线性代数学习指导

XIANXING DAISHU XUEXI ZHIDAO

XIANXING DAISHU XUEXI ZHIDAO

上海理工大学工程数学教研室/编

Hunan Science & Technology Press
湖南科学技术出版社

线性代数学习指导

XIANXING DAISHU XUEXI ZHIDAO

XIANXING DAISHU XUEXI ZHIDAO

上海理工大学工程数学教研室/编

Hunan Science & Technology Press
湖南科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导/上海理工大学工程数学教研室编．长沙：湖南科学技术出版社，2005.8

ISBN 7-5357-4332-3

Ⅰ.线… Ⅱ.上… Ⅲ.线性代数-高等学校-自学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 088872 号

线性代数学习指导

编　　者：上海理工大学工程数学教研室

责任编辑：陈一心

出版发行：湖南科学技术出版社

社　　址：长沙市湘雅路 276 号

http://www.hnstp.com

邮购联系：本社直销科　0731-4375808

印　　刷：衡阳博艺印务有限责任公司

（印装质量问题请直接与本厂联系）

厂　　址：湖南省衡阳市黄茶岭光明路 21 号

邮　　编：421008

出版日期：2005 年 8 月第 1 版第 1 次

开　　本：787mm×1092mm　1/16

印　　张：7.75

字　　数：200000

书　　号：ISBN 7-5357-4332-3/O·242

定　　价：9.80 元

前　言

线性代数是高等学校理工科各专业的重要基础课，对于提高学生现代科学素质、培养学生能力具有重要作用. 同时线性代数也是学习后继课程的有力工具. 线性代数的理论比较抽象，为帮助学生学好这门课程，培养学生的自学能力，规范学生作业，我们编写了这套辅导教材.

本书是《线性代数》(曹伟丽等编)的配套辅导教材. 为满足学生自学的需要，本书给出了每章的教学基本要求、内容提要，并对原教材中部分补充题及一些典型题以例题形式给出了详尽的分析解答. 针对每章的教学内容，书中选编了每一章的自我检测题. 这些检测题分为基本题和综合题，可作为学生的作业题和复习题.

为使学生更好地掌握基本要求，我们编撰了 6 套模拟试题. 另外，我们还汇编了近几年全国硕士研究生统一入学考试线性代数部分的所有试题，供具有较高学习要求的学生参考. 每题后"(××－×)"表示该题为 20××年数学×的考题，如(05－1)为 2005 年数学一的考题.

为了方便作业的完成和批改，自我检测题及其答案与提示按自后向前的次序编排，即翻开书后的封面，书的最后一页即为第一章自我检测题. 自后向前，依次为第二、第三、第四、第五、第六、第七章自我检测题，自我检测题答案与提示.

本书由曹伟丽、刘锡平、范洪福、陆秋君编写，其中范洪福、陆秋君分别编写第二、第三章中的内容提要和自我检测等部分，曹伟丽负责编写第五、第六章和 6 套模拟试卷以及各章中的典型题解，其余的第一、第四、第七章及研究生入学试题由刘锡平负责编写，最后由刘锡平、曹伟丽统稿. 张卫国教授对本书编写做了具体指导，徐炳根、唐光铢、杨冬超、吴宝丰、章国庆、李洪波、谢力等同志在教学实践中给予了大力支持，贾梅协助做了部分章节的校对工作，并提出一些好的建议，《线性代数》的其他作者蔡康盛、叶亚盛、苏文悌等也在工作上给予很大帮助. 本书在编写过程中还得到上海理工大学理学院等许多部门及院系的帮助，在此深表感谢.

由于编者水平有限，书中难免出现错误和不妥之处，真诚欢迎广大读者批评、指正.

编　者

2005 年 6 月于上海理工大学

目　　录

第一章　行列式

一、基本要求

了解行列式的概念，掌握行列式的性质，会应用行列式的性质和行列式的展开式计算行列式，掌握克莱姆法则，会用克莱姆法则解线性方程组.

二、内容提要

1. 基本概念

(1)排列的逆序数，排列的奇偶性.

(2)二阶、三阶行列式和 n 阶行列式，转置行列式.

(3)行列式的余子式，代数余子式.

2. 基本理论

(1)对换排列中的任意两个数，则改变排列的奇偶性.

(2)n 阶行列式的等价定义：

$$\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

(3)行列式的性质：

1)行列式转置后其值不变；

2)互换行列式的任意两行(或列)，行列式改变符号；

3)行列式某行(或某列)所有元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以此行列式；

4)若行列式中有两行(或列)元素对应成比例，则行列式值为零；

5)行列式按行(或列)具有可加性；

6)把行列式某行(或列)所有元素都乘以同一个数 k 后再加到另外一行(或列)的对应元素上，行列式的值不变.

(4)设 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D, & i=j;\\0, & i\neq j\end{cases}\text{及}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D, & i=j;\\0, & i\neq j.\end{cases}$$

$i,j=1,2,\cdots,n.$

(5)克莱姆法则：若 n 元线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$ 的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$，则方程组有唯一解：$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D}$，其中

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. 基本技能

(1)行列式计算.

计算行列式是线性代数课程的基本内容，也是本章的重点，在后面的学习中会经常用到，务必熟练掌握. 计算行列式的常用方法有：

1)二阶、三阶行列式的对角线法则；

2)n 阶行列式的定义算法，用定义计算行列式要注意和式中各项符号的确定，在确定符号时一定要把乘积中各元素行标(或列标)按自然数顺序依次排列，再考虑列标(或行标)排列的逆序数；

3)利用行列式的性质将行列式化为对角行列式或三角行列式进行计算；

4)对有某行(或某列)元素多数为零的高阶行列式按该行(或该列)展开；

5)在 n 阶行列式的计算或证明过程中也常常采用按行(或列)展开的方法进行降阶，导出递推公式.

在计算行列式时，性质 6)和行列式的按行(列)展开法则用得比较普遍，两者往往结合起来用；一些典型的行列式[如箭形行列式，行(列)和相等的行列式等]都有固定的计算方法；还有一些行列式可以化为已知的行列式来计算，比如化为范德蒙德行列式等.

(2)利用克莱姆法则解线性方程组，判定线性方程组的解的唯一性.

克莱姆法则用于解决特殊的 2 元、3 元线性方程组的相关问题比较有效. 由于对一般的线性方程组克莱姆法则的计算量较大，且有一定的局限性(只能解决未知数与方程个数相等且系数行列式不为零的问题)，所以解一般的线性方程组不主张大量使用克莱姆法则，而是用后面所提供的方法(矩阵消元法).

三、典型题解

例 1.1 计算下列各行列式：

(1)

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_1a_2\cdots a_n\neq 0).$$

解 D 为箭形行列式，可化为三角行列式计算，因为 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$，所以

$$D \xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{r_1-\frac{b_i}{a_i}r_{i+1}} \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = c\prod_{k=1}^{n} a_i,$$

其中 $c=a_0-\frac{b_1}{a_1}c_1-\frac{b_2}{a_2}c_2-\cdots-\frac{b_n}{a_n}c_n=a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}c_i$，

故
$$D=(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}c_i)\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

(2)
$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 D_n 为列和相等的行列式，每列元素之和均为 $(n-1)-n=-1$，将所有行均加到第 1 行上，使第 1 行元素均为 -1，再进一步化简.

$$D_n=\begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i+r_1} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ -n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^n(n+1)^{n-1}(-1)^t,$$

t 为排列 $n,n-1,\cdots,1$ 的逆序数，即 $t=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$，

故 $D_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n+1)^{n-1}$.

(3)
$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

解 用性质 2 将 D_{n+1} 化成范德蒙德行列式，即对 D_{n+1} 的行和列作相同的变换，经过偶数次交换后，可得：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a-n & a-n+1 & \cdots & a-1 & a \\ (a-n)^2 & (a-n+1)^2 & \cdots & (a-1)^2 & a^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (a-n)^n & (a-n+1)^n & \cdots & (a-1)^n & a^n \end{vmatrix}.$$

令 $x_i=a-n+i, i=0,1,\cdots,n$，由范德蒙德行列式，得

$$D_{n+1}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 0}(x_i-x_j)=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 0}(i-j)=\prod_{i=1}^{n}i!.$$

(4)

$$D_n=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1\\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2\\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0\end{vmatrix}.$$

解

$$D_n\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{r_i-r_{i-1}}\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1\\ 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1\end{vmatrix}\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,3]{r_i-r_{i-1}}$$

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1\\ 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0\end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{2+1}(n-1)(-1)^{1+(n-1)}2^{n-2}=(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}.$$

(5)

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n\end{vmatrix}.$$

解 各行均减去第 2 行，再依第 1 行展开：

$$D_n=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2\end{vmatrix}=-2(n-2)!.$$

例 1.2 当 k 为何值时，方程组 $\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+kx_2-x_3=0,\\ 2x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解？

解 系数行列式 $D=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & k+1 & 0 \\ 2-k & -2 & 0 \end{vmatrix}=(k+1)(k-4)$,

当 $D=0$ 时,即 $k=-1$ 或 $k=4$ 时,方程组有非零解.

例 1.3 计算下列各题:

(1)

$$D=\begin{vmatrix} * & * & * & * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 1 & 2 & 0 \\ * & * & * & * & * & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 令 A 为 D 左上角 3 行 5 列的数表,$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$,$C=\begin{bmatrix} & & & & -2 \\ & & & -3 & \\ & & -4 & & \\ & & & & \\ -5 & & & & \end{bmatrix}$,则

$|B|=6$,$|C|=-5!\,(-1)^t$,t 为排列 5 4 3 2 1 的逆序数,即 $t=N(5\ 4\ 3\ 2\ 1)=10$,所以 $|C|=-5!$,于是

$$D=\begin{vmatrix} A & B \\ C & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{3\times 5}\begin{vmatrix} C & 0 \\ A & B \end{vmatrix}=-|C|\cdot|B|=6\cdot 5!\ =6!.$$

(2)

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

解 $$D_n \xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} \begin{vmatrix} \frac{(n+1)n}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}=$$

$$\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1}(n-1)!\ =\frac{1}{2}(-1)^{n-1}(n+1)!.$$

(3)

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}\quad(a_1a_2\cdots a_n\neq 0).$$

解　首先，将 D_n 的各行均减去第 1 行，可化为箭形行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}.$$

然后，将行列式第 i 列的 $\dfrac{a_1}{a_i}$ 倍加到第 1 列上（$i=2,3,\cdots n$），化为上三角形行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}c & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix},$$

其中 $c=1+a_1+\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_1}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_1}{a_n}=a_1\left(1+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)$，于是

$$D_n=ca_2a_3\cdots a_n=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

(4)

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\end{vmatrix}.$$

解　这是列(行)和相等的行列式. 可将所有行都加到第 1 行上，然后在第 1 行提取公因子 $\dfrac{n(n+1)}{2}$，使第 1 行元素全为 1，再进一步化简：

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\end{vmatrix}\xrightarrow[i=n,n-1,\cdots,2]{c_i-c_{i-1}}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 3 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ n & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

上式右端为 $n-1$ 阶的列(行)和相等的行列式,用例 1.1(2)题类似的解法可得:

$$D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n^{n-1}.$$

(5)

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+\lambda_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}.$$

解 将 D_n 拆成如下 2 个行列式的和,然后找出递推公式.

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+\lambda_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_2+\lambda_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_2 & a_3+\lambda_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}.$$

第一个行列式[令其为 $D_{(1)}$]的所有行均减去第一行即可化为上三角行列式:

$$D_{(1)}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=a_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n;$$

第二个行列式[令其为 $D_{(2)}$]依第 1 列展开,即得:

$$D_{(2)}=\lambda_1 D_{n-1}.$$

于是有递推公式:

$$D_n=D_{(1)}+D_{(2)}=a_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n+\lambda_1 D_{n-1};$$

所以

$$D_{n-1}=a_2\lambda_3\lambda_4\cdots\lambda_n+\lambda_2 D_{n-2},\ \cdots,\ D_2=a_{n-1}\lambda_n+\lambda_{n-1}D_1,\ D_1=a_n+\lambda_n.$$

依次将后一式代入前一式,得

$$D_n=a_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n+\lambda_1 a_2\lambda_3\cdots\lambda_n+\lambda_1\lambda_2 D_{n-2}=\cdots=$$

$$a_1\prod_{i\neq 1}\lambda_i+a_2\prod_{i\neq 2}\lambda_i+\cdots+a_{n-2}\prod_{i\neq n-2}\lambda_i+\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-2}D_2=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_j\prod_{i\neq j}\lambda_i\right)+\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 1.4 证明 $D_n=\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}=\cos n\theta.$

证明 将 D_n 依最后一行展开,得递推公式

$$D_n=2\cos\theta D_{n-1}-D_{n-2}.$$

用数学归纳法证明题目结论.

$n=1$ 时,结论显然成立.

若 $n\leqslant k-1$ 时结论均成立,则 $n=k$ 时,

$$D_k=2\cos\theta D_{k-1}-D_{k-2}=2\cos\theta\cos(k-1)\theta-\cos(k-2)\theta=$$
$$[\cos k\theta+\cos(k-2)\theta]-\cos(k-2)\theta=\cos k\theta,$$

即 $n=k$ 时也成立,所以题目结论对任意自然数 n 均成立.

例 1.5 已知 $a^2\neq b^2$,证明方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_{2n}=1, \\ ax_2+bx_{2n-1}=1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ ax_n+bx_{n+1}=1, \\ bx_n+ax_{n+1}=1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ bx_2+ax_{2n-1}=1, \\ bx_1+ax_{2n}=1 \end{cases}$$

有唯一解,并求解.

解 系数行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & b & a & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & b & & & & & a & \\ b & & & & & & & a \end{vmatrix}=(a^2-b^2)^n\neq 0,$$

所以方程组有唯一的一组解.

设 A_k 为 D_{2n} 中第 k 列改为常数列 $(1,1,\cdots,1,1)^{\mathrm{T}}$ 的 $2n$ 阶行列式,将 A_k 依第 k 行展开,第

k 行的两个元素 $1,b$ 其代数余子式再依倒数第 k 行展开，可得

$$A_k=\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccccc} & & & (\text{第}\,k\,\text{列}) & & & & \\ \end{array}$$

$$A_k=\left|\begin{array}{cccccccc}
a & & & 1 & & & & b\\
 & a & & 1 & & & b & \\
 & & \ddots & \vdots & & \iddots & & \\
 & & & 1 & & b & & \\
 & & & \vdots & \ddots & \iddots & & \\
 & & & \vdots & a & b & & \\
 & & & \vdots & b & a & & \\
 & & & \vdots & \iddots & \ddots & & \\
 & & & 1 & & a & & \\
 & & \iddots & \vdots & & & \ddots & \\
 & b & & 1 & & & a & \\
b & & & 1 & & & & a
\end{array}\right|\begin{array}{l} \\ \\ \\ (\text{第}\,k\,\text{行})\\ \\ \\ \\ \\ (\text{第}\,2n-k\,\text{行})\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$a(a^2-b^2)^{n-1}+b(-1)^{k+2n-k}(-1)^{2n-1-k+k}(a^2-b^2)^{n-1}=(a-b)(a^2-b^2)^{n-1}.$$

故 $x_k=\dfrac{A_k}{D_{2n}}=\dfrac{a-b}{a^2-b^2}=\dfrac{1}{a+b}$，$k=1,2,\cdots,2n$.

例 1.6 求 3 次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$，使得

$$f(-1)=0, f(1)=4, f(2)=3, f(3)=16.$$

解 由题意得方程组

$$\begin{cases}a_0-a_1+a_2-a_3=0,\\ a_0+a_1+a_2+a_3=4,\\ a_0+2a_1+4a_2+8a_3=3,\\ a_0+3a_1+9a_2+27a_3=16.\end{cases}$$

系数行列式 $D=\begin{vmatrix}1&-1&1&-1\\1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\end{vmatrix}$ 为范德蒙德行列式，计算得 $D=48$，又

$$D_0=\begin{vmatrix}0&-1&1&-1\\4&1&1&1\\3&2&4&8\\16&3&9&27\end{vmatrix}=336;\quad D_1=\begin{vmatrix}1&0&1&-1\\1&4&1&1\\1&3&4&8\\1&16&9&27\end{vmatrix}=0;$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&-1&0&-1\\1&1&4&1\\1&2&3&8\\1&3&16&27\end{vmatrix}=-240;\quad D_3=\begin{vmatrix}1&-1&1&0\\1&1&1&4\\1&2&4&3\\1&3&9&16\end{vmatrix}=96.$$

所以
$$a_0=\frac{D_0}{D}=7,\ a_1=\frac{D_1}{D}=0,\ a_2=\frac{D_2}{D}=-5,\ a_3=\frac{D_3}{D}=2.$$

$$f(x)=7-5x^2+2x^3.$$

例 1.7 给定 $n-1$ 个互不相同的数 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$，令

$$P(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(1)证明：$P(x)$是一个 $n-1$ 次多项式；

(2)求出 $P(x)=0$ 的 $n-1$ 个根.

解 (1)$P(x)$为 n 阶范德蒙德行列式，所以

$$P(x)=(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)\prod_{n-1\geqslant i>j\geqslant 1}(a_i-a_j).$$

显然 $P(x)$为 x 的 $n-1$ 次多项式.

(2)由(1)中 $P(x)$的表达式，可得 $P(x)=0$ 的根为

$$x=a_i \quad (i=1,2,\cdots,n-1).$$

第二章　矩　阵

一、基本要求

了解矩阵的概念；了解单位矩阵、对角矩阵、对称矩阵等各种特殊矩阵的定义与性质；掌握矩阵的线性运算、乘法、转置及其运算规律；掌握矩阵的初等变换，理解逆矩阵的概念及其存在的充要条件；掌握求逆矩阵的方法，会做分块矩阵的运算.

二、内容提要

1. 基本概念

(1)矩阵、方阵、矩阵的加法、减法、数乘、乘法、转置、共轭，方阵的行列式.

(2)矩阵的三种初等变换与初等矩阵.

(3)逆矩阵、分块矩阵.

(4)一些特殊矩阵：零矩阵、单位矩阵、三角矩阵、转置矩阵、共轭矩阵、对称矩阵、反对称矩阵、伴随矩阵、非奇异(或非退化)矩阵、奇异(或退化)矩阵.

2. 基本理论与基本技能

(1)矩阵运算

1)加减法

只有同型矩阵才能相加减，法则是：$[a_{ij}]_{m\times n}\pm[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}$.

2)数乘

数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，法则是：

$$k\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix},\text{即 } k \text{ 要乘 } \boldsymbol{A} \text{ 中各元素.}$$

3)乘法

设矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times s}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{s\times n}$，$\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$(或 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$)，法则是：$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=[c_{ij}]_{m\times n}$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$，$c_{ij}$ 是左矩阵第 i 行、右矩阵第 j 列对应元素乘积之和. 此法则表明：左矩阵的列数与右矩阵的行数必须相同时，两矩阵才能相乘. 注意矩阵的乘法与数的乘法有两个显著差别：

①不满足交换律，一般地 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；

②积为零矩阵时，不一定有零矩阵因子.

(2)逆矩阵的求法

1)设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵，即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$；

2)方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆$\Leftrightarrow\det(\boldsymbol{A})\neq0$，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^*$；

3)$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})_{n\times 2n}\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1})_{n\times 2n}$.

(3)矩阵运算性质

1)加法、数乘、乘法满足：

① $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

② $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$；

③ $\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

④ $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$；

⑤ $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

⑥ $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu)\boldsymbol{A}$；

⑦ $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$；

⑧ $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$；

⑨ $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$；

⑩ $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$；

⑪ $\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$；

⑫ $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$.

2)方阵的运算满足：

① $\det(\lambda\boldsymbol{A})=\lambda^n\det(\boldsymbol{A})$；

② $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$；

③ $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}$；

④ $\det(\boldsymbol{A}^*)=[\det(\boldsymbol{A})]^{n-1}$，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵.

3)转置矩阵满足：

① $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

③ $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；

④ $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

4)逆矩阵运算满足：

① $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

② $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}(\lambda\neq 0)$；

③ $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

④ $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；

⑤ $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$；

⑥ $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}$.

(4)初等矩阵

初等矩阵分为三种，分别记为 $\boldsymbol{E}[i,j]$，$\boldsymbol{E}[i(k)]$，$\boldsymbol{E}[i,j(k)]$. 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于 $\boldsymbol{A}$ 左乘一个相应的初等矩阵；对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换，相当于 $\boldsymbol{A}$ 右乘一个相应的初等矩阵.

(5)分块矩阵

分块矩阵的运算规则与普通矩阵相同. 对于分块对角矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_k\end{bmatrix}$，其中