the computing cost reduces greatly. It is also suitable for beams with arbitrary section. A computer program NACS developed by the proposed method is available for the analysis of strong nonlinear behavior of large flexible spatial structures under overloaded condition, and it has been used for nonlinear analysis of cable stayed bridge and suspension bridges.

Key words :large flexible spatial structures; nonlinear analysis; UL formulation method

工程结构在极限荷载、灾害性荷载等超常规荷载下的行为是当前工程界普遍关心的一个问题. 它对杆系结构的非线性分析理论从 3 个方面提出了更高的要求: 第 1, 必须具备描述充分大的变形的能力; 第 2, 要有很高的计算效率, 否则难以分析大型结构; 第 3, 要能描述结构材料的非线性行为. 作为大型柔性结构极限承载力研究工作的第 1 步, 本文先致力于研究一种满足前 2 个要求的分析方法.

三维连续体的虚功增量方程是计算力学的新成果^[1]. 它有明确的参考状态, 分为始终以初始状态为参考的总体拉格朗日列式法(TL 法)和以 T 时刻状态为参考的修正的拉格朗日列式法(UL 法). 虚功增量方程中的应力应变均按有限变形理论严格定义, 可以毫无困难地应用于任何大变形、大应变以及材料非线性问题.

1979 年 Bathe 应用虚功增量方程建立了空间梁元大挠度(大旋转小应变)分析方法, 并且据此编制了 ADINA 程序的 4 号梁元^[2]. 4 号梁元可以用于描述很大的变形, 材料可为线弹性或弹塑性. 遗憾的是, 4 号梁元是一种三维应力分析格式, 进行非线性分析时在一个单元内要

计算多达 245 个积分点的应力,梁的截面型式也局限于矩形与圆环型.显然,直接应用 4 号梁元作为大型复杂结构的分析几乎是不可能的.

本文方法的基本思想是仍以三维虚功增量方程为出发点,但在推导中引入沿梁截面的解析积分,把三维积分降为一维积分,从而把上述 4 号梁元的三维应力分析格式推广到工程适用的截面内力分析格式,这对纯几何非线性问题可保证取得与 ADINA 的 4 号梁元相同的精度.由于只要计算沿梁中性轴方向的一维积分,因此,计算量大大减少,还能适用于任意形状截面的杆件.本文方法从严格的虚功增量方程出发,推导结果可以反映截面内力与应变之间的各种耦合关系.此外,提出了几何刚阵的新的改进形式.那种只考虑压弯效应的几何刚阵(梁柱理论)^[3],正好是本文几何刚度的一种简化形式.

1 三维连续体虚功增量方程

目前,大变形问题的数值分析多用于增量法.设初始状态为零时刻,经过若干步加载后到达时刻 T .此时, T 时刻应变状态已经求得,由此状态计算出 T 到 $T+\Delta T$ 这一步的增量,累加后就得到下一个变形状态 $T+\Delta T$ 时刻的值.

图 1 表示了一个梁元变形过程中 3 个典型时刻的构形,整个杆系结构的全局坐标系是固定不变的直角坐标系 $\bar{x}_i$,单个梁元的局部坐标系始终与固定于梁上的主惯性坐标系 rst 重合,由于梁的应变微小,可以认为坐标系 rst 只作刚性旋转,始终保持为直线坐标系.采用增量法求解时,一切状态量都是时间的函数.用左上角标来标记时间(见图 1).必要时,还用左下角标表明度量的参考状态.但约定,左下角标的缺省值是 T ,或者说无左下角标的量都是以时刻 T 为参考来度量的,这正是 UL 法的特征.至于 UL 法的增量,总是指由 T 到这一加载步内的增量,且以 T 时刻为参考和度量,因此,可不作任何时间标记.例如, ${}^{T+\Delta T}_0 u_i$ 是以零时刻为参考度量的 $T+\Delta T$ 时刻的位移; ${}^{T+\Delta T}_T u_i$ 是以 T 时刻为参考度量的 $T+\Delta T$ 时刻的位移;而 u_i 是以时刻 T 为参考度量的位移增量.

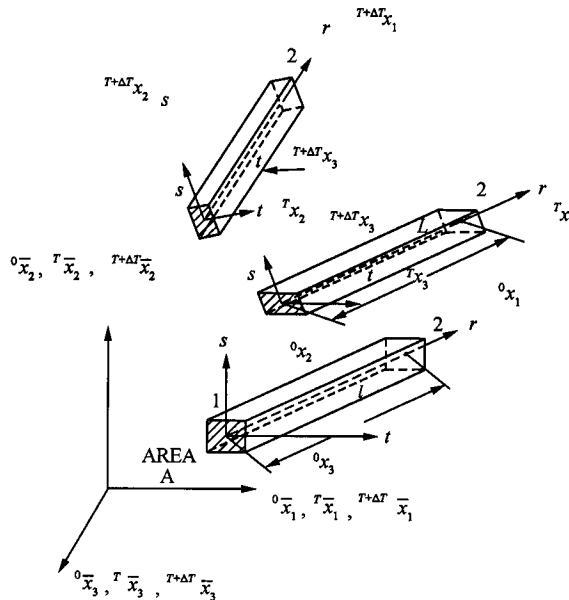


图 1 梁元的全局坐标系与局部坐标系

不难理解,以 T 时刻为度量参考时,

$${}^T u_i = {}^T_T u_i = 0. \quad (1)$$

式(1)使许多公式得到简化,这正是 UL 法的优点之一. 例如 $T+\Delta T$ 时刻的位移就是位移增量:

$${}^{T+\Delta T} u_i = {}^T u_i + u_i = u_i. \quad (2)$$

大变形问题中必须使用格林应变. 在 UL 法中,格林应变增量正好等于格林应变本身,由基本定义可以推出^[2,4]:

$${}^{T+\Delta T} \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij}. \quad (3)$$

式中:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (4)$$

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j} \quad (5)$$

分别称为格林应变增量 $\epsilon_{i,j}$ 的线性部分和非线性部分.

大变形理论严格区分变形前后状态,这导致应力理论的复杂化. 与格林应变相对应的应力是克希霍夫应力 ${}^{T+\Delta T} S_{ij}$ 而不是通常的柯西应力 ${}^{T+\Delta T} \sigma_{ij}$, 限于篇幅,这里不加证明地列出下列结论:

$$\begin{aligned} {}^T S_{i,j} &= {}^T \sigma_{i,j}, \\ {}^{T+\Delta T} S_{i,j} &= {}^T S_{i,j} + S_{i,j}. \end{aligned} \quad (6)$$

式中: $S_{i,j}$ 为与格林应变增量 $\epsilon_{i,j}$ 对应的应力增量. 此外,在 $T+\Delta T$ 时刻,只要及时转换参考状态为 $T+\Delta T$ 状态, ${}^{T+\Delta T} S_{i,j}$ 就自动转换为柯西应力 ${}^{T+\Delta T} \sigma_{i,j}$. 更详细的论述可见文献[4]第1章.

现在写出以时刻为参考的虚功方程:

$$\int_{{}^T V} {}^{T+\Delta T} S_{ij} \delta {}^{T+\Delta T} \epsilon_{ij} {}^T dV = {}^{T+\Delta T} R. \quad (7)$$

式中 δ 表示变分, ${}^{T+\Delta T} R$ 是到 $T+\Delta T$ 时刻为止已施加的总外载所作的外虚功. 将式(7)代入式(3)~(6),经过一个含增量线性化的推导过程后,便得有名的 UL 列式的虚功增量方程:

$$\int_{{}^T V} C_{ijkl} e_{k,i} \delta e_{i,j} \cdot {}^T dV + \int_{{}^T V} {}^T \sigma_{i,j} \delta \eta_{i,j} {}^T dV = {}^{T+\Delta T} R - \int_{{}^T V} {}^T \sigma_{i,j} \delta e_{i,j} \cdot {}^T dV. \quad (8)$$

式中已引用增量型本构关系:

$$S_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \approx C_{ijkl} e_{ij}. \quad (9)$$

对式(8)作有限元离散,等式左边第1项导出通常的线性刚阵;第2项导出所谓的初应力阵,工程上常称为几何刚阵. 等式右端第一项将导出 $T+\Delta T$ 时刻的等效节点荷载向量,而第2项是 T 时刻的等效节点力向量,2项合起来代表 T 到 $T+\Delta$ 时刻实际应施加的荷载,它包括外荷载增量与尚未平衡的残余力. 因此,式(8)本身包含了平衡校正的理论,这是一个很大的优点. 值得指出的是,式(8)的积分域是 T 时刻物体占据的空间 ${}^T V$,这表明式(8)考虑了由 0 到 T 时刻的物体几何形状变化. 由于已知的几何构形是 ${}^0 V$,对 ${}^T V$ 的积分是通过复杂的空间变换来实现的^[2].

2 大旋转小应变空间梁元的广义增量平衡方程

按弹性力学的观点,梁是典型的一维结构,因为假定梁中任一质点位移都用广义位移——

中性轴的位移与转角来描述. 利用这种广义位移与质点位移的关系, 可由式(8)导出关于广义应力应变增量的平衡方程.

设图 2 所示的两端固支梁正好处于 T 时刻. 主惯性坐标系 rst 取为局部坐标系. 因为 T 时刻到 $T + \Delta T$ 时刻的变形仍可视作小变形, 所以, 以 T 时刻为参考的位移增量与广义位移增量之间的关系仍可借用经典梁小变形理论的平截面假定与直法线假定. 设梁的广义位移增量 $\{U\}$ 为

$$\{U\}^T = \{U_r, U_s, U_t, \theta_r, \theta_s, \theta_t\}. \quad (10)$$

图 2 T 时刻的梁元

式中: 前 3 个分量是轴向位移, 后 3 个分量是绕轴的转角, 它们都仅是坐标 r 的一元函数, 且以坐标轴正向为正. 记号 $\{\}^T$ 表示向量的转置, 以下均同. 梁截面 A 上任一点 $P(r, s, t)$ (图 2) 的位移记为

$$\{u\}^T = \{u_r, u_s, u_t\}^T. \quad (11)$$

借用梁的小变形理论可导出如下增量关系:

$$\begin{aligned} \{u\} &= [A]\{U\}, \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & t & -s \\ 0 & 1 & 0 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)包括了梁的弯曲, 拉压与扭转(近似为圆轴扭转)变形. 将式(12)代入式(4), 可以计算格林应变增量的线性部分, 它只有 3 个不为零的分量.

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= U'_r + \theta'_{t,s} - \theta'_{r,s} \\ e_{rs} &= e_{sr} = -\frac{1}{2}\theta'_{t,t} \\ e_{rt} &= e_{tr} = \frac{1}{2}\theta'_{r,s} \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

于是, 非线性部分也只需按式(5)计算对应的 3 个分量:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{rr} &\approx \frac{1}{2}[(\theta_t - \theta'_{r,s})^2 + (\theta_s - \theta'_{t,t})^2] \\ \eta_{rs} &= \eta_{sr} \approx \frac{1}{2}[(\theta'_{t,s} - \theta'_{r,t})\theta_t - (\theta_s - \theta'_{r,s}) \cdot \theta_r] \\ \eta_{rt} &= \eta_{tr} \approx \frac{1}{2}[(\theta'_{t,t} - \theta'_{r,s})\theta_s - (\theta_t - \theta'_{r,t}) \cdot \theta_r] \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

式(13)和(14)中, 撇号表示对 r 的微分 $\frac{d}{dr}$.

假定梁是弹性材料不计侧面收缩(等效于泊松比 $\nu=0$), 由于只有 3 个非零应变分量, 所以, 虚功增量方程式(8)可简化为:

$$I_1 + I_2 = I_3 - I_4. \quad (15)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_{T_V} (E e_n \delta e_n + 4 G e_n \delta e_n + 4 G e_n \delta e_n) \cdot^T dV \\ I_2 &= \int_{T_V} (^T \sigma_n \delta \eta_n + 2 ^T \sigma_n \delta \eta_n + 2 ^T \sigma_n \delta \eta_n) \cdot^T dV \\ I_3 &= {}^{T+\Delta T} R \\ I_4 &= \int_{T_V} (^T \sigma_n \delta e_n + 2 ^T \sigma_n \delta e_n + 2 ^T \sigma_n \delta e_n) \cdot^T dV \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

再将式(13), (14)代入式(16)中, 则式(16)各积分的被积函数成为广义位移增量 $\{U\}$ 与坐标 rst 的函数. 由于未知函数 $\{U\}$ 仅是 r 的函数, 可以先对式(16)作沿梁截面 A 的积分, 也是关于变量 s 和 t 的积分, 这样, 将把式(16)的三维积分简化为一维积分. 积分过程中应用了下列关系式或定义式.

几何关系式:

$$\begin{aligned} \int_A dA &= A; \int_A t dA = \int_A s dA = \int_A t \cdot s dA = 0; \\ \int_A t^2 dA &= I_s; \int_A s^2 dA = I_t; I_r = I_s + I_t. \end{aligned} \quad (17)$$

截面内力增量定义式:

$$\begin{aligned} N &= \int_A S_n dA; M_r = \int_A (S_n \cdot s - S_n \cdot t) dA; \\ M_s &= \int_A S_n \cdot t dA; M_t = - \int_A S_n \cdot s dA. \end{aligned} \quad (18)$$

截面内力定义式:

$$\begin{aligned} {}^T N &= \int_A {}^T \sigma_n dA; {}^T M_r = \int_A (^T \sigma_n \cdot s - {}^T \sigma_n \cdot t) dA; \\ {}^T Q_s &= \int_A {}^T \sigma_n dA; {}^T Q_t = \int_A {}^T \sigma_n dA; \\ {}^T M_s &= \int_A {}^T \sigma_n \cdot t dA; {}^T M_t = - \int_A {}^T \sigma_n \cdot s dA. \end{aligned} \quad (19)$$

截面内力系数:

$$\begin{aligned} {}^T R_1 &= \int_A {}^T \sigma_n (t^2 + s^2) dA = {}^T N \frac{I_r}{A}; \\ {}^T R_2 &= - \int_A {}^T \sigma_n \cdot t dA = {}^T M_r \frac{I_t}{I_r}; \\ {}^T R_3 &= \int_A {}^T \sigma_n \cdot s dA = {}^T M_r \frac{I_t}{I_r}. \end{aligned} \quad (20)$$

系数 R_1 称为Wagner系数, 仅在不计翘曲应力时才等于 ${}^T N \frac{I_r}{A}$. 易见 ${}^T M_r = R_3 + R_2$.

利用以上关系式, 最后得到(其中 L 是单元长度):

$$I_1 = \int_0^L \delta\{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dr. \quad (21)$$

式中:

$$\{\epsilon\}^T = \{U'_r, \theta'_r, \theta'_s, \theta'_t\}^T,$$

$$[D] = \begin{bmatrix} EA & & & \\ & GI_r & & \\ & & EI_s & \\ & & & EI_t \end{bmatrix},$$

$$I_2 = \int_0^L \delta\{\eta\}^T [{}^T\sigma] \{\eta\} dr. \quad (22)$$

$$\{\eta\}^T = \{\theta_r, \theta_s, \theta_t, \theta'_r, \theta'_s, \theta'_t\}^T,$$

$$[{}^T\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & -{}^TQ_s & -{}^TQ_t & 0 & 0 & 0 \\ & N & 0 & {}^TM_t & 0 & -R_3 \\ & & N & -{}^TM_s & R_2 & 0 \\ & & & R_1 & 0 & 0 \\ \text{对称} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = {}^{T+\Delta T}R. \quad (23)$$

$$I_4 = \int_0^L \delta\{\epsilon\}^T [{}^T\sigma] dr. \quad (24)$$

$$\{{}^T\sigma\}^T = \{{}^TN, {}^TM_r, {}^TM_s, {}^TM_t\}^T.$$

式(15)与式(21)~(24)结合起来,便是本文得到的以广义应力应变表示的梁的虚功增量方程,它只含对中性轴 r 的积分,未知函数 $\{U\}$ 也只是 r 的函数. 只要给出 $\{U\}$ 的单元插值公式,就可得到梁的有限元平衡方程.

3 梁元的有限元平衡方程

取图 2 中梁的 2 个端点 I 和 J 为节点,定义单元节点广义位移增量(向量)为

$$\{\alpha\}^T = \{\{U\}_I^T, \{U\}_J^T\}^T. \quad (25)$$

式中 $\{U\}_I, \{U\}_J$ 分别是节点 I 和 J 按式(10)定义的广义位移增量. UL 法中,仍可借用小变形梁的插值函数描述广义位移增量 $\{U\}$:

$$\{U\} = [\Phi]\{\alpha\}. \quad (26)$$

式中:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \Phi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_2 & 0 & 0 & 0 & -\Phi_3 & \cdots & 0 & \Phi_5 & 0 & 0 & 0 & -\Phi_6 \\ 0 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \Phi_5 & 0 & \Phi_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \Phi_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Phi'_2 & 0 & -\Phi'_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\Phi'_5 & 0 & -\Phi'_6 & 0 \\ 0 & \Phi'_1 & 0 & 0 & 0 & -\Phi'_3 & \cdots & 0 & \Phi'_5 & 0 & 0 & 0 & -\Phi'_6 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

采用无量纲坐标 $\xi=r/L$, $\Phi_1 \sim \Phi_6$ 定义为:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 1 - \xi; \quad \Phi_4 = \xi; \\ \Phi_2 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3; \quad \Phi_5 = 3\xi^2 - 2\xi^3; \end{aligned}$$

$$\Phi_3 = L(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3); \Phi_6 = L(\xi^2 - \xi^3). \quad (28)$$

式中,撇号仍表示对 r 的导数. 依据 $\{\varepsilon\}$ 与 $\{\eta\}$ 的定义式(21)和(22),不难从式(26)导出:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{a\} \quad (29)$$

$$\{\eta\} = [G]\{a\}. \quad (30)$$

将式(25)~(30)代入式(21)~(24),再代入式(15),利用变分引理后得到有限元增量平衡方程:

$$[K_0 + K_\sigma]\{a\} = {}^{T+\Delta T}\{F\} - {}^T\{\psi\}. \quad (31)$$

式中

$$[K_0] = \int_0^l [B]^T [D] [B] dr. \quad (32)$$

经积分后,可以看出它就是通常的梁元线性刚度,其显式不再列出,可参考文献[5]. 而

$$[K_\sigma] = \int_0^l [G]^T [{}^T\sigma] [G] dr \quad (33)$$

是单元几何刚度(初应力阵),它一般采用数值积分法计算,仅在加以简化后可以得到积分显式. 例如,假定单元内轴力 TN 为常量,且只考虑转角 θ_i, θ_j 与 TN 的耦合关系,积分后正好得到按梁—柱理论导出的几何刚度(该阵的形式可见文献[3]). 这表明,梁—柱理论仅是本文方法的一种简化情况. 式(31)中:

$${}^T\{\Psi\} = \int_0^l [B]^T \{{}^T\sigma\} dr. \quad (34)$$

式(34)是 T 时刻单元节点等效节点力向量的理论计算公式. 由于它与单元节点等效荷载相平衡,所以,实际计算中可直接用单元端节点上的内力代替. 至于式(31)中的 ${}^{T+\Delta T}F$,它是由式(23)定义的 I_3 导出的等效节点荷载向量. 由于梁问题的特殊性, ${}^{T+\Delta T}F$ 有一套成熟的结构力学方法来计算,因此,不需要给出有限元理论公式. 在编制的 NACS 程序中, ${}^{T+\Delta T}$ 式按文献[5]的方法来计算,它可以处理 8 类单元荷载.

式(31)是单元在局部坐标系下的平衡方程,而局部坐标系本身随加载步而变化. 为了反映这一变化(实质是几何构形的变化),必须将式(31)转换到不变的全局坐标系中去. 计算这一坐标转换矩阵的原理与方法可以参考文献[2],作者在 NACS 程序中就采用了这一方法. 另外,几何刚阵的数值积分采用了文献[2]推荐的 Newton-Cotes 积分法. 关于这一积分法的介绍可以参见文献[6].

最后应指出,本文只考虑了与变形无关的荷载,它可用结构力学的常规方法计算等效节点荷载 ${}^{T+\Delta T}F$. 如果荷载与变形有关,问题会更复杂一些.

4 NACS 程序与算例

依据本文方法,编制了斜拉桥、悬索桥空间杆系结构大挠度分析程序 NACS. 它包括梁、杆(只承受轴力)、索 3 种单元,其中索单元的非线性从等效弹模与几何刚度两方面来描述,并可加初拉力;具有包括温度荷载在内的 8 种荷载模式,可以方便地模拟各种加载条件. 根据桥梁结构分析特点,对恒载进行了专门处理,简化了它的输入方式,节点与单元输入具有自动生成功能. 程序引进了 ADINA 中的约束方程方法,它可以十分灵活地处理结构的各种刚性约束关系,例如刚臂、刚性面、锚固点偏心等等. 同时, NACS 程序又是一个斜拉桥悬索桥分析的专用程序. 它配备了按刚性成桥原则调整索力,恒载活载依次加载,计算影响线,恒载内力输入法进