当代世界学术名著·哲学系列

哥德尔证明

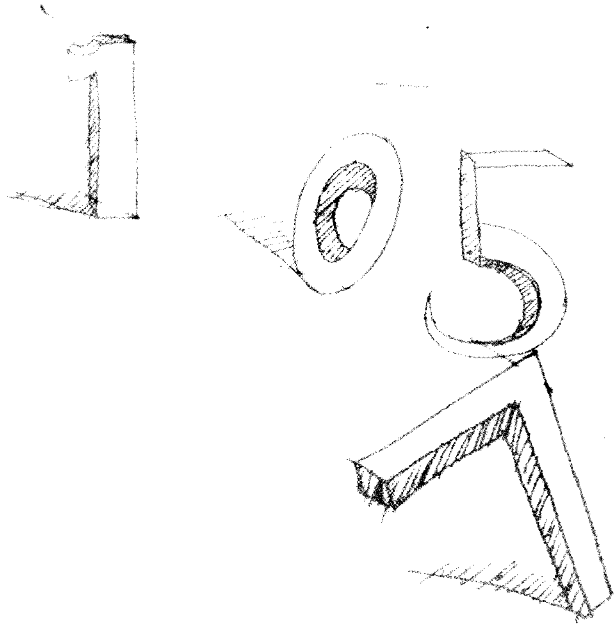
Gödel's Proof

[美] 欧内斯特·内格尔(Ernest Nagel)
詹姆士·R·纽曼(James R. Newman) /著
陈东威　连永君/译

中国人民大学出版社

哥德尔证明

Gödel's Proof



[美] 欧内斯特·内格尔(Ernest Nagel)
詹姆士·R·纽曼(James R. Newman)/著

陈东威　连永君/译

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

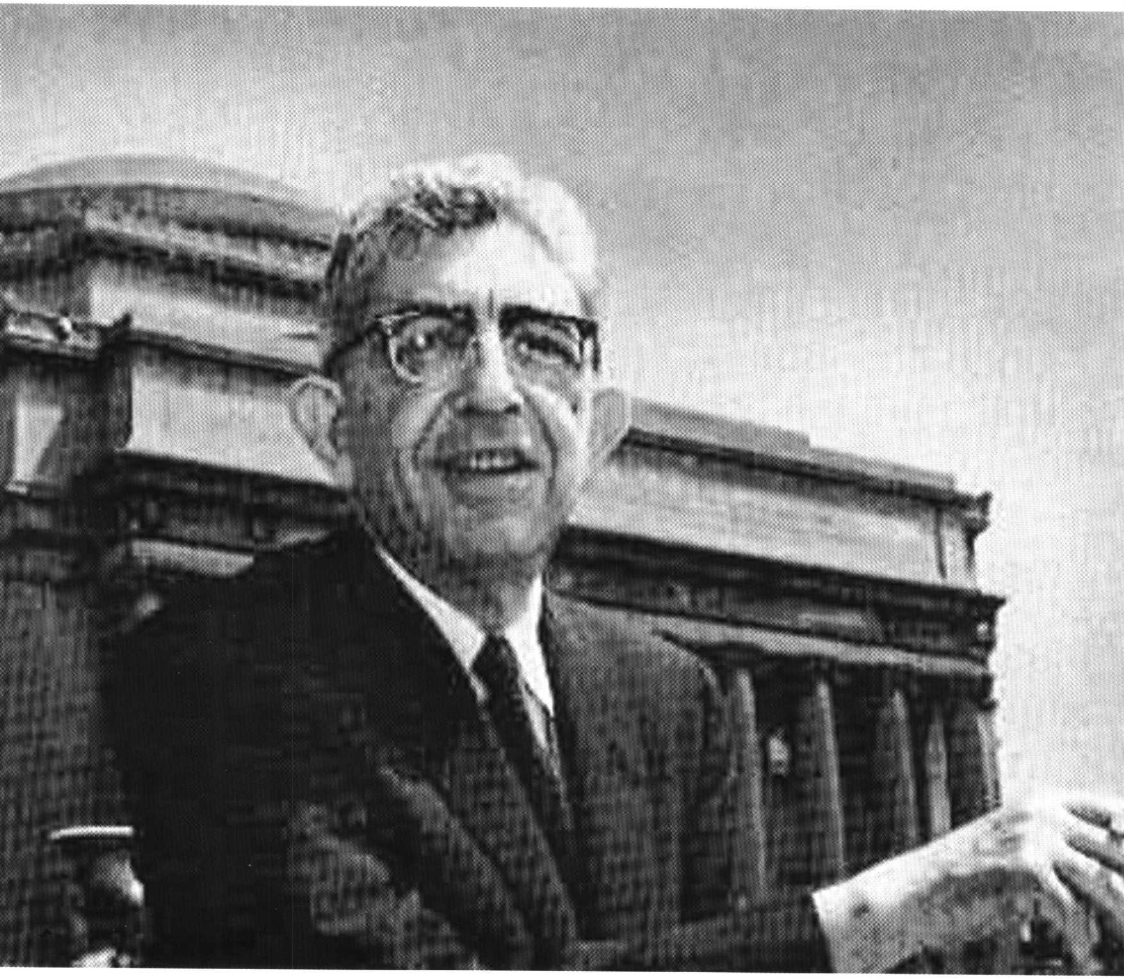
哥德尔证明/[美] 内格尔，[美] 纽曼著；陈东威，
连永君译. —北京：中国人民大学出版社，2008
（当代世界学术名著·哲学系列）
ISBN 978-7-300-08890-7

Ⅰ. 哥…
Ⅱ. ①内…②纽…③陈…④连…
Ⅲ. 哥德尔，K.（1906—1978）-逻辑哲学-研究
Ⅳ. B516.59

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 007192 号

当代世界学术名著·哲学系列
哥德尔证明
[美] 欧内斯特·内格尔（Ernest Nagel） 詹姆士·R·纽曼（James R. Newman） 著
陈东威 连永君 译

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京新丰印刷厂		
规　　格	155 mm×230 mm　16 开本	**版　　次**	2008 年 3 月第 1 版
印　　张	9 插页 3	**印　　次**	2008 年 3 月第 1 次印刷
字　　数	86 000	**定　　价**	18.00 元



欧内斯特・内格尔

中译本序言

嗨！欢迎光临！此刻我算是老板（真走运）！

先请你看一下圆周率，或说得更准确一点儿，是它的十进位展开式中的前几位：

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944…

你是否曾对其中的数字排列如此混乱而感到困惑？为什么“圆的周长含有若干个直径的长度”，这样一个简单而又自然的问题，竟导致

这么一个玄奥难解的数，它不仅不是整数，甚至也不是两个整数之比。

再看看下面的数字花样：

$$1, -3, 5, -7, 9, -11, 13, -15, 17, -19, \cdots$$

你会想到它和圆的直径或周长有某种关联吗？可能不会。怎么可能呢？奇数列和圆周会有什么关系？为什么这些奇数的符号还变来变去的？再让我们对这个模式做一点儿小小的修改，将这些奇数改为其倒数，并在它们之间添上加号：

$$1-1/3+1/5-1/7+1/9-1/11+1/13-1/15+1/17-1/19+\cdots$$

这个新的模式描绘了一种沿着数轴的锯齿状的运动。从 1 开始，然后向左 1/3，再向右 1/5，又向左 1/7，再向右 1/9，如此继续下去。当然，步长会变得越来越短，你会看出我们不可避免地逐渐瞄准到了一个特定的点，这个点明显地会大于 2/3 而又小于 1。这个点到底在数轴上什么地方？这样的问题是否值得关注？

在告诉你这个点是什么之前，让我先问一下，你是否真的在乎了解这个问题？有的人会觉得这种涉及无限的模式很吸引人，甚至感到神奇；而另外一些人则会耸耸肩说："这算什么，谁会在乎这个？"这两种态度反映出在人类成员中存在的一种根深蒂固的一分为二的状况。有时我会感到迷惑不解，那些说"不在乎"的人，到底是由于天生或遗传上就对数学的美和魅力有某种"免疫力"呢，还是需要有合适的人出来对他们讲合适的话，或给他们举出

合适的例子，再或者给他们看合适的图片，才能使他们睁开眼敞开心灵，看到数学的魅力。我并不知道这类问题的答案，但我觉得，如果到目前为止你还在读这篇前言而不是在打鼾，那你还算是至少对数学及其模式的迷人之处可能有点感觉的人。

那么我刚才所讲的数轴上的那个点究竟在哪里？下面就是答案（可以肯定不是显而易见的）：

$$1-1/3+1/5-1/7+1/9-1/11+1/13-1/15+1/17-1/19+\cdots=\pi/4$$

这意味着，被用作在数轴上左右来回运动步长的奇数的倒数，与完美的曲线圆和它笔直的直径之间，有着不可思议的密切关系。这样一种奇特的事实究竟来自何方？

圆周率 π 到底是高深莫测还是极为简单？如果你知道如何去看它，它就变得非常简单；而最明显的作法（如列出其十进制展开式）却使之变得不可想象地棘手难解。从事数学就是如此。对以正确的适当方式去观察模式的人，秘密是敞开的；而对那些没能摸到窍门儿的人来说，秘密就是掩盖着的。

人类从事数学已有几千年了，许许多多的秘密已被发现，当然也已被公开了，通过对隐藏在数学中的关键性模式的建构和分享，从而在横跨几大洲的范围内，达成了某种集体共识。但是不管学习了多少这类关键性的模式，似乎没人能达到这样一种状态，即对所遇到的每一个挑战都能通过应用已知的模式加以解决。为了取得新的进展，常常需要有全新的想法。这些想法是突然闪现的，似乎真正

是来自天才的头脑。

为什么会是这种情况？为什么数学总是要求有天才的灵光闪现呢？我们大家都记得在小学时，只要学会了几条固定的规则，就能把任意两个数相加，乘法、减法和除法的情况也是如此（想象一下，如果只是把一组数字加到一起都需要天才的创造力的话，那日子真是没法过了！人们有时的确会说到“很有创意的记账法”①之类的话，但那完全是两回事……）。也许你知道求某个数平方根的技巧，有点像是长除法。不管怎样，小时候父亲就教过我，我曾花费了大量的时间计算 2、3、5 等数的平方根，这给我带来了极大的乐趣，但这并不需要创造力——实际上涉及的创造力是零。

与此类似，一个孩子也可以使用简单的硬性的计算规则，列出一个递增的素数表：

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，…

作法是十分简单和机械性的，但是，这种简单的体力劳动所得到的结果却显得十分混乱。除了看出头一个素数之后的所有素数都是奇数外，其中还有什么别的模式？为什么前后两数之差在上下跳动：1，2，2，4，2，4，2，4，6，2，6，4，2，4，6，6，…正如你可能会想到的，不久表中某处就会出现“8”，然后在某处会现“10”，并且随后就

① 这是英语中一个讽刺的词，用来指公司在账上玩花样以蒙骗股民。一般记账只需要算术的加减乘除。——译者注

会有越来越大的偶数出现在这个差值列表中。但是，模式是什么？

在某种意义上，你也可以说没有模式。然而在这个序列中，的确存在着不可思议的、隐藏着的规律性。这里涉及的是它的增长率。简而言之，当 n 越来越大趋于无限的过程中，第 n 个素数的值越来越接近 $n\log n$，其中"$\log n$"是自然对数，意思是说，当它是著名的常数 e 的幂时，我们可得到 n。这里我不打算定义 e 或是自然对数，因为我这里要表述的观点与这些技术细节无关。我要讲的是，在数学中，每当遇到一个表现为混沌的现象时，最终都会表明，原来都是具有某种意外的、隐藏着的模式的；但是，每次都需要有新的创造力去辨认出这些模式，然后还需要有进一步的创造力去严格证明这些模式。

就上面所讲的"素数定理"而言，直到 1900 年左右这个重要的结果才最终得到了证明，在阿达马（Jacques Hadamard）和德·拉·瓦莱·布森（Charles-Jean de la Vallée Poussin）令人惊叹的证明中，用到了复数的解析工具。目的是为了解释素数序列的密度[①]，而通过的却是万万想不到的门径！但是话又说回来，谁又曾料到基于奇数的倒数的无限来回又能和圆及其直径发生关系呢？

你可能还不清楚我讲所有这些到底是为了说明什么。其实很简单，简而言之，我的意思是说要发现数学问题的

① 素数定理的另一结果是：不超过 n 的素数的数目，随着 n 的增大趋近于 $n/\log n$。——译者注

答案，似乎从来就没有像做算术演算那样的固定处方。从事数学，事实上是在挑战最伟大的人类心灵，因为和机械式的自动操作相反，它不断地要求产生新的思想。

为什么情况会是这样？为什么研究数学和算术演算会如此不同？难道就不可能存在固定的一套方法用以得到所有的数学证明吗？这套规则可能会多于在小学里学到的加法和除法等规则，也可能更困难，或者更微妙精细，但难道就不可能在原则上是存在的吗？

事实上，这正是 20 世纪初数学家们心中的普遍信念——必然会存在某种固定的、严格的规则集合，用一个完全不用思考的自动机，能够完全机械地产生所有的数学真理。数学家们为什么会相信这个？因为他们是证明概念的信奉者，而在 19 世纪，证明概念的焦点变得越来越清晰，所谓一个证明似乎就是在一个形式公理系统内部进行严格符号操作而得到的必然结果。

换句话说，纯逻辑似乎可以通过称为“符号逻辑”的一套形式规则被机械化，然后向里面输入几条特定的公理（例如，交换律、结合律和分配律，加上“数学归纳法”），然后开始运作就行了！人们可以得到这样的机器，至少在原则上用它可以一个接一个地输出数学真理，并且从原则说，每一条真理都能或迟或早地从这台机器中产生出来。

这就是当时数学家们关于他们学科的普遍信念。你可能会认为，他们在想到这一点时多少会有些失落感，甚至觉得受到威胁，因为这意味着在他们专业中的一切都可用一台无心灵、无思想、无理解力的自动机或机器人来替代

完成。但是，使人感到奇怪的是，这种前景并未使数学家们感到困扰；事实上，倒是使他们对自己学科的高度规范、高度一致、高度精确有了进一步的信心。

随后在1931年，伴随着年轻的奥地利逻辑学家库尔特·哥德尔的出现，这种想法被打得粉碎。25岁的哥德尔瞄准将数学视为机械的符号操作的观念，证明其内部潜藏着致命的矛盾。只要你将一台产生真理的机器交到哥德尔手上，他就会检验一下它的结构，瞬时间就交给你一个这台机器永远也产生不出来的真数学命题。至于他怎么知道这台机器产生不了这个命题？他怎样利用这台机器的结构制造了这样一条它永远产出不了的真的数学命题？那好办，阅读完此书你就会知道了。最重要的是，哥德尔完全摧毁了将数学视为纯粹机械性活动的观念。他确凿地表明，创造性的思想将永远体现在数学中，创造力将永远是必需的。在所有这些事情中，最令人惊叹的是，年轻的哥德尔证明了事实的确是如此。他的证明，是地球上所有曾进行过的数学思考中最有创意的成果之一。

所以数学虽然是一门有关模式和规则的科学，但是从其本性来讲却并不是一个总体模式或总体规则而已。数学自身的本质在于，虽然它包括模式，而模式又构成模式（如此这般以至无穷），然而总会有不能预见的在新的层次上的模式；新的层次上的模式总是会使人感到意外，总是好像在回避先前已有的思维方式。

哥德尔定理是如此奇妙，如此使人惊喜！虽然在我看来，1931年看到这一点的数学家们应该感到高兴才是，但

是相反，他们却是如此难以接受。数学家们一直沉浸于对他们所从事的学科具有完美的机械性的想象之中，而现在却被告知数学是不可预测的，难以驾驭的，充满着对持续创造能力的永恒需求。这个信息多少会使人惊慌失措和感到威胁，并不符合他们对自身学科的想象。

然而随着20世纪进程的展开，随着观念的梳理和澄清，数学家们逐渐认识到，这种对其学科性质的看法非但不那么可怕、那么糟糕，而且是不可避免的。随着计算机渗入我们的生活，人们开始看到在计算机适合做的事和心灵适合做的事之间，存在着巨大的鸿沟。因此，哥德尔带来的信息显得越来越合理，甚至是必然的。但所有这一切并不意味着哥德尔证明本身就变得显而易见了——远非如此！哥德尔的观念是美妙的，而其艰深的一整套思想对大多数人来说，却是难以消化的；几十年当中，只有少数人才能够理解。

这个问题的解决落在了内格尔和纽曼（他们两个人都不是数学家，而是有关数学和人类心灵的深刻思想家）身上。他们合写的初版于1958年，现已成为经典的《哥德尔证明》一书，使“哥德尔证明”为广大的读者所了解。这本书曾在成千上万人中传播，改变了其中很多人的生活，其中就包括当时只有十来岁的我本人。就我个人来讲，我的确要把我生活中的全部事业追溯到那至关重要的一天：当时是1959年秋天，在门罗公园的开普勒书店里，我完全偶然地见到了《哥德尔证明》。

可能此刻在中国，有个人——可能就是你——正在书

店里面随意浏览这本书，正在翻动它的书页并正在读着眼前这些词句。或许如果你买了这本书，会使你的生活发生革命性的变化，就像这本书对我那样！当然，也可能什么也没有发生。或许正在读这些话的不是你，而是站在书店别处的另外的人。也可能你根本就不在书店里。或许你还正在睡觉呢！但是不管是哪种情况，不管是你或是别的什么人，我的确希望在中国有人能发现这本书，能感受到它是如此之美妙，如此之激动人心，就像我在 14 岁，然后在 15 岁，再在 16 岁以及之后在所有的年龄段时所感受到的那样。事实上，从对这些思想的感受的角度讲，我从来就没有变得太老。这些思想是如此美妙，如此难以忘怀，如此神秘，它们将会伴随你整个一生。

我个人的情况是，我已用了几十年的时间来思考哥德尔的观念，我选择了认知科学这个专业领域，因为我想要了解人类的心灵怎么会不像最初所感到的那样简单，而是具有如此丰富的创造性；我想要了解心灵和机器之间难以捉摸的联系；我想要了解数的模式为什么一方面是如此完满和单纯，另一方面又如此不可预见和狂乱；我想要了解隐藏在思维、创造力和意识背后的秘密。

如果你问我是否取得了最后的成功，答案是“当然没有!”如果是的话，生活将会变得令人厌烦。如果人的心灵会被化简为几条僵化的规则，即便是相当大的一个僵化规则的集合，那会是一件令人极度悲哀的憾事。哥德尔证明了，情况不会是这样。我们是幸运的，因为我们的心灵是如此不可预知；而正因如此，生活才充满了情趣。尽管

如此，我们仍在进行努力来科学地了解我们自身。

如果说在科学发现中有哪一件工作曾使我们洞察到我们自身心灵的微妙和深度，那就是哥德尔在 1930—1931 年间所创造的关于不完全性定理的证明。我希望你在阅读这本宝石般珍贵的小书时，像在进行会获得极大欢乐的一次航行。这次航行是在驶向数学的核心，数学思想的核心，思想本身的核心，说到底是在驶向人类心灵的核心。就像是乘坐过山车一样，这将是一次你会不时地感到昏眩、失去方向感、迷狂的曲折旅程。但正因如此，这将是你所有过的最不可思议的经历。

我当然希望如此。祝你一路顺风。

美国印第安纳州布鲁明顿印第安纳大学
道格拉斯·R·霍夫斯塔特
2007 年 2 月

献给

伯特兰·罗素（Bertrand Russell）

新版序言

1959年8月，结束了在日内瓦一年的居留之后，我们全家回到了加利福尼亚州的斯坦福。那年我14岁，法语刚变流利，喜好各种语言，开始了解书写系统、符号以及语义的神秘，充满了对数学和思维奥秘的好奇。

一个傍晚，父亲和我去逛一家书店。我不经意地看到一本薄书，有个神秘的书名叫《哥德尔证明》。

x 我随手翻了一下，发现书中有许多诱人的图形和公式，其中一个脚注特别吸引我，它谈到引号、符号以及将其他符号符号化的符号。由于直觉地感到《哥德尔证明》好像注定和我会有某种关联，我想我必须买下这本书。

离开书店后，父亲说，他曾在纽约城市学院上过哲学课，这本书的作者之一欧内斯特·内格尔就是讲课老师，并且在那之后他们成了很好的朋友。这个巧合进一步增加了这本书给人的神秘感，一到家，我就急不可耐地啃读起来。从头至尾，《哥德尔证明》都和我激情共鸣；很快，我发现我开始沉迷于真与假、悖论与证明、映射与反映、符号操作和符号逻辑、数学与元数学、人类思想创造性飞跃的奥秘及智能的机制等问题的思考之中。

此后不久，父亲告诉我说，他在校园里偶然碰到了欧内斯特·内格尔。内格尔是哥伦比亚大学的教授，此时碰巧来斯坦福大学工作一年。没过几天，两家人就聚集到了一起，我立刻就被四个内格尔——欧内斯特和艾迪丝以及他们的两个儿子，年纪差不多和我一样大的山迪和鲍比——的魅力深深吸引住了。能认识我如此喜爱的书的作者使我惊喜万分，并且我发现欧内斯特和艾迪丝也对我在科学、哲学、音乐和艺术上表现的青春期热情给予了极大的理解和包容。

时光如梭，内格尔一家的学术年假很快就要结束了。在离去之前，他们热情地邀请我在那年夏天到他们位于佛蒙特州的木屋度假一个星期。在充满田园情调的逗留期间，欧内斯特和艾迪丝向我展示出了文明端庄、宽容大度