

中学基础



知识丛书

数学

基础知识手册

全国三十八所重点中学教师/编写

(精华修订版)



吉林人民出版社

数学基础知识手册

(高中)

全国三十八所重点中学教师/编

吉林人民出版社

(吉)新登字 01 号

数学基础知识手册

全国三十八所重点中学教师 编

陈葵光 责任校对

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春市长航印刷厂印刷

*

787×1092 毫米 32 开本 13.5 印张 363 千字

1997 年 12 月第 1 版 1998 年 8 月第 2 次印刷

印数:6 200—10 000 册

ISBN 7-206-02820-9

G·747 定价:13.80 元

前 言

《数学基础知识手册》是根据国家教委颁发的《全日制中学数学教学大纲(修订本)》和 1997 年《考试说明》的要求,依据 1995 年调整和修改后的高级中学数学教材编写的一部工具书。

本书按教材编排顺序每章均分三部分编写,第一部分为“导学精要”,设有【知识要点】,【学法指导】,【常用的数学思想方法】,【数学规律小结】,【例题精析】,【疑难问题解答】等六个栏目;第二部分为“热点专题 方法技巧”,根据各章的内容选择热点问题进行分析、探讨,同时传授解决此类问题的方法和技巧;第三部分为“常用概念、公式及定理”,在书后附有“数学史资料”,对数学科学的发展及著名数学家加以介绍。本书突出重点,抓住关键,注重能力的培养,让学生掌握解题规律、方法和技巧,提高分析问题和解决问题的能力,对素质教育一定能够起到促进作用。

参加本书编写的有吉林、辽宁、黑龙江、内蒙古、河北、河南、湖北、湖南、江西、山东、江苏、安徽、甘肃、陕西、山西、广西、四川、贵州、青海、云南、新疆等 25 个省 38 所重点中学以及部分教育学院的教师,他们都是一线有多年教学经验的把关教师,本书是他们多年来的教学经验的集成。

在编写过程中,我们参考了有关著作、报刊和辞书,吸取了其中的精华,并注意数学学科的探索性成果,但限于水平,错漏之处在所难免,希望广大读者批评指正。

编者 1997 年 10 月

目 录

第一章 幂函数 指数函数和对数函数	(1)
第一部分 导学精要	(1)
【知识要点】	(1)
【学法指导】	(20)
一、集合	(21)
二、一元二次不等式	(22)
三、映射与函数	(23)
四、幂函数	(25)
五、指数函数和对数函数	(26)
【常用的数学思想方法】	(28)
一、几个重要的数学思想及特点	(28)
二、本章内容所涉及到的数学思想和方法	(29)
【数学规律小结】	(30)
【例题精析】	(32)
【疑难问题解答】	(39)
第二部分 热点专题 方法技巧	(45)
【函数与函数思想】	(45)
一、映射与函数的概念	(46)
二、函数图象与函数性质	(46)
三、函数思想及函数性质的应用	(47)
第三部分 常用概念 公式及定理	(55)
一、常用的概念	(55)
二、常用的符号	(55)
三、常用的公式	(56)
四、常用的定理	(57)

第二章 三角函数	(58)
第一部分 导学精要	(58)
【知识要点】	(58)
【学法指导】	(63)
一、任意角的三角函数	(63)
二、三角函数的图象和性质	(65)
【常用的数学思想方法】	(67)
【数学规律小结】	(67)
【例题精析】	(68)
【疑难问题解答】	(73)
第二部分 热点专题 方法技巧	(74)
一、三角函数的最值(值域)问题	(74)
二、数形结合在三角函数中的应用	(78)
三、换元法在三角函数中的应用	(80)
第三部分 常用概念 公式及定理	(82)
第三章 两角和与差的三角函数	(86)
第一部分 导学精要	(86)
【知识要点】	(86)
【学法指导】	(87)
【常用的数学思想方法】	(89)
【数学规律小结】	(90)
【例题精析】	(91)
【疑难问题解答】	(94)
一、半角公式的符号选取问题的由来	(94)
二、关于半角正切的三个公式的符号问题	(95)
第二部分 热点专题 方法技巧	(98)
一、三角函数的求值问题	(98)
二、三角形中的三角函数问题	(99)

三、三角函数中的最值问题	(101)
第三部分 常用概念 公式及定理	(103)
第四章 反三角函数和简单三角方程	(105)
第一部分 导学精要	(105)
【知识要点】	(105)
【学法指导】	(107)
【常用的数学思想方法】	(108)
【数学规律小结】	(110)
【例题精析】	(110)
【疑难问题解答】	(119)
第二部分 热点专题 方法技巧	(125)
一、反三角函数的运算	(125)
二、反三角函数等式的证明	(129)
三、反三角函数方程和反三角函数不等式	(132)
四、简单三角方程	(138)
第三部分 常用概念 公式及定理	(141)
一、重要数据	(141)
二、常用重要公式	(142)
第五章 不等式	(143)
第一部分 导学精要	(143)
【知识要点】	(143)
【学法指导】	(143)
【常用的数学思想方法】	(145)
【数学规律小结】	(147)
【例题精析】	(149)
【疑难问题解答】	(152)
第二部分 热点专题 方法技巧	(154)
一、数形结合在不等式中应用	(154)

二、均值不等式及应用	(159)
第三部分 常用概念 公式及定理	(161)
第六章 数列极限和数学归纳法	(163)
第一部分 导学精要	(163)
【知识要点】	(163)
【学法指导】	(163)
【常用的数学思想方法】	(173)
【数学规律小结】	(180)
【例题精析】	(181)
【疑难问题解答】	(189)
第二部分 热点专题 方法技巧	(194)
一、等差、等比数列的基本运算和性质	(194)
二、数列极限的求法	(196)
三、数学归纳法的应用	(198)
第三部分 常用概念 公式及定理	(201)
一、基本概念	(201)
二、基本公式、定理	(202)
第七章 复数	(204)
第一部分 导学精要	(204)
【知识要点】	(204)
【学法指导】	(206)
【常用的数学思想方法】	(210)
【数学规律小结】	(211)
【例题精析】	(211)
【疑难问题解答】	(215)
第二部分 热点专题 方法技巧	(218)
一、实数、纯虚数的共轭性质的运用	(218)
二、利用复数的三角式来解决三角函数的求值问题	

.....	(219)
三、和、差模的运算	(219)
四、复数集上点的轨迹方程的求法	(220)
第三部分 常用概念 公式及定理	(222)
一、常用数据	(222)
二、常用符号	(222)
三、常用公式	(223)
四、基本概念	(223)
五、常用性质、定理	(223)
第八章 排列 组合 二项式定理	(226)
第一部分 导学精要	(226)
【知识要点】	(226)
【学法指导】	(226)
【常用的数学思想方法】	(238)
【数学规律小结】	(241)
【例题精析】	(245)
【疑难问题解答】	(261)
第二部分 热点专题 方法技巧	(265)
第三部分 常用概念 公式及定理	(265)
第九章 直线和平面	(266)
第一部分 导学精要	(266)
【知识要点】	(266)
【学法指导】	(267)
【常用的数学思想方法】	(268)
【数学规律小结】	(268)
【例题精析】	(269)
【疑难问题解答】	(273)
第二部分 热点专题 方法技巧	(275)

一、求异面直线所成角及二面角	(275)
二、异面直线的距离	(277)
三、折叠与定值	(280)
第三部分 常用概念 公式及定理	(281)
一、公理	(281)
二、概念	(282)
三、定理	(282)
四、公式	(284)
五、符号	(285)
第十章 多面体和旋转体	(286)
第一部分 导学精要	(286)
【知识要点】	(286)
【学法指导】	(288)
【常用的数学思想方法】	(289)
【数学规律小结】	(292)
【例题精析】	(294)
【疑难问题解答】	(300)
第二部分 热点专题 方法技巧	(305)
一、三棱锥问题	(305)
二、截面问题	(307)
三、展开图题	(311)
第三部分 常用概念 公式及定理	(312)
一、概念、性质、公理、定理	(312)
二、基本公式、符号及常用数据	(315)
第十一章 直线	(319)
第一部分 导学精要	(319)
【知识要点】	(319)
【学法指导】	(319)

【常用的数学思想方法】	(324)
【数学规律小结】	(325)
【例题精析】	(326)
【疑难问题解答】	(331)
第二部分 热点专题 方法技巧	(334)
一、直线系问题	(334)
二、对称问题	(337)
三、最值问题	(339)
第三部分 常用概念 公式及定理	(342)
一、常用公式	(342)
二、基本概念	(343)
三、两条直线位置关系的判定与性质定理	(344)
第十二章 圆锥曲线	(345)
第一部分 导学精要	(345)
【知识要点】	(345)
【学法指导】	(350)
【常用的数学思想方法】	(352)
【数学规律小结】	(353)
【例题精析】	(356)
【疑难问题解答】	(363)
第二部分 热点专题 方法技巧	(367)
一、轨迹方程的求法	(367)
二、应用圆锥曲线的定义解题	(372)
第三部分 常用概念 公式及定理	(375)
第十三章 参数方程和极坐标	(378)
第一部分 导学精要	(378)
【知识要点】	(378)
【学法指导】	(382)

【常用的数学思想方法】	(383)
【数学规律小结】	(384)
【例题精析】	(386)
【疑难问题解答】	(391)
第二部分 热点专题 方法技巧	(394)
一、运用 $\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases}$ 中 t 的几何意义解题	(394)
二、运用圆锥曲线的统一极坐标方程解题	(398)
第三部分 常用概念 公式及定理	(402)
数学史资料	(404)

第一章 幂函数 指数函数和对数函数

第一部分 导学精要

【知识要点】

一、集合

(一)集合的基本概念及其表示方法

1. 集合与元素

把具有某种属性的一些对象的全体,看成一个整体,便形成一个集合(简称集),通常用大写字母 A 、 B 、 C ……表示;集合中每一个对象叫做集合的一个元素,通常用小写字母 a 、 b 、 c ……表示.

2. 集合中元素的性质

集合有两个特性:整体性和确定性.

对于一个给定的集合,它的元素具有确定性、互异性、无序性和任意性.

3. 集合的表示方法

①列举法 ②描述法 ③图示法

4. 集合的分类

①按元素的属性分:

数集:元素是数的集合.

点集:元素是点的集合.

序对集:元素是有序数对的集合.

②按元素的多少分:

有限集:含有有限个元素的集合.

无限集:含有无限个元素的集合.

空集:不含任何元素的集合,记为 $\emptyset$.

(二)元素与集合之间的关系

如果 a 是集合 A 的元素,记为 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,记为 $a \notin A$ (或 $a \notin A$). 元素和集合的关系是属于或不属于关系,是个体与整体关系,通常称为从属关系.

常用的数集有:自然数集 N , 整数集 Z , 有理数集 Q , 实数集 R , 复数集 C , 无理数集 $\overline{Q}$, 奇数集 $\{2n-1\}$, 偶数集 $\{2n\}$ 等.

(三)集合与集合之间的关系

1. 包含关系

①子集:如果 $x \in A \Rightarrow x \in B$, 则集合 A 是集合 B 的子集, 记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

显然,任何集合是它自身的子集,即 $A \subseteq A$;空集是任何集合的子集.

②真子集:如果 $A \subseteq B$, 且至少存在一个 $y \in B$ 但 $y \notin A$, 则集合 A 叫做集合 B 的真子集, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

显然,空集不是自己的真子集,但是非空集合的真子集.

③全集:在某一问题中,若所有集合都是某个给定集合的子集,则这个给定的集合叫做全集,记为 I .

显然,一切集合都是这个全集 I 的子集.

2. 相等关系

对于两个集合 A, B , 如果 $A \subseteq B$, 同时 $B \subseteq A$, 那么集合 A 和集合 B 叫做集合的相等, 记为 $A = B$.

显然,两个相等的集合的元素完全相同.

3. 运算关系

集合的运算是在全集上进行的.

①交集:由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合叫做集合 A 与 B 交集, 记为 $A \cap B$, 即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

②并集:由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的并集,记为 $A \cup B$,即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

③补集:由全集 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合叫做集合 A 在 I 中的补集,记为 $\bar{A}$,即 $\bar{A} = \{x | x \in I \text{ 且 } x \notin A\}$.

(四)集合的逻辑关系

运用形式逻辑在运算律中进行推理.

1. 交集的运算性质

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A, & A \cap B &\subseteq A, \\ A \cap B &\subseteq B, & A \cap I &= A, \\ A \cap A &= A, & A \cap \emptyset &= \emptyset. \end{aligned}$$

2. 并集的运算性质

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A, & A \cup B &\supseteq A, \\ A \cup B &\supseteq B, & A \cup I &= I, \\ A \cup A &= A, & A \cup \emptyset &= A. \end{aligned}$$

3. 补集的运算性质

设全集为 I ,有:

$$\begin{aligned} \overline{\bar{A}} &= A, \quad \overline{\emptyset} = I, \quad \bar{I} = \emptyset, \\ A \cap \bar{A} &= \emptyset, \quad A \cup \bar{A} = I. \end{aligned}$$

4. 分配律、结合律

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

5. De Morgan 法则

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

6. 传递性

若集合 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则集合 $A \subseteq C$;

若集合 $A \subset B, B \subset C$, 则集合 $A \subset C$.

(五)有限集合的子集个数公式

1. 设集合 A 中有 n 元素, 则 A 的子集个数有: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ (个), 其中真子集个数有 $2^n - 1$ (个), 非空真子集个数有 $2^n - 2$ (个).

2. 有限集合间元素的个数公式

设有限集合 A 的元素个数为 $n(A)$, 易得

$$\textcircled{1} n(A) + n(\bar{A}) = n(I),$$

$$\textcircled{2} n(A \cap B) = n(A) - n(A \cap \bar{B}) = n(B) - n(B \cap \bar{A}),$$

$$\textcircled{3} n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

二、一元二次不等式

1. 不等式三条基本性质

① 如果 $a > b$, 那么 $a + c > b + c$,

② 如果 $a > b, c > 0$, 那么 $ac > bc$,

③ 如果 $a > b, c < 0$, 那么 $ac < bc$.

2. 一元一次不等式

通过去分母、去括号、移项、合并同类项后整理成 $ax > b$ 或 $ax < b$ 的形式.

解的情况如下表

a 的不等式取值	$ax > b$	$ax < b$
$a > 0$	$x > \frac{b}{a}$	$x < \frac{b}{a}$
$a < 0$	$x < \frac{b}{a}$	$x > \frac{b}{a}$
$a = 0$	当 $b < 0$ 时, $x \in R$ 当 $b \geq 0$ 时, $x \in \emptyset$	当 $b \leq 0$ 时, $x \in \emptyset$ 当 $b > 0$ 时, $x \in R$

3. 形如 $|ax+b|<c$, $|ax+b|>c$ ($c>0$) 的绝对值不等式

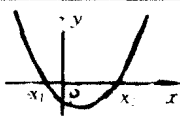
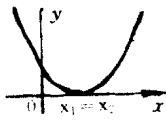
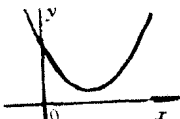
利用 $|x|<a$ 的解 $-a<x<a$ 及 $|x|>a$ 的解 $x<-a$ 或 $x>a$ ($a>0$) 来求解 $|ax+b|<c$, 先化为不等式组 $-c<ax+b<c$, 再换一次不等式的解法求出原不等式的解集; $|ax+b|>c$ 先化为 $ax+b>c$, 或 $ax+b<-c$, 再求原不等式的解集.

4. 一元二次不等式

① 定义: 含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是二次的不等式叫做一元二次不等式.

② 表达式: $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$ ($a\neq 0$)

③ 利用一元二次函数的图象和一元二次方程讨论一元二次不等式的解, 如下表.

判 别 式	一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$)	一元二次函数图象 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$)	一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ ($a>0$)	一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ ($a>0$)
$\Delta=b^2-4ac>0$	方程有两个相异实根 x_1, x_2 , (设 $x_1<x_2$)	 图象与 x 轴有两个交点	不等式的解在两根之外 $x<x_1$ 或 $x>x_2$	不等式的解在两根之间 $x_1<x<x_2$
$\Delta=b^2-4ac=0$	方程有两个相等实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	 图象与 x 轴有一个交点	$x\neq -\frac{b}{2a}$ 的一切实数	无实数解
$\Delta=b^2-4ac<0$	方程无实根	 图象与 x 轴无交点	$x\in R$	无实数解