研究生教学用书

弹性力学问题的边界元法

姜弘道 编著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

研究生教学用书

弹性力学问题的边界元法

姜弘道 编著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

边界元法是继有限元法之后迅速发展起来的又一种高效的数值分析方法，本书重点介绍用边界元法解位势问题与弹性力学问题的原理、方法以及数值实现时的一些处理技巧，并用来解决一些实际问题，如：各向同性与各向异性体的稳定渗流、不可压缩与可压缩液体的动水压力、弹性力学平面问题与空间问题的位移与应力、温度场与温度应力、裂纹尖端的应力强度因子等，并专列一章介绍了在计算机集群环境下用并行算法解大规模边界元问题的方法。本书还提供包括几个边界元教学程序的光盘，以资读者练习使用。

本书可作为有关专业的研究生以及工程力学专业的本科生学习边界元法的教材，也可作为对边界元法感兴趣的工程技术与科研人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

弹性力学问题的边界元法 / 姜弘道编著. —北京：中国水利水电出版社，2008

研究生教学用书

ISBN 978-7-5084-5420-7

Ⅰ. 弹… Ⅱ. 姜… Ⅲ. 弹性力学—研究生—教学参考资料 Ⅳ. O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 042860 号

书　　名	研究生教学用书 **弹性力学问题的边界元法**
作　　者	姜弘道　编著
出版　发行	中国水利水电出版社（北京市三里河路 6 号　100044） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：（010）63202266（总机）、68331835（营销中心）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　　刷	北京纪元彩艺印刷有限公司
规　　格	787mm×960mm　16 开本　14 印张　251 千字
版　　次	2008 年 4 月第 1 版　2008 年 4 月第 1 次印刷
印　　数	0001—3000 册
定　　价	**25.00** 元（含光盘）

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社营销中心负责调换

前　　言

边界元法是继有限元法之后迅速发展起来的又一种高效的数值分析方法，与有限差分法、有限元法一起被看作为常用的三大数值分析方法。与有限元法相比，边界元法的主要优点是：建立的物理问题的控制方程是边界积分方程，因此能使问题的维数降低一维，用边界元法求解时，只需将区域的表面离散化，不仅大大减少了未知数的个数，而且极大地方便了以离散化为主要内容的前处理工作；边界元法引入了控制微分方程的基本解，具有解析与离散相结合的特点，因而具有较高的精度；此外，边界元法还能方便地处理具有无限域的问题。20世纪七八十年代以来，边界元法得到迅速发展，在许多领域取得了大量的研究成果，并有了广泛的应用。就固体力学的范畴而言，不论是静力问题还是动力问题，不论是线性问题还是非线性问题，均能用边界元法加以解决。应该指出，正是因为不必将整个区域离散化，因而在解决与区域有关的一些问题，如有体力作用的问题、温度应力问题、弹塑性问题等，边界元法并不比有限元法有更多的优势。但是，在学习、掌握边界元法之后，将使我们有更多的选择，可用它来解决许多适合由它解决的问题，还可采用不同方法耦合的办法来解决更多的问题。

本书是作为学习边界元法的一本入门教材贡献给读者的。由于解决弹性力学问题既是解决许多实际问题的需要，也是解决更多、更复杂问题的基础，因而本书重点介绍弹性力学问题的边界元法，这也是本书所取书名的原因。书中还介绍了位势问题的边界元法，用来确定渗流场、温度场、动水压力等，它们既是作为弹性体所受到的“外力”，也是适合用边界元法求解的一大类问题。

本书简明清晰地介绍了边界元法的基本概念、基本理论与基本方法，较详细地介绍了用边界元法解位势问题与弹性力学问题的原理、方法与数值处理，并通过较多的应用实例，分析了边界元法的精度和对于各种实际情况的处理手段。作为一个特色，本书较详细地介绍了并行边界元法，为应用边界元法解决大规模科学与工程问题提供了一种手段。本书附有光盘，内容包括几个边界元法的程序（FORTRAN 语言）、使用说明及应用简例，便于读者通过程序深入理解与掌握边界元法，并在此基础上开展自己的研究与应用。

尽管编著者为研究生讲授边界元法已有20余年，编写的讲义也已修改多次，但由于书中内容并未都经过自己的实践，因而不足之处在所难免，恳请读者不吝指正。本书在编写过程中参阅过的主要文献资料以及编著者的研究生们的有关研究成果已在书末列出。本书的出版得到河海大学研究生院教材基金的资助，在此一并向他们表示衷心的感谢。

姜弘道

2007 年 6 月

目　　录

第一章 预 备 知 识

本章介绍弹性力学问题边界元法的预备知识。首先介绍弹性力学的基本概念、基本方程及边界条件，并在介绍指标符号与求和约定之后，用指标符号来表示它们；接着介绍基本解的概念以及包括基本解在内的若干弹性力学问题的解答，以备后面使用；为了便于导出边界元法的控制方程，又介绍了微分方程的弱形式以及加权余量法；最后介绍边界元法的概念。

第一节 弹性力学基本方程与边界条件

一、基本概念

弹性力学研究弹性体由于受外力作用或温度改变等原因而发生的应力、应变和位移。弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、应变和位移。

作用于物体的外力可以分为体积力和表面力，分别简称为体力和面力。体力是分布在物体体积内的力，例如重力和惯性力。物体内任意一点 P 所受体力的集度是一个矢量，可以用它在直角坐标系（x，y，z）的三个坐标轴上的投影 X、Y、Z 来表示，称为该物体在 P 点的体力分量，以沿坐标轴正方向为正、沿坐标轴负方向为负。面力是分布在物体表面的力，例如流体压力和接触力。物体表面各点受面力的情况，一般也是不相同的。物体表面任意一点 P 所受面力的集度也是一个矢量，可以用它在直角坐标系（x，y，z）的三个坐标轴上的投影 $\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$ 来表示，称为该物体表面 P 点的面力分量，以沿坐标轴正方向为正、沿坐标轴负方向为负。

物体受外力作用后，其内部将发生应力，即物体本身不同部分之间相互作用的力的集度。受力物体内，不仅各点的应力不一样，而且经过同一点的不同截面上的应力也不一样。物体内任意一点 P 的应力状态，可以用经过该点的三个坐标面上的应力矢量的三个分量来表示，如图 1－1 所示。在垂直于 x 轴的前后两个 x 面上，应力矢量的三个分量用 σ_x、τ_{xy}、τ_{xz} 表示。σ_x 为作用于 x 面上沿 x 方向的正应力，τ_{xy}、τ_{xz} 分别为作用于 x 面上沿 y 方向与 z 方向的切应力。在正 x 面上（其外法线沿着 x 的正方向），应力分量以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。在负 x 面上（其外法

线沿着 x 轴的负方向)，应力分量以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。类似地，在两个 y 面与两个 z 面上，应力矢量的三个分量分别用 τ_{yx}、τ_{yz}、σ_y 与 τ_{zx}、τ_{zy}、σ_z 表示。σ_y、σ_z 为正应力，τ_{yx}、τ_{yz} 与 τ_{zx}、τ_{zy} 为切应力，它们均以“正面上沿正向为正、负向为负，负面上沿负向为正、正向为负”。

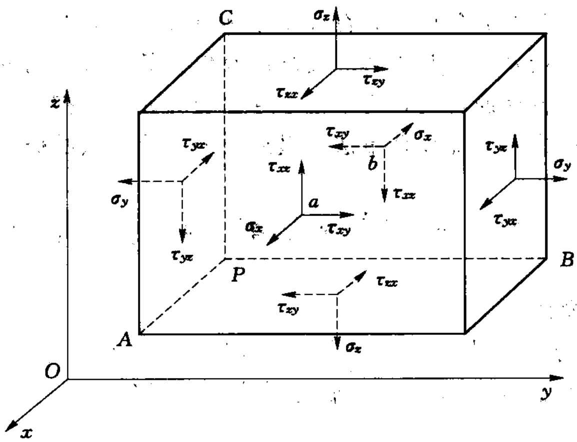


图 1－1 坐标面上的应力分量

物体受外力作用后，其形状发生改变。物体的形状总可以用它各部分的长度和角度来表示，因此，物体的形变总可以归结为物体内线段长度的改变——正应变以及两线段之间夹角的改变——切应变。物体内任意一点 P 的形变状态，可以用从 P 点沿坐标轴 x、y、z 正方向取的三个微小线段 PA、PB、PC（图 1－1）的正应变 ε_x、ε_y、ε_z 与切应变 γ_{xy}、γ_{xz}、γ_{yz}、γ_{yx}、γ_{zx}、γ_{zy}来表示。正应变 ε_x 表示 x 方向的线段 PA 长度的改变率，以伸长时为正、缩短时为负；τ_{xy}、τ_{xz}分别表示 x 方向线段 PA 与 y 方向线段 PB 及 z 方向线段 PC 之间直角的改变，以直角变小时为正、变大时为负。其余正应变及切应变的意义类似。

所谓位移，就是位置的移动。物体内任意一点的位移，用它在 x、y、z 三个轴上的投影 u、v、w 表示，以沿坐标轴正方向为正、沿坐标轴负方向为负。这三个投影称为该点的位移分量。

一般而论，受力弹性体内任意一点的体力分量、面力分量、应力分量、应变分量和位移分量，都是随着该点的位置而改变的，因而都是位置坐标的函数。

二、弹性力学基本方程与边界条件

在弹性力学里所解的问题，通常已知物体的形状和大小、物体的弹性常数、物体所受的体力以及物体边界上所受的约束情况或面力，要求解出物体的应力分量、应变分量和位移分量。

在弹性力学里，假定所考察的物体是理想弹性体，亦即是连续的、完全弹性的、均匀的以及各向同性的；还假定物体的位移和应变都是微小的。在这些假定的前提下，从静力学、几何学、物理学三方面加以考察，可得弹性力学的基本方程。

（一）平衡微分方程

在物体内割取一个微小的平行六面体，它的六个面垂直于坐标轴，而棱边的长度为 $PA=\mathrm{d}x$、$PB=\mathrm{d}y$、$PC=\mathrm{d}z$，如图 1－2 所示。由于应力分量是位置坐标的函数，因此，作用在六面体前后、左右、上下两对面上的应力分量不完全相同，具有微小的差量。例如，作用在后面的正应力是 σ_x，则作用在前面的正应力由于坐标 x 改变了 $\mathrm{d}x$，应当是 $\sigma_x+\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x$，余类推。由于所取的六面体是微小的，因而可以认为体力在六面体内是均匀分布的。

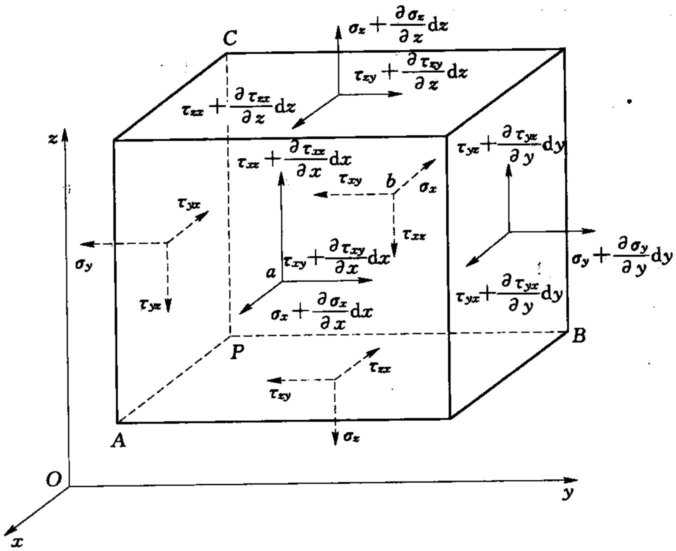


图 1－2 受力作用的微分体

根据空间一般力系的平衡条件，以连接六面体两对面中心的三条直线为矩轴，列出力矩的平衡方程，略去微量以后，得

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},\ \tau_{zx}=\tau_{xz},\ \tau_{xy}=\tau_{yx}$$

这证明了切应力的互等性。再以三个坐标轴为投影轴，列出投影的平衡方程

$$\sum F_x=0,\ \sum F_y=0,\ \sum F_z=0$$

得弹性力学空间问题的平衡微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0\\[2mm]\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+Y=0\\[2mm]\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0\end{cases}\tag{1-1}$$

（二）几何方程

几何方程是指图 1－2 所示 PA、PB、PC 三条微分线段的应变分量与位移分量之间的关系式。为了方便，首先考察 PA 和 PB 两线段在 xOy 平面内的应变分量与位移分量之间的关系式，如图 1－3 所示。

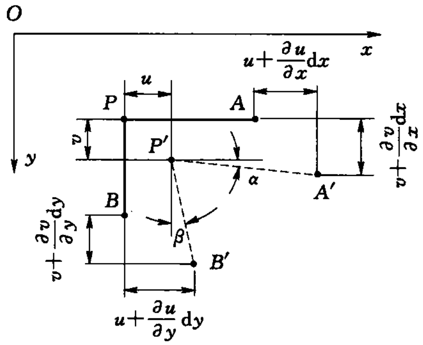


图 1－3 微分线段的应变与位移

假定弹性体受力后，P、A、B 三点分别移动到 P'、A'、B'。设 P 点在 x、y 两方向的位移分别是 u、v，则 A 点在 x、y 两方向的位移，由于 x 坐标的改变，将分别是 $u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$、$v+\dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$；而 B 点在 x、y 两方向的位移，由于 y 坐标的改变，将分别是 $u+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$、$v+\dfrac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$。从而可得 PA、PB 两线段的正应变与切应变为

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}\\[2mm]\varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm]\gamma_{xy}=\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}\tag{1-2}$$

用同样的方法考察 PA 和 PC 两线段以及 PB 和 PC 两线段后，连同式 (1－2)，可得空间问题的几何方程为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{1-3}$$

（三）物理方程

物理方程是指受力物体的应变分量与应力分量之间的关系式。对于理想弹性体，应变分量与应力分量之间的关系由虎克定律给出如下

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{yz} = \dfrac{1}{G}\tau_{yz} \\ \gamma_{zx} = \dfrac{1}{G}\tau_{zx} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy} \end{cases} \tag{1-4}$$

式中：E 为弹性模量；G 为剪切模量；μ 为泊松比。这三个弹性常数之间有如下的关系

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{1-5}$$

由于应力分量与应变分量之间的线性关系，物理方程式（1－4）还可以改写为将应力分量用应变分量来表示的形式，即

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x \\ \sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y \\ \sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z \\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \\ \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \end{cases} \tag{1-6}$$

其中
$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$
$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$
式中：λ 和 G 为拉梅常数；e 为体积应变。

将式（1-6）的前三式相加，可得
$$\Theta = (3\lambda + 2G)e = \frac{E}{1-2\mu}e \tag{1-7}$$
其中
$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$
式中：Θ 为体积应力。式（1-7）也可以改写为
$$e = \frac{1}{3\lambda + 2G}\Theta = \frac{1-2\mu}{E}\Theta \tag{1-8}$$

（四）边界条件

边界条件表示应力的边界值应该就是该边界上所作用的面力，位移的边界值应该满足该边界所受的约束。

为了考察应力的边界值，在边界处取微小的四面体 $PABC$（图 1-4），ABC 面是物体受面力作用的边界面，其他三个面均是坐标面，这四个面上的受力情况如图 1-4 所示。考察该四面体的平衡条件，可得 ABC 面上的应力矢量在三个坐标轴上的投影为

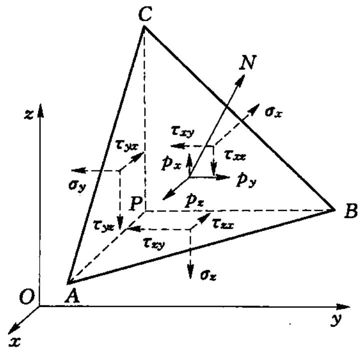


图 1-4　边界上受力作用的微分体

$$\begin{cases} p_x = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \\ p_y = m\sigma_y + n\tau_{zy} + l\tau_{xy} \\ p_z = n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz} \end{cases} \tag{1-9}$$

式中：l、m、n 为 ABC 面的外法线 N 的方向余弦。

当 P 点是物体内的点，p_x、p_y、p_z 即是经过 P 点的外法线方向余弦为 l、m、n 的斜面上的应力分量。现在所考察的 P 点是受面力作用的边界上的点，则 p_x、p_y、p_z 应该就是面力分量 $\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$，于是可由式（1-9）得应力边界条件
$$\begin{cases} (l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx})_{\Gamma_2} = \overline{X} \\ (m\sigma_y + n\tau_{zy} + l\tau_{xy})_{\Gamma_2} = \overline{Y} \\ (n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz})_{\Gamma_2} = \overline{Z} \end{cases} \tag{1-10}$$
式中：Γ_2 为受面力作用的边界。

在物体给定约束位移的边界 Γ_1 上，位移分量应当满足下列三个位移边

界条件

$$\begin{cases}(u)_{\Gamma_1}=\overline{u}\\(v)_{\Gamma_1}=\overline{v}\\(w)_{\Gamma_1}=\overline{w}\end{cases}\tag{1-11}$$

式中：$\overline{u}$、$\overline{v}$、$\overline{w}$ 为 Γ_1 边界上位移分量的已知值。

总结起来，所谓弹性力学问题就是在位移边界条件式（1-11）与应力边界条件式（1-10）下，求解平衡微分方程式（1-1）、几何方程式（1-3）以及物理方程式（1-4）或式（1-6），共 15 个方程。解出的未知函数共有 15 个，即 6 个应力分量、6 个应变分量与 3 个位移分量。

以上给出的是一般空间问题的基本方程与边界条件，当所考察物体的形状比较特殊、受力与约束也比较特殊时，未知函数的数目将大大减少，上述基本方程与边界条件也得到大大简化。下面考察平面应力问题、平面应变问题与等截面柱形杆自由扭转问题的基本方程与边界条件。

三、平面应力问题与平面应变问题

平面应力问题是指很薄的等厚度薄板，只在板边上受有平行于板面并且不沿厚度变化的面力或约束，同时，体力也平行于板面并且不沿厚度变化，如图 1-5 所示。以薄板的中面为 xy 面，由于板很薄，板面又不受力，可以近似认为整个薄板的所有各点都有

$$\sigma_z=0,\ \tau_{zx}=0,\ \tau_{zy}=0$$

于是只剩下平行于 xy 面的三个应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy}（$\tau_{xy}=\tau_{yx}$）不等于零。

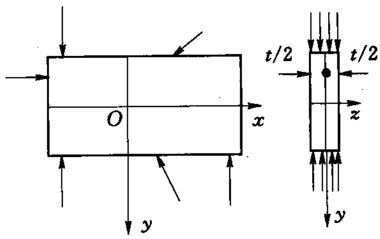


图 1-5　平面应力问题

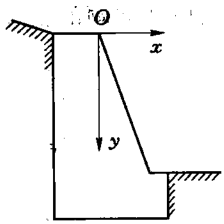


图 1-6　平面应变问题

平面应变问题是指等截面长柱体，在柱面上受有平行于横截面而且不沿长度变化的面力或约束，同时，体力也平行于横截面而且不沿长度变化，如图 1-6 所示。以任一横截面为 xy 面，由于任一横截面都可以近似看作是对称面，可知 $w=0$ 以及 $\tau_{zx}=0$、$\tau_{zy}=0$，从而可得

$$\varepsilon_z=0,\ \gamma_{zx}=0,\ \gamma_{zy}=0$$

于是只剩下平行于 xy 面的三个应变分量 ε_x、ε_y、γ_{xy}（$\gamma_{xy}=\gamma_{yx}$）不等于零。

根据以上两类平面问题的特点，可由式（1-1）得平面问题的平衡微分方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+X=0\\[2mm]\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+Y=0\end{cases}\tag{1-12}$$

由式（1-3）得平面问题的几何方程为

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}\\[2mm]\varepsilon_x=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm]\gamma_{xy}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\tag{1-13}$$

由式（1-4）得平面应力问题的物理方程为

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\\[2mm]\varepsilon_y=\dfrac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)\\[2mm]\gamma_{xy}=\dfrac{1}{G}\tau_{xy}\end{cases}\tag{1-14}$$

由于平面应变问题的 $\varepsilon_z=0$，则可由式（1-4）的第三式得

$$\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y)$$

代入式（1-4）的第一、第二两式，经整理后，连同式（1-4）的第六式，便得平面应变问题的物理方程为

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_x-\dfrac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right)\\[2mm]\varepsilon_y=\dfrac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_y-\dfrac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right)\\[2mm]\gamma_{xy}=\dfrac{1}{G}\tau_{xy}\end{cases}\tag{1-15}$$

同样，根据两类平面问题的特点，可由式（1-10）得平面问题的应力边界条件为

$$\begin{cases}(l\sigma_x+m\tau_{yx})_{\Gamma_2}=\overline{X}\\[2mm](m\sigma_y+l\tau_{xy})_{\Gamma_2}=\overline{Y}\end{cases}\tag{1-16}$$

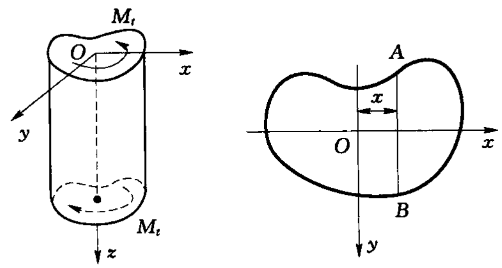
由式（1-11）可得平面问题的位移边界条件为

$$\begin{cases}(u)_{\Gamma_1}=\overline{u}\\[2mm](v)_{\Gamma_1}=\overline{v}\end{cases}\tag{1-17}$$

由式（1-12）～式（1-17）可知，两类平面问题仅物理方程有所不同，而且只需将式（1-14）中的 E 与 μ 用 $\frac{E}{1-\mu^2}$ 与 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 来代替，即得式(1-15)。

四、等截面柱形杆的自由扭转

设有等截面直杆，体力可以不计，在两端平面受有转向相反的两个力偶，每个力偶的矩为 M_t，如图 1-7（a）所示，取杆的上端平面为 xy 面，z 轴铅直向下。



(a) (b)

图 1-7 受扭矩作用的等截面柱形杆

参照材料力学中圆形截面杆件自由扭转的解答，并考虑到非圆形截面杆件扭转时，其横截面可能发生翘曲而不再保持为平面，便可假设位移分量为

$$\begin{cases} u = -\theta z y \\ v = \theta z x \\ w = \theta \psi(x, y) \end{cases} \tag{1-18}$$

式中：θ 为杆件单位长度的扭转角；$\psi(x, y)$为翘曲函数，描述各截面的翘曲形式。

将式（1-18）代入几何方程式（1-3），得应变分量为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{zx} = \theta\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x} - y\right) \\ \gamma_{yz} = \theta\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + x\right) \end{cases} \tag{1-19}$$

再将式（1-19）代入物理方程式（1-6），得应力分量为

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{zx} = G\theta\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x} - y\right) \\ \tau_{yz} = G\theta\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + x\right) \end{cases} \tag{1-20}$$

由于不为零的应力分量只有 τ_{zx}、τ_{yz}，并且仅是 x、y 两坐标的函数，将式（1-20）代入平衡微方程式（1-1），可见前两式得到满足，第三式成为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \tag{1-21}$$

即
$$\nabla^2\psi=0$$

式中：∇^2 为拉普拉斯算子，即翘曲函数满足拉普拉斯方程。

现在来考察柱面的边界条件，将式（1-20）代入应力边界条件式（1-10），由于柱面外法线的方向余弦 $n=0$，可见前两式得到满足，第三式成为

$$l\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-y\right)+m\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}+x\right)=0$$

亦即

$$l\frac{\partial\psi}{\partial x}+m\frac{\partial\psi}{\partial y}=-mx+ly$$

即
$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=-mx+ly \tag{1-22}$$

再考察端面的边界条件，如图 1-7（b）所示，应用圣维南原理后，端面边界条件可写成

$$\iint_\Omega(x\tau_{zy}-y\tau_{zx})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=M_t \tag{1-23}$$

将式（1-20）代入式（1-23），并应用格林公式，得

$$\begin{aligned}M_t&=\iint_\Omega\left[xG\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}+x\right)-yG\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-y\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=G\theta\iint_\Omega\left[\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y}-y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+x^2+y^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=G\theta\iint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-y\psi+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-x\psi-\frac{y^3}{3}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=G\theta\int_\Gamma\left[\left(-y\psi+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y+\left(-x\psi-\frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x\right]\\&=G\theta\int_\Gamma\left[l\left(-y\psi+\frac{x^3}{3}\right)+m\left(x\psi+\frac{y^3}{3}\right)\right]\mathrm{d}\Gamma\end{aligned} \tag{1-24}$$

至此，问题归结为：在边界条件式（1-22）下求解拉普拉斯方程式（1-21）；进而由式（1-24）确定 θ 与 M_t 的关系。由于边界条件式（1-22）表示整个柱面边界上 ψ 的法向导数已知，为了有确定解，求解时需要在某个