环论

熊全淹 著

环论属代数学的基础组成部分，对数学各分支有深刻的影响。目前环论的研究方向很广泛，但构造问题始终处于核心地位。本书主要介绍环的基本构造理论。

武汉大学学术丛书
WUHANUNIVERSITY ACADEMICLIBRARY 武汉大学出版社

环论

熊全淹　编著

武 汉 大 学 出 版 社
1993

（鄂） 新登字 09 号

环　　论

© 熊全淹　编著

*

武汉大学出版社出版发行
（430072 武昌 珞珈山）
湖北京山县印刷厂印刷

*

850×1168 毫米　1/32　9.25 印张　235 千字
1993 年 12 月第 1 版　　1993 年 12 月第 1 次印刷
印数:1—1000(内含精装 200 册)
ISBN 7-307-01607-9/O·143(平)
ISBN 7-307-01608-7/O·144(精)
定价:(平)9.00 元
(精)14.00 元

前　言

本书是在编者多年来对武汉大学代数研究生的讲稿及1985年出版的《环构造》的基础上修改补充而成。它比较全面地介绍环的基本理论及近代有关成果，内容颇富；也可以说是编者在这方面的一个总结。

全书共10章：前6章介绍满足链条件的环，再介绍主要的根基理论；后4章前3章介绍某些主要代数的基本性质，最后一章介绍用模论中的基本性质来定义的环。这样，环的理论属于以前的及近代的基本具备。

本书与基础教材一样，特别注重思想性——把交代思想，阐明思路放在重要地位。这样读者便容易领会其本质，不只是知道抽象的式子而已。

我们假定读者都已熟悉近世代数中群、环，模、域的基本性质。因此本书中这些结果直接引用，有时不加说明。这些结果都可以在拙编近世代数(第4版，1991年武汉大学出版社出版)中找到。

本书初稿承樊恽、郑延履，吴泉水、邱琦章、靳平、刘仲奎、徐邦腾诸同志提出很多宝贵意见，最后校样前4章由邱琦章，5章～9章由徐邦腾，最后第10章由靳平诸同志校阅。使本书增色不少，谨在此一一致谢。编者浅陋，书中错误及不妥之处在所难免，敬请读者多多指正。

编　者

1993年3月于珞珈山

时年八十有三

目 录

第1章 Artin环

环的研究可以说是从1908年J.H. Wedderburn(1882～1948)关于有穷次代数构造的著名论文[1]开始的.在一段较长时间内,研究进展不大,直到30年代Wedderburn定理才得到推广.1927年E. Artin(1898～1962)提出了用降链条件来区别环,他把Wedderburn定理推广到满足降链条件的环[2],得到满足降链条件环的重要构造定理.因此满足降链条件的环叫做Artin环.这章讨论Artin环的构造,主要是讨论Artin半单环的构造,即Wedderburn—Artin定理.

§1 降链条件

我们先从定义开始.

假定R是环,如果它的任意左理想降链序列

$$L_1\supset L_2\supset\cdots\supset L_n\supset\cdots,L_i\text{ 是 }R\text{ 的左理想}$$

只有有穷项,也就是说,对于任意含无穷项的左理想降链序列

$$L_1\supseteq L_2\supseteq\cdots\supseteq L_n\supseteq\cdots,$$

必定有一个正整数m,自m项后的所有左理想都相等,即

$$L_m=L_{m+1}=\cdots.$$

那么R叫满足(左理想)**降链条件**.

假如R是满足降链条件的环,那么在它的任意左理想集合中,有不包含其他左理想的左理想,也就是说,任意左理想集合中含有它的极小左理想(可能不只一个).这是因为假如L_1是这集合

中左理想，如果它不是这集合中极小左理想，那么在这集合中有包含于 L_1 的左理想 L_2，于是我们有 $L_1 \supset L_2$，如果 L_2 又不是极小左理想，我们又有 $L_1 \supset L_2 \supset L_3$，这样继续下去，我们就得到左理想降链序列

$$L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \cdots \supset L_i \supset \cdots,$$

因为它只能有穷项，所以最后的 L_m 就不包含这集合中其他左理想. 因此，L_m 就是这集合的极小左理想. 一个环 R，如果它的任意左理想集合都有极小左理想，我们就说 R 满足(左理想)**极小条件**. 于是，一个环如果满足降链条件，它也满足极小条件. 反过来如果环满足极小条件，显然它也满足降链条件. 也就是说极小条件是降链条件的另一表达形式.

满足左理想降链条件也就是极小条件的环叫做 **Artin 环**. 因为这里是用左理想所以有时它又叫做左 **Artin** 环，同样也有右 **Artin** 环.

显然有穷环满足降链条件，因此它是 Artin 环. 再因为体只有两个左理想，所以体也是 Artin 环. 整数环 Z 不是 Artin 环，因为下面的理想降链序列

$$(m) \supset (2m) \supset (2^2 m) \supset \cdots$$

或

$$(m) \supset (m^2) \supset (m^3) \supset \cdots$$

都有无穷项. 同样多项式环以及一般主理想环都不是 Artin 环. 全矩阵环 Z_n 也不是 Artin 环，因为下面的左理想列有无穷项

$$L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \cdots \supset L_n \supset \cdots$$

这里 L_i 是所有形如下面矩阵形成的左理想

$$\begin{bmatrix} 2^i a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^i a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, a_i \text{ 都是整数}$$

所以 Artin 环是比较特殊的环，即降链条件或极小条件是一个很强的条件，就是最普通的整数环也不能满足这条件.

定理 1 假定 R 是 Artin 环，e 是 R 中幂等元，那么 eRe 也是

Artin 环.

证明 假定 L_1, L_2 是 eRe 的左理想，并且 $L_1 \supset L_2$，如果我们能够证明 $RL_1 \supset RL_2$，显然定理即告成立.

设 $ere \in L_1$ 但 $ere \overline{\in} L_2, r \in R$，显然 $ere = e \cdot ere \in RL_1$，如果 $ere \in RL_2$，那么 $ere = \sum s_i e r_i e, s_i \in R$，因此

$$ere = e \cdot ere = \sum (es_ie)(er_ie) \in L_2$$

这与假设不合. 证毕.

Artin 环 R 的理想 N 不一定也是 Artin 环，N 只能是作为 $R-$模时的 Artin 模. 假如 R 是 Artin 环，那么 R^n 也是 Artin 环，这里 n 是正整数[3]. 再 1963 年 J. G. Connell 证明群环 $R[G]$ 是 Artin 环的必要充分条件是：R 是 Artin 环，G 是有穷群[4].

同样假如 A 是代数，如果 A 满足左理想的降链条件，那么 A 叫做 Artin **代数**，譬如 A 是域 F 上的有穷次代数，因为 A 的左理想 L_i 是 A 的子代数，并且当 $L_i \supset L_j$ 时，L_j 的维数小于 L_i 的维数，所以 A 是 Artin 代数. 假如代数 A 只看成环，那么 A 不一定满足降链条件. 譬如代数 $A = Qu$，基础体 Q 是有理数体，$u^2 = 0$，显然 A 作为环不是 Artin 环，也就是说 Artin 代数不一定是 Artin 环.

假定 M 是 $R-$模，如果 M 满足子模的降链条件即 M 的任意子模的降链序列只有有穷项，那么 M 叫做 **Artin R-模**. 有时简称 **Artin 模**. 显然 Artin 模 M 的子模 N 也是 Antin 模因为 N 的子模又是 M 的子模，再我们容易知道假如 R 是 Artin 环，那么 $_RR$ 是 Artin 模，反过来也成立. 因此，R 是 Artin 环的必要充分条件是 $_RR$ 是 Artin 模.

我们知道环 R 的左理想看成 R-模时，如果是不可分解 R-模就叫做 R 的不可分解左理想，下面是 Artin 环的基本定理

定理 2 假定 R 是 Artin 环，那么 R 是有穷个不可分解左理想的直和.

证明 假定 M 是 R 中所有不能表为有穷个不可分解左理想

直和的左理想的集合，如果 M 非空，根据极小条件，M 有极小左理想 L_0. 显然 L_0 不能是不可分解的，因此它是可分解的. 设 $L_0=L_1+L_2$，因为 $L_1,L_2\subset L_0$，所以 $L_1,L_2\in M$，于是 L_1,L_2 都能表为有穷个不可分解左理想的直和，因此 L_0 也能如此，这与 $L_0\in M$ 的假设矛盾. 所以 M 是空集，即 R 中任意左理想都能表为有穷个不可分解左理想的直和. 当然 R 也是如此. 因此定理得证.

由上面的证明我们又得知 Artin 环的任意左理想是有穷个不可分解左理想的直和.

定理 3 假定 R 是 Artin 环，如果 R 有单位元，那么

$$R=Re_1+\cdots+Re_n,$$

这里 $e_1,\cdots,e_n$ 是正交幂等元，Re_i 是不可分解左理想.

证明 假定 $R=L_1+\cdots+L_n$，L_i 是 R 的不可分解左理想，那么 R 的单位元

$$e=e_1+\cdots+e_n,\ e_i\in L_i$$

因为 $e_i\in L_i$，所以 $Re_i\subseteq L_i$，再假定 $l_i\in L_i$，由

$$l_i=l_ie=l_ie_1+\cdots+l_ie_n,$$

根据直和得 $l_i=l_ie_i\in Re_i$ 即 $L_i\subseteq Re_i$. 因此 $L_i=Re_i$. 又因为 $e_i=e_ie_1+\cdots+e_ie_n$，所以 $e_i^2=e_i, e_ie_j=0, i\neq j$，这就是说 $e_1,\cdots,e_n$ 是正交幂等元. 定理证毕.

下面是 Artin 环的基本性质.

定理 4 假定 R 是 Artin 环，N 是 R 的理想，那么同余环 $\bar{R}=R-N$ 是 Artin 环，即 Artin 环的同态象也是 Artin 环.

证明 假定

$$\bar{L}_1\supseteq\bar{L}_2\supseteq\cdots\supseteq\bar{L}_n\supseteq\cdots$$

是 $\bar{R}$ 的任意左理想降链序列，因为 $R\sim\bar{R}$，所以 $\bar{L}_i$ 在 R 的完全象源 L_i 也是 R 的左理想，因此

$$L_1\supseteq L_2\supseteq\cdots\supseteq L_n\supseteq\cdots$$

是 R 的左理想序列，根据 R 的降链条件，我们有 $L_m=L_{m+1}=\cdots$，于是

$$L_m = L_{m+1} = \cdots.$$

这就是说 $\bar{R}$ 满足降链条件，即 $\bar{R}$ 是 Artin 环，定理成立.

上定理的逆不成立，即 $\bar{R}$ 是 Artin 环时，R 不一定是 Artin 环[5]. 譬如整数 Z 不是 Artin 环，但 $\bar{Z} = Z - (m)$ 是 Artin 环，因为 $\bar{Z}$ 只有有穷个元，当然它满足降链条件. 但我们还有

定理 5 假定 N 是环 R 的理想，如果 N 及 $\bar{R} = R - N$ 都是 Artin 环那么 R 也是 Artin 环.

证明 假定

$$L_1 \supseteq L_2 \supseteq \cdots \supseteq L_s \supseteq \cdots \tag{1}$$

是 R 的左理想的降链序列，因为 N 是 R 的理想，所以有

$$\{(L_1, N) - N\} \supseteq \{(L_2, N) - N\} \supseteq \cdots$$

又因为 $(L_i, N) - N$ 是 $\bar{R} = R - N$ 的理想，而 $\bar{R}$ 又是 Artin 环，因此有

$$\{(L_m, N) - N\} = \{(L_{m+1}, N) - N\} = \cdots$$

但 $\quad (L_m, N) - N \simeq L_m - (L_m \cap N)$

所以 $\quad \{L_m - (L_m \cap N)\} = \{L_{m+1} - (L_{m+1} \cap N)\} = \cdots \quad (2)$

又由(1)得

$$(L_1 \cap N) \supseteq (L_2 \cap N) \supseteq \cdots \supseteq (L_s \cap N) \supseteq \cdots$$

所以我们有

$$L_s \cap N = L_{s+1} \cap N = \cdots \tag{3}$$

由(2)，(3)，即得

$$L_t = L_{t+1} = \cdots$$

因此 R 是 Artin 环，证毕.

上面两个定理对模也同样成立，这就是说 Artin 模的同态象是 Artin 模，假定 N 是模 M 的子模，如果 N 及 $\bar{M} = M - N$ 都是 Artin 模，那么 M 也是 Artin 模.

我们知道，假定环 R 是理想 R_i 的直和，即 $R = R_1 + \cdots + R_s$，如果 R 满足降链条件，因为 R_i 的左理想也是 R 的左理想，所以 R_i 也满足降链条件，也就是说假如 R 是 Artin 环，那么它的直和因子也是 Artin 环. 反过来也成立. 这就是下面定理.

定理 6 假定环 R 是理想 R_1, R_2 的直和，即 $R=R_1+R_2$ 如果 R_1, R_2 都是 Artin 环，那么 R 也是 Artin 环.

证明 由环的第二同构定理，我们有 $R_2 \simeq R-R_1$，所以 $\overline{R}=R-R_1$ 是 Artin 环，这就是说 $R_1, \overline{R}$ 都是 Artin 环，因此由上定理 R 是 Artin 环. 证毕.

一般假如环 $R=R_1+\cdots+R_n$，如果 $R_1, \cdots, R_n$ 都是 Artin 环，那么 R 也是 Artin 环.

同样我们容易得知假如环 R 是它的左理想 $L_1, \cdots, L_n$ 的和，即 $R=(L_1, \cdots, L_n)$，那么 R 是 Artin 环的必要充分条件是 R-模 L_i 都是 Artin 模再假如模 M 是子模 $M_1, \cdots, M_n$ 的和，即 $M=(M_1, \cdots, M_n)$，那么 M 是 Artin 模的必要充分条件是 M_i 都是 Artin 模.

定理 7 假定 R 是 Artin 环，那么全矩阵 R_n 也是 Artin 环.

证明 假定 RE_{ij} 是 R_n 中所有 i 行 j 列上是 R 中元，其余都是 R 中零元的 n 阶矩阵的集合，那么 $R_n=\sum RE_{ij}$，即 R-模 R_n 是子模 RE_{ij} 的直和，因为 $R \sim RE_{ij}$，所以 R, RE_{ij} 看成 R-模时是同态，又 R 是 Artin 模，所以 RE_{ij} 也是 Artin R-模. 因此由上定理 R_n 是 Artin 模，即任意子模的降链序列只有有穷项. 再我们把 R 中元 a 看成 R_n 中对角形矩阵 $dig(a, \cdots, a)$，那么 R 就是 R_n 的子环. 于是 R_n 的任意左理想是 R_n 的子模，因此 R_n 的任意左理想序列只有有穷项，这就是说 R_n 满足降链条件，即 R_n 是 Artin 环. 定理成立.

特别，假如 K 是体，那么全矩阵环 K_n 是 Artin 环.

上定理的逆也是成立的，即假如全矩阵环 R_n 是 Artin 环，那么 R 也是 Artin 环. 这是因为如果 R 不满足降链条件，左理想序列

$$L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_k \supset \cdots$$

有无穷项，那么 R_n 的左理想序列

$$(L_1)_n \supset (L_2)_n \supset \cdots \supset (L_k)_n \supset \cdots$$

也是无穷项，这显然与 R_n 是 Artin 环的假设矛盾.

下面是 K_n 的一个基本性质，显然

$$L_i=KE_{1i}+\cdots+KE_{ni}, H_j=KE_{j1}+\cdots+KE_{jn}$$

分别是 K_n 的极小左、右理想，再假如 L 是 K_n 的极小左理想 α 是 K_n 中可逆元，那么 $L\alpha$ 也是 K_n 的极小左理想，这是因为由 $L'\subseteq L\alpha$ 得 $L'\alpha^{-1}\subseteq L$，因此 $L'\alpha^{-1}=0$ 或 $L'\alpha^{-1}=L$，即 $L'=0$ 或 $L'=L\alpha$，所以 $L\alpha$ 是极小左理想，今设

$$
a_i=\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
a_{i1} & \cdots & a_{i-1} & 1 & a_{i+1} & \cdots & a_n \\
 & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & 1
\end{bmatrix}
$$

那么 $$L_i a_i=\left\{\begin{bmatrix} k_1a_1 & \cdots & k_1 & \cdots & k_1a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_na_1 & \cdots & k_n & \cdots & k_na_n\end{bmatrix}\middle| k_i\in K\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n\end{bmatrix}(a_1\ \cdots\ a_{i-1}\ \ 1\ \ a_{i+1}\cdots n)\middle| k_i\in K\right\}$$

因此 $\left\{\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n\end{bmatrix}(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_n)\middle| k_i\in K, a_i \text{ 不完全是零}\right\}$ 是 K_n 的极小左理想.

同样 $\left\{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n\end{bmatrix}(k_1,\cdots,k_n)\middle| k_i\in K, a_i \text{ 不完全是零}\right\}$ 是 K_n 的极小右理想.

于是当 K 是无穷体时，K_n 的极小左、右理想都有无穷多个.

假定 R 是环，如果 $mx=0, x\in R, m$ 是整数时，有 $m=0$ 或 $x=0$，那么 R 叫做**无扭环**. 整数环就是无扭环.

定理 8 假定 R 是 Artin 环，如果 R 又是无扭环，那么

1）当 $Rx=0, x\in R$ 时，有 $x=0$.

2）对于任意整数 $m\neq 0$，有 $mR=R$，并且 R 是有理数域 Q 的代数.

证明 假定 $Rx=0$,那么

$$L_n=\{i2^n x \mid i \text{ 是任意整数}\}$$

是 R 的左理想.如果 $x\neq 0$,因为 R 是无扭环,所以下面的降链序列

$$L_0\supset L_1\supset\cdots\supset L_n\supset\cdots$$

有无穷项,这与降链条件的假设不合.因此 $x=0$.即 1)成立.

再因为 $m\neq 0$,所以

$$R\supseteq mR\supseteq\cdots\supseteq m^n R\supset\cdots$$

是 R 的理想的降链序列,因此有整数 k 存在使得 $m^k R=m^{k+1}R$,又假如 $x\neq 0$ 是 R 中任意元,那么 $m^k x=m^{k+1}y$,即 $m^k(x-my)=0$,因为 R 是无扭环,所以 $x=my$,并且这 y 是唯一的.因为如果 $my=mz$,即 $m(y-z)=0$,那么 $y=z$.因此我们可以把 y 写成 $\frac{1}{m}x$,即 $y=\frac{1}{m}x$,因此 $\frac{1}{m}x\in R$.我们命 $\frac{n}{m}x=n\cdot\frac{1}{m}x$,于是对于任意有理数 $\frac{n}{m}$,$\frac{n}{m}x\in R$,我们不难证明 R 是有理数体 Q 的代数.即 2)成立.

定理证毕.

再 Artin 环具备很多普通性质,我们知道元数是有穷的无零因子环是体,一般我们有

定理 9 无零因子 Artin 环是体.

证明 假定 Artin 环 R 是无零因子环,$0\neq a\in R$,从

$$Ra\supseteq Ra^2\supseteq\cdots,$$

根据降链条件,存在整数 m 使得 $Ra^m=Ra^{m+1}$,因此 $ba^m=ca^{m+1}$,但 $a^m\neq 0$,所以 $ca=b$,这就是说在 R 中 $xa=b$ 有解,因此 R 是体,证毕.

又我们知道,在交换环中质理想不一定是极大理想但在 Artin 环中却是如此.

定理 10 在交换 Artin 环 R 中质理想是极大理想.

证明 假定 P 是交换 Artin 环 R 的质理想,那么 $\bar{R}=R-P$ 是无零因子环,又因为 $\bar{R}$ 是 Artin 环,由上定理,$\bar{R}$ 是体.因此 P 极大理想,于是定理成立.

定理 11 在交换 Artin 环 R 中只有有穷多个质理想.

证明 如果 R 中没有质理想,定理显然成立. 如果 R 中有质理想,由极小条件在 R 的所有有穷个质理想的交的集合中有极小,设其为 $P_1\cap\cdots\cap P_m$,再假定 P 是 R 的任意质理想,由

$$P\cap P_1\cap\cdots\cap P_m=P_1\cap\cdots\cap P_m$$

我们有 $P_1\cap\cdots\cap P_n\subseteq P$. 因为 $P_1\cdots P_m\subseteq P_1\cap\cdots\cap P_m$,所以存在某 i 使 $P_i\subseteq P$,但 P_i 是极大(定理 10),因此 $P=P_i$,这就是说任意 P 与 $P_1,\cdots,P_m$ 中某 P_i 一致. 定理成立.

于是交换 Artin 环不一定有极大理想.

我们知道在交换 Artin 环中,所有质理想的交是幂零元理想(其中任意元都是幂零元),下面证明它还是幂零理想,即

定理 12 假定 R 是交换 Artin 环,N 是它的所有质理想的交,那么 N 是幂零理想.

证明 根据极小条件存在 $k>0$,使 $N^k=N^{k+1}=\cdots=M$,假如 $M\neq 0$,显然我们有满足 $\{K\mid MK\neq 0\}$ 的理想 K 的集合. 假设 K 就是其中极小理想. 于是存在 $0\neq x\in K$,使 $Mx\in 0$,因为 $(x)\subseteq K$,而 K 是极小,所以 $(x)=K$,又因为 $RMx\subseteq Mx$. 所以 Mx 是 R 的理想,因此 $Mx=K$,即 $Mx=(x)$. 于是存在 $y\in M$ 使 $x=yx$,因而有 $x=yx=y^2x=\cdots=y^nx$,但 y 是幂零元,所以 $x=0$ 这与 $x\neq 0$ 的假设矛盾,所以 $M=0$,即 N 是幂零,证毕.

在上面的讨论中假如把左理想换成右理想我们就得到右降链条件,右极小条件,右 Artin 环的类似定理. 但要注意的是同一个环它满足左理想的降链条件,不一定就满足右理想的降链条件,也就是说左 Artin 环不一定就是右 Artin 环. 譬如体 K 是左 Artin 环也是右 Artin 环,由定理 4 我们还容易得知 K 上全矩阵环 K_n 是左 Artin 环也是右 Artin 环. 假如 R 是幂零元环,那么当 R 是左 Artin 环时,R 也是右 Artin 环,当 R 是右 Artin 环时,R 也是左 Artin 环. 证明请参考文献[6]

再假定 A 是基础体为有理数体 Q,底元为 e,a 的代数,即 $A=Qe+Qa$,

其中

$$e^2=e, a^2=0, ea=a, ae=0$$

因为 A 的左理想是 A 的子代数，所以 A 满足左理想的降链条件. 再假如 (m) 是 Q 的子加群，因为 A 中任意元右乘 $(m)a$ 都成为零，所以 $(m)a$ 是 A 的右理想，因此 A 的右理想列

$$(m)a \supset (2m)a \supset (2^2m)a \supset \cdots$$

有无穷项，所以 A 不满足右理想的降链条件，即 A 是左 Artin 代数但不是右 Artin 代数.

§2 幂零理想

我们知道，假定 L 是环 R 的左理想，如果其中任意都是幂零元，就叫做**幂零元左理想**，如果 L 的某乘幂是零理想，即存在某正整数 m，使

$$L^m=0,$$

也就是

$$x_1x_2\cdots x_m=0, x_i\in L,$$

那么 L 叫做**幂零左理想**. 显然幂零左理想是幂零元左理想，反过来不一定成立，即幂零元左理想不一定是幂零左理想. 因为从 $a^n=0, b^n=0$ 不一定有 $(a+b)^n=0$.

譬如 A 是域 F 的无穷维代数，F 的特征数是 2，乘法按分配律规定，底元为 $x_1, \cdots, x_n, \cdots$,

$$x_ix_j=\begin{cases}0, \text{当}(i,j)\neq 1 \\ x_{ij}, \text{当}(i,j)=1\end{cases},$$

显然 A 是交换环，其中任意元的 2 次自乘幂都是零，因此 A 是幂零元代数但它不是幂零，因为如果 $A^n=0$，取 $p_1, \cdots, p_n$ 为 n 个不同的质数，那么

$$x_{p_1}\cdots x_{p_n}\neq 0,$$

这显然是矛盾. 假定环 R 中任意 $a^n=0$，就是 n 是固定的整数，我们也不一定能够推得 $R^n=0$，因为这时要求 $a_1\cdots a_n=0, a_i\in R$.

定理 1 假定环 R 没有非零的幂零理想，$L(\neq 0)$ 是 R 的极小左理想，那么 $L=Re$，这里 e 是幂等元.

证明 假如在 L 中能找到非零的幂等元 e，因为 $Re\subseteq L$，而 $Re\neq 0$，所以 $L=Re$，定理就告成立. 下面我们来找 e.

假定 $L^2=0$，那么 $(LR)^2=LRLR\subseteq L^2R=0$，即 LR 是幂零理想，所以 $LR=0$，因此 L 是 R 的理想，这与假设不合. 所以 $L^2\neq 0$. 于是 L 中有元 b 使 $Lb\neq 0$. 但 $Lb\subseteq L$，所以 $L=Lb$，因此 L 中有元 e 使 $eb=b$. 所以 $e^2b=eb$，即 $(e^2-e)b=0$，如果 $e^2-e=0$，那么 $e^2=e$. 又因为 $eb=b$，所以 $e\neq 0$，因此 e 就是 L 中非零的幂等元，今设

$$L_0=\{x\mid x\in L, xb=0\},$$

因为 $Lb\neq 0$，所以 $L_0\subset L$. 因此 $L_0=0$，但 $e^2-e\in L_0$，所以 $e^2-e=0$，定理证毕.

由上面的证明，我们容易得知假如 L 是环 R 的极小左理想，那么 $L^2=0$，或 $L=Re$，这里 e 是幂等元，再假如 L 是 R 的极小左理想，a 是 R 中任意元，如果 $La\neq 0$，那么 La 也是 R 的极小左理想，这是因为如果 $L'a\subseteq La$，显然 L' 是 R 的左理想，并且 $L'\subseteq L$，因为 L 是极小，所以 $L'=L$，即 $L'a=La$，因此 La 是极小.

环 R 的零理想如果是质理想，那么 R 叫做**质环**.

定理 2 假定环 R 有极小左理想，那么 R 中所有极小左理想的和 S 是 R 的理想. 再如果 R 又是质环，那么 S 又是 R 的极小理想，并且 S 包含在 R 的任意非零的理想之中.

证明 假定 L 是 R 的极小左理想，由上面的证明，$La=0$ 或 La 是 R 的极小左理想，因此 S 是 R 的理想. 定理的前半段成立.

显然只要理想 S 包含在任意非零的理想之中，S 就是 R 的极小理想了. 再假定 R 是质环，$S_1\neq 0$ 是 R 的理想，如果 $S_1\not\supseteq S$，那就有极小理想 $L\not\subset S_1$，因为 $S_1\cap L$ 是 R 的左理想，而 L 是极小，所以 $S_1\cap L=0$. 于是 $S_1L=0$. 因此 $S_1(LR)=0$，但 $S_1\neq 0$，R 是质环，所以 $LR=0$，因此 L 是 R 的理想，于是 $S_1L=0$ 与 R 是质环矛盾，所以 $S_1\supseteq S$.