考试虫 学习体系

主编：教育部考研数学资深命题专家
蔡燧林教授(1992～2000 年命题)
胡金德教授(1989～1997 年命题)
范培华教授(1987～2000 年命题)
李恒沛教授(1987～2001 年命题)
王式安教授(1987～2001 年命题)
周概容教授(1987～2003 年命题)
单立波教授(1987～2003 年命题)

硕士研究生入学考试

“考试虫”数学(三) 8套模拟试卷

- 最贴近真题的模拟题
- 解答准确详尽

2007考研

2007考研

航空工业出版社

2007 硕士研究生入学考试

“考试虫”数学(三) 8套模拟试卷

主编：教育部考研数学资深命题专家
蔡燧林教授(1992～2000 年命题)
胡金德教授(1989～1997 年命题)
范培华教授(1987～2000 年命题)
李恒沛教授(1987～2001 年命题)
王式安教授(1987～2001 年命题)
周概容教授(1987～2003 年命题)
单立波教授(1987～2003 年命题)

航空工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试"考试虫"数学8套模拟试卷/王式安等主编.
—北京：航空工业出版社，2004.8（2006.7重印）
ISBN 7-80183-423-2

Ⅰ.硕... Ⅱ.王... Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—习题
Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第070805号

硕士研究生入学考试"考试虫"数学8套模拟试卷
Shuoshi Yanjiusheng Ruxue Kaoshi "Kaoshi Chong" Shuxue 8 Tao Moni Shijuan

航空工业出版社出版发行
（北京市安定门外小关东里14号 100029）
发行电话:010-64978486 010-64919539

北京富生印刷厂印刷 全国各地新华书店经售
2004年8月第1版 2006年7月第4次印刷
开本:787×1092 1/16 印张:36 字数:770千字
印数:15001—18000 全四册定价:56.00元

前　言

本书特点：

1. 含金量高. 教育部考研数学试题的命制经过多年的风风雨雨形成了一套成熟的运作体系，其命题人员、命题思路具有明显的延续性和稳定性，从而确保了极强的科学性. 我们荣幸地邀请到教育部考试中心、考研数学资深命题人员：蔡燧林教授（1992～2000 年命题)、胡金德教授（1989～1997 年命题)、范培华教授（1987～2000 年命题)、李恒沛教授(1987～2001 年命题)、王式安教授（1987～2001 年命题)、周概容教授（1987～2003 年命题)、单立波教授（1987～2003 年命题). 每套试卷均由以上教授严格按照 2007 年考研大纲要求，精选材料、逐题推敲、优化设计而命制完成. 题型和题量与 2007 年考研试题完全一致，并按考试大纲中的样题排版. 本书编者既是数学考试大纲的制定者，又是多年的数学命题人，对考研数学命题绝对有最深刻、最权威的把握. 可以断言，由他们所编写的这 8 套试卷，无论从深度、广度，还是风格都与真题高度一致；本书的试题按照 2007 年考试大纲做了调整。可以说对考生而言，这 8 套试卷的含金量是最高的.

2. 所有习题解答准确详尽. 鉴于有些同类辅导用书没有给出解题的正确详尽过程，给考生使用带来不便，本书对所有习题（包括填空、选择）都给出了清晰、翔实的解答. 本书通过试卷解析加强对考点的认识，理清解题思路，了解考试的最新动态和最新发展趋势，让全国的考生共享名师的指点，以节约最后复习阶段的宝贵时间，帮助考生取得理想的成绩.

建议考生在使用本书时不要就题论题，而是要通过对试题的比较、对试卷详尽解析和对复习方法的把握，发现一些规律性的东西，使这些宝贵资料为己所用，从而迅速提高自身水平和应试能力，轻松应对考试. 如果在使用本书时，感觉基础欠佳，可以参看由这些教授编写的《考研数学基础教程》一书. 做完本书习题后，如需进一步提高能力，可参照仍由这些教授执笔的《考试虫考研数学真题精讲》.

考试虫

2006 年 7 月

目　　录

数学(三)卷 1 试卷……………………………………………………………（1）
数学(三)卷 2 试卷……………………………………………………………（7）
数学(三)卷 3 试卷……………………………………………………………（13）
数学(三)卷 4 试卷……………………………………………………………（21）
数学(三)卷 5 试卷……………………………………………………………（27）
数学(三)卷 6 试卷……………………………………………………………（35）
数学(三)卷 7 试卷……………………………………………………………（43）
数学(三)卷 8 试卷……………………………………………………………（49）
数学(三)卷 1 参考答案与分析…………………………………………………（57）
数学(三)卷 2 参考答案与分析…………………………………………………（66）
数学(三)卷 3 参考答案与分析…………………………………………………（75）
数学(三)卷 4 参考答案与分析…………………………………………………（84）
数学(三)卷 5 参考答案与分析…………………………………………………（92）
数学(三)卷 6 参考答案与分析…………………………………………………（101）
数学(三)卷 7 参考答案与分析…………………………………………………（111）
数学(三)卷 8 参考答案与分析…………………………………………………（121）

数学(三)　卷1

得分	评卷人

一、选择题(本题共10小题,每小题4分,满分40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设函数 F 具有一阶连续偏导数,且 $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0$,确定函数 $z=z(x,y)$,则

(A) $xz_x'+yz_y'=z$　　(B) $xz_x'+yz_y'=1$

(C) $xz_x'-yz_y'=-1$　　(D) $xz_x'-yz_y'=-z$

(2) 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义,当 $x<x_0$ 时,$f'(x)>0$,当 $x>x_0$ 时,$f'(x)<0$,则 x_0 必为 $f(x)$ 的 D　√ f(x) 是否连续

(A) 驻点.　　(B) 极大值点.

(C) 极小值点.　　(D) 不能确定是何种点.

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{x^3}\int_0^x(1-\cos t)\mathrm{d}t, & x>0\\ 0, & x=0,\\ \frac{1}{x^2}\int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t, & x<0\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处

(A) 左极限存在,但右极限不存在.　　(B) 右极限存在,但左极限不存在.

(C) 极限存在,但不连续.　　(D) 连续.

【C】

(4) 若一条二次曲线把 $(-\infty,0)$ 内的曲线段 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $(1,+\infty)$ 内的曲线段 $y=\frac{1}{x}$ 连结成一条一阶可导的曲线,则定义在 $[0,1]$ 上的这条二次曲线为

(A) $y=-2x^2+2x+1$.　　(B) $y=-x^2-x+1$.

(C) $y=-x^2+x+1$.　　(D) $y=x^2-x+1$.

【C】

(5) 设函数 $f(x)=\int_0^x\mathrm{d}t\int_0^t\ln(1+u^2)\mathrm{d}u$,$g(x)=\int_0^x(\tan t-t)\mathrm{d}t$,则当 $x\to0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A) 低阶无穷小.　　(B) 高阶无穷小.

(C) 等价无穷小.　　(D) 同阶但不等价无穷小.

【C】

(6) 设常数 $\lambda>0$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_n}{\sqrt{n^2+\lambda}}$

(A) 绝对收敛.　　(B) 条件收敛.

(C) 发散.　　(D) 敛散性与 λ 有关.

【A】

(7) 设线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有通解 $k_1[1,2,0,-2]^{\mathrm{T}}+k_2[4,-1,-1,-1]^{\mathrm{T}}+[1,0,-1,1]^{\mathrm{T}}$ 其中 k_1,k_2 是任意常数,则下列向量中也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解向量的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,0,-2]^{\mathrm{T}}$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_2=[6,1,-2,-2]^{\mathrm{T}}$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_3=[3,1,-2,-4]^{\mathrm{T}}$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_4=[5,1,-1,-3]^{\mathrm{T}}$.

【 】

(8) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,4,0]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=[2,7,1]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,-1]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=[3,10,4]^{\mathrm{T}}$,设 $[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{C}_{3\times3}$, $[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\boldsymbol{D}_{3\times3}$ 则

(A) 存在矩阵 $\boldsymbol{C}_{3\times3}$,使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

(B) 不存在矩阵 $\boldsymbol{C}_{3\times3}$,使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

(C) 存在矩阵 $\boldsymbol{D}_{3\times3}$,使得 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

(D) 不存在矩阵 $\boldsymbol{D}_{3\times3}$,使得 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性相关.

【 C 】

(9) 设 σ 是总体 X 的标准差,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的简单随机样本,则样本标准差 S 是总体标准差 σ 的

(A) 无偏估计量.　　(B) 最大似然估计量.

(C) 相合估计量.　　(D) 最小方差估计量.

【 】

(10) 二独立同分布随机变量 X 和 Y 之和 $X+Y$,与 X 和 Y 服从同一名称的概率分布,则 X 和 Y 都服从

(A) 均匀分布.　　(B) 指数分布.

(C) 二项分布.　　(D) 泊松分布.

【 】

得分	评卷人

二、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上)

(11) 曲线 $y=x^2\mathrm{e}^{-x}(0\leqslant x\leqslant+\infty)$ 绕 x 轴旋转一周所得延展到无穷远的旋转体的体积________.

(12) 设曲线 $y=\dfrac{2}{5-x^n}$ 在点 $(1,\dfrac{1}{2})$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$ $(n=1,2,\cdots)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\xi_n=$ -4.

(13) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+|x|)^2\mathrm{d}x=$ ________.

(14) 已知 $y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$, $y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$, $y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解,则此微分方程为________.

(15) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,$|\boldsymbol{A}|=-2$. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^3=\boldsymbol{0}$. 则 $\boldsymbol{A}^*$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的表出式是 $\boldsymbol{A}^*=$ $2(A^2+3A+E)$.

(16) 设随机变量 X 服从 t 分布,则 $Y=X^2$ 服从________分布.

三、解答题(本题共8小题,满分86分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

得分	评卷人

(17)(本题满分10分)

求曲线 $y=\frac{x^2\arctan x}{x-1}-x$ 的渐近线.

$x=1$ 为间断点. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2\arctan x}{x-1}-x=\infty$. ∴ $x=1$ 为垂直渐近线.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2\arctan x}{x(x-1)}-1\right)=\frac{\pi}{2}-1=k$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-\frac{\pi}{2}-1=k$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2\arctan x}{x-1}-x-(\frac{\pi}{2}-1)x\right]=\frac{\pi}{2}-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=-\frac{\pi}{2}-1$

∴ $y_1=(\frac{\pi}{2}-1)x+\frac{\pi}{2}-1$

$y_2=(-\frac{\pi}{2}-1)x-\frac{\pi}{2}-1$ 两条斜渐近线.

得分	评卷人

(18)(本题满分11分)

设 $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}}e^{-t^2}dt$,求 $I=\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$.

$I=2\int_0^1 f(x)\,d\sqrt{x}=2f(x)\cdot\sqrt{x}\Big|_0^1-2\int_0^1\sqrt{x}\cdot f'(x)dx\Big|_0^1$

$=2\sqrt{x}\int_1^{\sqrt{x}}e^{-t^2}dt\Big|_0^1-2\int_0^1\sqrt{x}\cdot e^{-x}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx\Big|_0^1$

$=-2\int_0^1\sqrt{x}\,e^{-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$=-2\int_0^1\frac{e^{-x}}{2}dx=-\int_0^1 e^{-x}dx=e^{-x}\Big|_0^1=\frac{1}{e}-1$

得分	评卷人

(19)(本题满分11分)

罗尔定理的应用.

设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且当 $0 < x < 1$ 时,有 $0 < f(x) < x(1-x)$.求证:至少存在一点 $\xi \in (0,1)$,使 $f'(\xi) = 1 - 2\xi$.

令 $F(x) = f(x) - x(1-x)$.

知 $F(0) = f(0)$ $F(1) = f(1)$

又 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 在 $(0,1)$ 可导. 且 $f(0) = f(1) = 0$.

即 $F(0) = F(1) = 0$. ∴ 必在 $(0,1)$ 内存在一点使得

$F'(x) = 0$ 即 $F'(\xi) = f'(\xi) - 1 + 2\xi = 0$.

移项得 $f'(\xi) = 1 - 2\xi$

得分	评卷人

(20)(本题满分10分)

某商店每月销售2400双运动鞋,每双鞋成本150元,每年的库存费用为日均存货成本的6%,每次订货费用为100元.试问每批定货量为多少时,方使每月的库存费用与订货费用之和最少,并且求出这个费用(假设运动鞋是均匀出售的).

得分	评卷人

(21)(本题满分11分)

(Ⅰ) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & -1\\ -1 & \lambda-a & -1\\ -1 & +1 & \lambda-a\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & -1\\ \lambda-a+1 & \lambda-a+1 & 0\\ 1 & -1 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a+1)\begin{vmatrix}\lambda-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & \lambda-a\end{vmatrix}$

设 $A=\begin{bmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & -1\\ 1 & -1 & a\end{bmatrix}$.

(Ⅰ)求 A 的特征值和特征向量;

(Ⅱ)求可逆阵 P,使 $P^{-1}AP=\Lambda$,其中 Λ 是对角阵;

(Ⅲ)计算 $|a^2E-A^2|$.

(Ⅲ). A有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=a+1 \quad \lambda_3=a-2$.

A^2有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=(a+1)^2 \quad \lambda_3=(a-2)^2$

a^2E-A^2有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=a^2-(a+1)^2=-2a-1$

$\lambda_3=a^2-(a-2)^2=4a-4$.

$|a^2E-A^2|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=(-2a-1)^2(4a-4)=4(2a+1)^2(a-1)$

得分	评卷人

(22)(本题满分11分)

设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & s\\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & s^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & s^{n-1}\end{bmatrix}$,其中 s,n 是整数,证明 A^TA 是实对称阵,问整数 s,n 满足什么关系时,A^TA 是正定矩阵.

$(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA \Rightarrow$ 对称矩阵.

得分	评卷人

(23)(本题满分11分)

$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

假设某自动生产线上产品的不合格品率为0.02,试求随意抽取了30件中,

(Ⅰ)不合格品不少于两件的概率 α;　　服从二项分布

(Ⅱ)在已经发现一件不合格品的条件下,不合格品不少于两件的概率 β.

设合格品率为A. ~~不合格品率为B.~~

则 $P(A)=0.98$　$P(B)=0.02$

抽取30件. $P\{B\geq 2\} = 1 - P\{B=0\} - P\{B=1\} =$

$1-0.98^{30} - 30\times 0.02\times 0.98^{29} = \ldots$

$P\{A\geq 2 \mid A\geq 1\} = \dfrac{P\{A\geq 1\ A\geq 2\}}{P\{A\geq 1\}} = \dfrac{P\{A\geq 2\}}{P\{A\geq 1\}}$

$= .$

得分	评卷人

(24)(本题满分11分)

已知随机变量 X 和 Y 独立,X 的概率分布和 Y 的概率密度相应为:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Y \sim f(y) = \begin{cases} 1, & 若\ y \in [0,1], \\ 0, & 若\ y \notin [0,1]. \end{cases}$$

试求随机变量 $Z = X + Y$ 的概率分布.

Y的分布函数 $F(y) = \begin{cases} 0 & y<0 \\ y & 0<y\leq 1 \\ 1 & y>1 \end{cases}$

数学(三)　卷2

得分	评卷人

一、选择题(本题共10小题,每小题4分,满分40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 下面结论正确的是

(A) 设 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处可导,而 $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处不可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处一定不可导.

(B) 设 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处不可导,而 $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处一定不可导.

(C) 设 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处不可导,而 $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处也不可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处一定不可导.

(D) 以上结论都不正确.

【D】

(2) 设 $0\leqslant a_n\leqslant\dfrac{1}{n}$,则下列级数中一定收敛的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(a_n+1)$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$　$\frac{1}{n^2}$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{(a_n+1)^2-1}$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$

【B】

(3) 微分方程 $y''+2y'-3y=e^x+x$ 的特解形式为

?

(A) $(ax+b)e^x$.　　(B) $(ax+b)xe^x$.

(C) $ax+b+e^x$.　　(D) $ax+b+cxe^x$.

【D】

分部积分法

(4) 设 $f(x)$ 可导,且 $\int_0^1\left[f(x)-\dfrac{1}{2}x(x-1)f''(x)\right]dx=5, f(1)=4$,则 $f(0)=$

(A) -1.　　(B) 4.　　(C) 6.　　(D) 不能确定.

【C】

(5) 设 $f(x)\neq 0$ 为在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导的奇函数,则下列函数为奇函数的是

(A) $x^3\int_0^x f'(t)dt$.　　(B) $\int_0^x f(-t)dt$.

(C) $\int_0^x[f'(t)+f(t)]dt$.　　(D) $\int_0^x|f(t)|dt$.

【D】

(6) 设 $D:(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 1, I_i=\iint\limits_D f_i(x,y)dxdy, f_i(x,y)=(x+y)^i(i=1,2,3)$,

则 I_1,I_2,I_3 之间的大小顺序为:

(A) $I_3 < I_2 < I_1$.　　(B) $I_2 < I_3 < I_1$.

(C) $I_1 < I_3 < I_2$.　　(D) $I_1 < I_2 < I_3$.

【 D 】

(7) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,$\boldsymbol{\beta}$ 与每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$, $i=1,2,\cdots,s$ 都线性无关,以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为列向量构造矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]$,则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$

(A) 必无解.　　(B) 必唯一解.

(C) 必无穷多解.　　(D) 解不能确定.

【 D 】

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵,$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值,且满足 $a \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant b$,$\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{E}$ 必是正定阵,则参数 μ 应满足

(A) $\mu > b$.　　(B) $\mu < b$.　　(C) $\mu > a$.　　(D) $\mu < a$.

【　】

(9) 独立同分布随机变量列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 不服从辛钦大数定律,则

(A) X_1 服从参数为1的泊松分布.

(B) X_i 都服从同一离散型分布.

(C) X_3 服从标准正态分布 $N(0,1)$.

(D) X_4 在区间 $(0,1)$ 上均匀分布.

【　】

(10) 设随机变量 X 和 Y 的方差存在,则 $\mathrm{D}(X-Y)=\mathrm{D}X+\mathrm{D}Y$ 是 X 和 Y

(A) 不相关的充分但非必要条件.

(B) 不相关的充分必要条件.

(C) 独立的充分但不是必要条件.

(D) 独立的充分和必要条件.

【　】

得分	评卷人

二、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上)

(11) 差分方程 $2y_{t+1}-6y_t=5\cdot 3^t$ 满足 $y_0=0$ 的特解为 = $\frac{5}{6}t\cdot 3^t$.

(12) 曲线 $y=x^2\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)$ 的斜渐近线为 $y=x-1$.

(13) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x =$ $1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$.

(14) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} =$ 2.

(15) 设 $\boldsymbol{\alpha}=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$, $g(x)=1-x$ 则 $|f(\boldsymbol{A})\cdot g(\boldsymbol{A})|=$ ________.

(16) 设汽车发动机无故障工作的时间服从指数分布,平均无故障工作的时间为100h,则其实际无故障工作的时间不少于80h的概率等于________.

三、解答题(本题共8小题,满分86分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

得分	评卷人

(17)(本题满分10分)

将抛物线 $y=x^2-ax$ 在横坐标 $x=0,x=c(c>a>0)$ 之间弧段绕 x 轴旋转,问 c 为何值时,所得旋转体的体积 V 等于弦 OP(p 为抛物线与 $x=c$ 的交点)绕 x 轴旋转所得锥体的体积 $V_{锥}$.

所得旋转体体积为 $\pi\int_0^c (x^2-ax)^2 dx$

得分	评卷人

(18)(本题满分11分)

设函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$,求 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.

得分	评卷人

(19)(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 在 $(0,4)$ 内二阶可导，且 $f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(4)=1$，证明存在 $\xi\in(0,4)$ 使得 $f''(\xi)=-\frac{1}{2}$.

得分	评卷人

(20)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，$f(0)=2, f(2)=0$，在 $(0,2)$ 内 $f''(x)$ 存在，且 $f''(x)<0$，若对任意的 $x\in[0,2]$，由曲线 $y=f(x)$ 与连接点 $(0,2)$ 和点 $(x,f(x))$ 的直线所围成的平面图形的面积等于 $S=\frac{x^3}{3}$，求函数 $f(x)$.

得分	评卷人

(21)(本题满分11分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\4&1&3\\0&a&2\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

(Ⅰ) a 为何值时，$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$；

(Ⅱ) 当 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$ 时，求可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$.

(I) $A\cong B \Rightarrow r(A)=r(B) \Rightarrow a=-2$.

(Ⅱ)

得分	评卷人

(22)(本题满分11分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}$.

(Ⅰ) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

(Ⅱ) 若 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的特征向量有 $\boldsymbol{\xi}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=[2,2,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_3=[0,2,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_4=[5,-1,-3]^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_3 的特征向量；

(Ⅲ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(I) $\because r(B)=1 \quad \therefore \lambda^3-14\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0 \quad \lambda_3=14$

$A\sim B \Rightarrow$ A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0 \quad \lambda_3=14$

(Ⅱ) 二重特征值~~最~~多对应两个特征线性无关向量. 即 $\delta_1=[1.1.0]^T$ $\delta_2=[0,2,1$

又 A~B 为实对称矩阵. 设 λ_3 ⋯ 为 ~~解~~. $(x_1\ x_2\ x_3)$

则 $\delta_1^T\delta_3=0 \quad \delta_2^T\delta_3=0$ 即 $x_1+x_2=0 \quad 2x_2+x_3=0$.

则 δ_3 为 $[1,-1,2]$

得分	评卷人

(23)(本题满分11分)

假设随机向量(X,Y)在以点$(0,1)$,$(1,0)$和$(1,1)$为顶点的三角形区域上服从均匀分布,求随机变量$Z = X + Y$的方差.

得分	评卷人

(24)(本题满分11分)

假设自总体X的简单随机抽样,得如下统计资料:

k	1	2	3	4	5
$X = k$的次数	12	20	24	24	20

(Ⅰ)设$F(x)$是总体X的分布函数,试对于任意固定的$x(-\infty < x < \infty)$,求总体X的经验分布函数$F_n(x)$;

(Ⅱ)求总体X的数学期望a和方差b的无偏估计值;

(Ⅲ)根据以上的计算结果,分析能否用泊松分布描述总体X的概率分布.