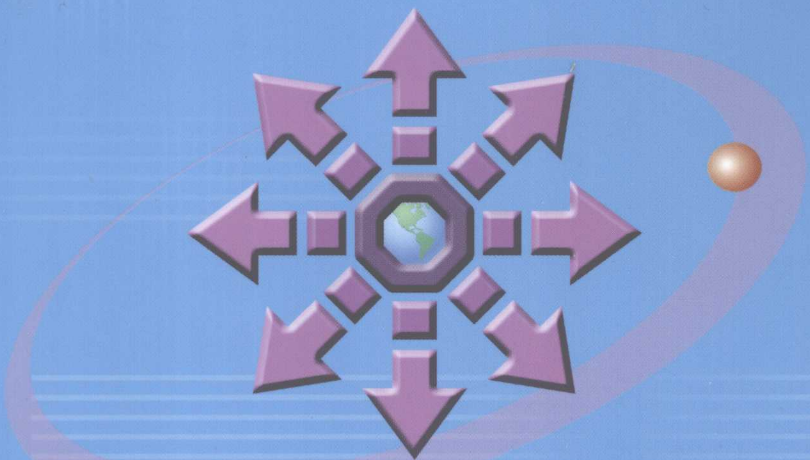
应用型本科理工类基础课程规划教材

高等数学（下）

李连富　白同亮　编著
李尚志　主审



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

应用型本科理工类基础课程规划教材

高等数学(下)

李连富　白同亮　编著

李尚志　主审

北京邮电大学出版社

·北京·

内 容 简 介

本书是在多年实施精讲多练教学法的基础上编写的。共分上下两册，下册包括多元函数微分法及其应用；重积分；曲线积分与曲面积分；各种积分之间的联系；无穷级数；微分方程。书末还附有应用软件介绍、简单数学建模练习题。本书主要针对应用型本科学生而编写，注意强化基本概念、基本理论、基本计算，注重利用计算机解决数学问题，注重应用数学知识解决实际问题能力的培养，注重数学思想方法的培养和数学思维的训练，注重自学能力的培养和提高。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下/李连富，白同亮编著. —北京：北京邮电大学出版社，2007

ISBN 978-7-5635-1376-5

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①李…②白…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 111724 号

书　　名：高等数学(下)
作　　者：李连富　白同亮
责任编辑：王晓丹
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt. edu. cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京源海印刷有限责任公司
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：18.75
字　　数：407 千字
版　　次：2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-1376-5　　定　价：26.00 元

前言

本书是在多年实施精讲多练教学法改革过程中讲授高等数学课程的基础上，专为应用型本科电子信息类各专业学生编写的，也可作为经管类本科和专科学生高等数学课程的教材或教学参考书。

本书编写力求体现"五多五少两充分一注重"的原则，即多一点思想方法，少一点死记硬背；多一点归纳引入，少一点演绎证明；多一点实例论证，少一点理论推导；多一点概念强化，少一点计算技巧；多一点模型渗透，少一点特殊题型；教学内容充分体现精讲多练教学法的实施成果，充分利用计算机解决实际问题；注重对学生自学能力和应用数学知识解决实际问题能力的培养。

本书从应用型本科学生的实际出发，以实例引入概念，讲解理论，用理论知识解决实际问题，逐步渗透数学模型思想，尽可能再现知识的归纳过程，每章前有引例，后有小结，每节前有导读，后有思考题。针对学生基础、理解能力及掌握数学知识能力的差异性，分层次配备例题和习题，注重基本概念的教学，精讲基本概念，多练基本方法，弱化理论推导和计算技巧，编写了大量强化基本概念的习题，用微元法思想统领多元微积分学，使抽象概念具体化，复杂问题简单化。

本书还附有各章相应的上机操作内容，利用 Mathematica 软件求解数学问题，同时附有各章的数学建模应用题，供学生课后练习。书中带"*"号的内容为选学内容，带"*"号的题目为选做题目。

本书由李连富、白同亮编著，李尚志主审。在编写过程中，大连理工大学城市学院基础教学部数学教研室全体教师都做了大量的工作，并得到北京邮电大学出版社的大力支持，在此一并致谢。

由于编者水平有限，又是初步探索，再加上时间仓促，错误和不足之处在所难免，恳请同行专家不吝赐教。

编　者

目　录

附录

第 7 章　多元函数微分法及其应用

在上册讨论了一元函数的微积分，在自然科学与工程技术的实际问题中，往往遇到几个变量互相联系、互相依赖的情形. 因此需要研究多元函数及其微积分.

本章在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分法及其应用. 重点是二元函数，然后把二元函数研究所得到的结论很自然地推广到二元以上的多元函数.

7.1　多元函数

通过本节的学习，应该理解多元函数的基本概念，会求二元函数的定义域和简单多元函数极限，了解多元函数的连续性.

7.1.1　多元函数的基本概念

前面研究的函数因变量仅仅依赖于一个自变量，称为一元函数. 在实践中经常遇到这样的情况：所要讨论的变量常常依赖于两个或更多个变量. 例如，圆柱体的体积 $V=\pi r^2 h$，这里 r 是圆柱的底面半径，h 是高. 只有当 r 和 h 确定时，V 的值才随之确定. 再如，理想气体状态方程 $pV=nRT$，将理想气体的压强 p，体积 V 和绝对温度 T 联系了起来，其中 n 是气体所含的摩尔数，R 是常数，从方程解出 p，可得 $p=\dfrac{nRT}{V}$，可见，理想气体

压强(p)的数值是随着气体所含的摩尔数(n),温度(T)与体积(V)的变化而变化.

以上问题中圆柱体的体积(V)和理想气体的压强(p)都随多个量的变化而变化,称这样的函数为多元函数.

定义 7.1.1 设 x,y,z 为 3 个变量,D 为平面点集,如果对于 D 内的任意一组数(x,y),按一定的法则 f,变量 z 总有唯一确定的数值与之对应,则称 z 是 x,y 的二元函数,记为 $z=f(x,y)$. x,y 称为自变量,z 称为因变量.平面点集 D 称为函数的定义域,点(x_0,y_0)处的函数值记为 $f(x_0,y_0)$,函数值 $f(x,y)$的全体构成的集合称为 f 的值域,记为 $f(D)$.即

$$f(D)=\{f(x,y)\mid(x,y)\in D\}$$

一般地,如果一个函数的自变量有 n 个,则称该函数为 n 元函数.

二元和二元以上的函数统称为多元函数.下面以二元函数为主,讨论多元函数.

一元函数的定义域多是区间,而二元函数的定义域一般是平面区域.

例 7.1.1 求函数 $z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$的定义域,并画出定义域的图形.

解 定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,图形是 xOy 面上的单位圆所围的区域,如图 7-1.

例 7.1.2 求函数 $z=\ln(x+y-1)$的定义域,并画出定义域的图形.

解 定义域为 $D=\{(x,y)\mid x+y>1\}$,图形是直线 $x+y=1$ 右侧的半个平面(直线不包括在内),如图 7-2.

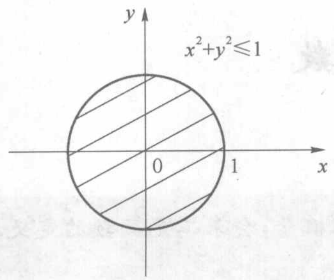


图 7-1

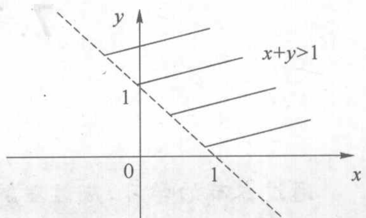


图 7-2

由上面两个例子可知,二元函数 $z=f(x,y)$刻画了 3 个变量 x,y,z 之间的变化规律,其定义域 D 一般是 xOy 平面上的一个区域.

对于二元函数 $z=f(x,y)$,其定义域 D 是平面 xOy 上的一个平面区域.对于 D 内任一点 $P(x,y)$,依照 $z=f(x,y)$,就有空间中的一个点 M 与之对应,点 M 的坐标为$(x,y,f(x,y))$,如图 7-3,空间中点 M 的全体就构成了函数 $z=f(x,y)$的图形.一般来说,二元函数的图形是一张对应于定义域 D 的曲面.

例如，函数 $z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ 的图形是球心在原点，半径为 1 的上半球面（如图 7-4）.

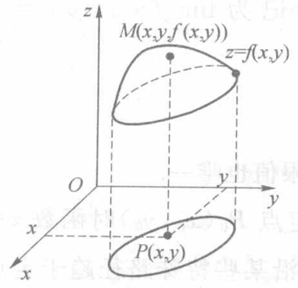


图 7-3

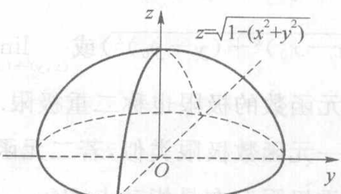


图 7-4

例 7.1.3 已知函数 $f(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}-2xy$，求：

(1) $f(tx,ty)$

(2) $f(2,1)$

解 (1) $f(tx,ty)=\sqrt{(tx)^4+(ty)^4}-2(tx)(ty)$

$$=t^2\sqrt{x^4+y^4}-2t^2xy$$

$$=t^2(\sqrt{x^4+y^4}-2xy)$$

$$=t^2f(x,y)$$

(2) $f(2,1)=\sqrt{17}-4$

7.1.2 多元函数的极限

一元函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限为 A（即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$）的含义是：当 x 无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于某一常数 A，即当 $(x-x_0)\to 0$ 时，$f(x)\to A$.

若将动点 x 与定点 x_0 之间的距离记为 ρ，即 $\rho=|x-x_0|$，则极限过程 $(x-x_0)\to 0$ 即可以表示为 $\rho\to 0$. 因此一元函数的极限可改写为 $\lim\limits_{\rho\to 0}f(x)=A$（其中 $\rho=|x-x_0|$）.

对于二元函数 $z=f(x,y)$，当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限怎样描述呢？

(x,y) 趋向于 (x_0,y_0) 的路径可以有任意多个（如图 7-5）. 若把动点 (x,y) 与定点 (x_0,y_0) 之间的距离也记为 ρ，则 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. 显然，无论 (x,y) 以何种路径趋向于 (x_0,y_0)，总可以用 $\rho\to 0$ 来表示 $(x,y)\to(x_0,y_0)$. 这样，就可以将一元函数极限概念推广到二元函数.

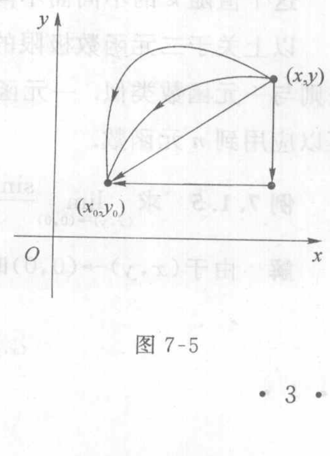


图 7-5

定义 7.1.2 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某去心邻城内有定义，若当动点 $P(x,y)$ 和定点 $P_0(x_0,$

y_0)之间的距离$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$趋于0时，函数$f(x,y)$趋于一个常数$A$，就说函数$z=f(x,y)$当$P$趋于$P_0$时极限为$A$，记为$\lim\limits_{\rho\to 0} f(x,y)=A$（其中$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$）或$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$.

二元函数的极限也称二重极限.

和一元函数极限类似，若二元函数的极限存在，极限值也唯一.

二重极限存在是指动点$P(x,y)$以任何路径趋于定点$P_0(x_0,y_0)$时函数$z=f(x,y)$都无限趋近于常数A，也就是说，如果动点$P(x,y)$只沿某些特殊路径趋于定点$P_0(x_0,y_0)$，函数$z=f(x,y)$无限趋近于某一定值，还不能由此判定函数极限存在，但另一方面，点$P(x,y)$沿不同的路径趋于定点$P_0(x_0,y_0)$时，函数$z=f(x,y)$趋于不同的值，则可以判定这个函数的极限不存在.

例 7.1.4 判断函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$在点(0,0)的极限是否存在?

解 当点$P(x,y)$沿x轴趋于点(0,0)时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0$$

当点$P(x,y)$沿y轴趋于点(0,0)时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0} 0=0$$

可见，点P沿这两个特殊路径（沿x轴或y轴）趋于(0,0)时，函数极限存在且相等，但不能说明$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$存在. 因为如果$P(x,y)$沿直线$y=kx$趋于(0,0)，有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k^2}{1+k^2}$$

这个值随k的不同而不同，所以点$P(x,y)$趋于(0,0)时，函数极限不存在.

以上关于二元函数极限的概念可以相应地推广到n元函数上去，多元函数极限运算法则与一元函数类似. 一元函数中常用的有理化，等价无穷小量代换等求极限的方法，也可以应用到n元函数.

例 7.1.5 求$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

解 由于$(x,y)\to(0,0)$时，$x^2+y^2\to 0$，令$\rho=x^2+y^2$，则有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sin\rho}{\rho}=1$$

例 7.1.6 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy(2+\sqrt{xy+4})}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-xy}{xy(2+\sqrt{xy+4})}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

7.1.3 多元函数连续性

与一元函数一样,也在二元函数极限概念的基础上给出二元函数连续性的概念.

定义 7.1.3 设函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的某个邻域内有定义,若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处连续.

若函数 $f(x,y)$在平面区域 D 的每一点都连续,则称函数 $f(x,y)$在区域 D 内连续.二元函数连续性的概念可以相应地推广到 n 元函数.

如果函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处不连续,则称点 $P_0(x_0,y_0)$为函数 $z=f(x,y)$的间断点. 如前面已经讨论过的函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

当$(x,y)\to(0,0)$时,极限不存在,所以点$(0,0)$是该函数的一个间断点.

例 7.1.7 求函数 $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$的间断点.

解 当 $x^2+y^2=1$ 时,函数无定义,所以该单位圆周上的点都是间断点. 即间断点为$\{(x,y)\mid x^2+y^2-1=0\}$.

可见,二元函数的间断点通常构成一条曲线.

与一元连续函数类似,多元连续函数的和、差、积、商(分母不为零)都是连续函数,多元连续函数的复合函数仍为连续函数.

一切多元初等函数在其定义区域内是连续函数. 定义区域是指包含在定义域内的区域.

与闭区间上一元连续函数性质类似,有界闭区域上连续的多元函数具有如下性质.

性质 7.1.1(有界性与最大值、最小值定理) 在有界闭区域 D 上连续的多元函数,必定在 D 上有界且一定能在 D 上取得它的最大值和最小值.

性质 7.1.2(介值定理) 在有界闭区域 D 上连续的多元函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.