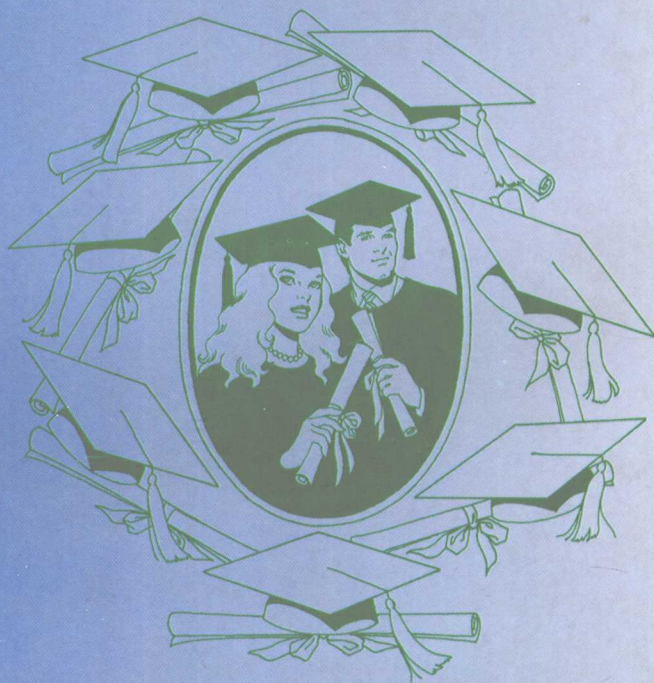


考研大纲辅导教材

1998年 硕士研究生入学考试 应试教程(数学分册)

编写 考研命题研究组
主编 北京大学田茂英教授



新华出版社

考研大纲辅导教材

1998 年硕士研究生入学考试应试教程

(数 学 分 册)

(含数学一至四及 MBA)

编写 考研命题研究组编写

主编 北京大学田茂英教授

新华出版社

· 北 京 ·

图书在版编目(CIP)数据

1998 年硕士研究生入学考试应试教程:数学分册/田茂英主编. —北京:新华出版社,1997. 4
ISBN 7-5011-3553-3

I. 19… II. 田… III. 数学-研究生-入学考试-自学参考资料 N. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 04196 号

责任编辑:张虹生

封面设计:胡东华

内 容 简 介

本书对工学与经济学硕士研究生入学考试大纲所要求的概念、定理和公式进行简明、扼要地叙述、辅导。重点精选了各类题型的例题并作详细解答。对重点例题,或在解答前作了解题方法分析,或在题后有关键注释。部分题目一题多解,对考试中常见题型也以例题的形式作了重点介绍。每节(或章)后均有适当数量的习题(第四篇除外),全部习题都附有答案或提示,以便读者练习。这些都有利于提高考生的解答应试能力。

内容包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步及微积分在经济学中的应用四部分。可代价工学与经济学类的硕士研究生应试者,大专院校的学生阅读,也适合于自学者学习。

1998 年硕士研究生入学考试应试教程(数学分册)

田茂英主编

※

新华出版社出版

各地新华书店经销

香河县胶印厂印刷

开本:787×1092 毫米 1/16 印张 28.5 字数:598 千字

1997 年 4 月第 1 版 1997 年 4 月第 1 次印刷

印数:1—20000 册

ISBN 7-5011-3553-3/G · 1317

定价:33.00 元

编者的话

本丛书《数学分册》一书自出版以来受到了广大读者的欢迎。本书是根据国家教委新修订的工学(数学一和数学二)与经济学(数学三、数学四及 MBA)考试大纲,对原书进行了修订后再版。新版在保留原书优点的基础上,根据新大纲的变动内容也作了相应改动。例如增写了一阶差分方程的内容,删去了超纲的部分,特别是在各章增加了一些综合性的例题。这更有利于提高考生的解题应试能力。我们希望新版将更加受读者欢迎。

根据新的大纲,数学一包括本书的第一(第六章的 § 3 除外)、二、三篇的全部内容。数学二包括第一篇的第一、二两章的全部和第六章的 § 1 的全部与 § 2 的部分内容,此外还包括第二篇的第一、二、三章内容。数学三包括第一篇第一、二两章,第三章 § 2、§ 3 的内容,第四章 § 1 有关二重积分的内容及无界区域上二重积分的简单计算,第五章 § 1, § 2, 第六章 § 1 全部、§ 2 的部分内容及 § 3 全部,第二篇(第四章的 § 1 除外),第三篇的全部及第四篇。数学四包括第一篇的第一、二两章,第三章 § 2, § 3, 第四章 § 1 的二重积分的有关内容及无界区域上二重积分的简单计算,第二篇(除去第四章 § 1 及第五章的内容),第三篇(第五章除外)内容,第四篇。除此之外,本书还对有些内容及题目,加以 * 号,凡带 * 或 * * 的部分对数学二、数学三及数学四都不要求,带 * * 者是适当拓宽的内容,对数学一的考生一般也不要求,可根据需要由读者自行取舍。这样,更便于不同类考生选用,也有利于广大读者阅读。

此外,还将近几年全国硕士研究生入学考试数学试题作了简单分析,通过分析列表,指出常考内容及复习重点。该部分内容放在与本书配套另行出版的《硕士研究生入学考试最后冲刺——各科全真模拟试题》(数学分册)中。

本书不仅是研究生入学考试应试者的一本复习用书,同时我们希望对正学习高等数学,线性代数,及概率论与数理统计的理工学,经济学类院校的本科生、大专生、电大、夜大的学生也是一本好的参考书。也便于自学者阅读。

本书是在田茂英教授主持下编写的,第三篇概率论由张立昂编写,其他篇章由田茂英完成。

本书的编写曾得到郭懋正教授和黄少云教授的支持,在此表示感谢。

由于水平有限,书中难免有不妥之处,欢迎批评指正。

编者于北京大学燕北园

目 录

前 言 数学一至四适用专业及考试说明.....	(1)
第一篇 高等数学.....	(4)
第一章 一元函数微分学.....	(4)
§1 极限与连续	(4)
习题一	(17)
答案与提示	(18)
§2 导数 微分及其运算.....	(19)
习题二	(31)
答案与提示	(33)
§3 微分学中值定理及微分学的应用.....	(33)
习题三	(49)
答案与提示	(51)
第二章 一元函数积分学	(52)
§1 不定积分.....	(52)
习题一	(62)
答案与提示	(63)
§2 定积分.....	(64)
习题二	(79)
答案与提示	(81)
§3 广义积分与定积分的应用.....	(82)
习题三	(94)
答案与提示	(95)
第三章 空间解析几何与多元函数微分学	(97)

§1 空间解析几何与向量代数	(97)
习题一	(107)
答案与提示	(107)
§2 多元函数 极限 偏导数与全微分	(108)
习题二	(120)
答案与提示	(122)
§3 多元函数微分学的应用	(124)
习题三	(133)
答案与提示	(134)

第四章 多元函数积分学 (135)

§1 重积分	(135)
习题一	(152)
答案与提示	(153)
§2 曲线积分与曲面积分	(154)
习题二	(173)
答案与提示	(174)

第五章 级数 (175)

§1 常数项级数	(175)
习题一	(186)
答案与提示	(188)
§2 函数项级数与幂级数	(188)
习题二	(201)
答案与提示	(202)
§3 富氏级数	(203)
习题三	(210)
答案与提示	(210)

第六章 常微分方程 (212)

§1 基本概念 一阶微分方程	(212)
习题一	(221)
答案与提示	(222)

§ 2 高阶微分方程	(223)
习题二	(235)
答案与提示	(236)
§ 3 一阶差分方程	(237)
习题三	(243)
答案与提示	(243)

第二篇 线性代数..... (245)

第一章 行列式..... (245)

§ 1 n 阶行列式的概念与性质	(245)
§ 2 应用	(251)
习题一	(256)
答案与提示	(257)

第二章 线性方程组..... (259)

§ 1 矩阵消元法	(259)
§ 2 n 维向量	(264)
习题二	(270)
答案与提示	(272)
§ 3 矩阵的秩	(273)
§ 4 线性方程组解的结构	(275)
习题三	(280)
答案与提示	(281)

第三章 矩阵代数..... (283)

§ 1 矩阵的运算	(283)
§ 2 逆矩阵	(290)
习题四	(296)
答案与提示	(297)

第四章 线性空间 特征值与特征向量..... (299)

§ 1 线性空间	(299)
§ 2 矩阵的特征值与特征向量	(303)
习题五	(312)
答案与提示	(314)

第五章 二次型

§ 1 二次型和它的标准形	(316)
§ 2 正定二次型	(324)
§ 3 正交变换与正交矩阵	(327)
习题六	(333)
答案与提示	(335)

第三篇 概率论

第一章 随机事件和概率

§ 1 随机事件和样本空间	(337)
§ 2 事件之间的关系与运算	(337)
§ 3 概率的定义及基本性质	(339)
§ 4 概率的计算公式	(340)
§ 5 例题	(341)
习题一	(344)
答案与提示	(345)

第二章 随机变量及其概率分布

§ 1 随机变量及其概率分布	(346)
§ 2 数学期望的方差	(348)
§ 3 常见分布	(350)
§ 4 例题	(353)
习题二	(357)
答案与提示	(359)

第三章 二维随机变量及其概率分布

§ 1 二维随机变量及其概率分布	(361)
§ 2 随机变量的独立性	(363)
§ 3 二元随机变量函数的分布	(363)
§ 4 协方差和相关系数	(366)
§ 5 常见二维分布	(367)
§ 6 例题	(367)
习题三	(371)
答案与提示	(373)
 第四章 大数定律和中心极限定理	 (375)
习题四	(378)
答案与提示	(378)
 第五章 数理统计初步	 (379)
§ 1 样本与统计量	(379)
§ 2 参数估计	(380)
§ 3 假设检验	(383)
§ 4 例题	(385)
习题五	(389)
答案与提示	(390)

说明:第五篇、第六篇见《硕士研究生入学考试最后冲刺——各科全真模拟试题》(数学分册)

常用记号

$\forall$, 表示任意一个;

$\exists$, 表示存在, 有一个;

$A \Rightarrow B$, 表示 A 蕴涵 B , 即如果 A 则必 B ;

$A \Leftrightarrow B$, 表示 A 与 B 等价, 即 A 以 B 为充分必要条件。

前言 数学一至四适用专业 及考试说明

数学一

一、适用的专业

力学、仪器仪表、动力工程及工程热物理、电工、电子学与通信、计算机科学与技术、自动控制、管理科学与工程、船舶与海洋工程、原子能科学与技术、航空与宇航技术、兵器科学与技术、机械工程、材料科学与工程、冶金、土木、水利、测绘、化学工程与工业化学、地质勘探、矿业、石油、铁道、公路、水运、以及建筑学、技术科学史、轻工、纺织、林业工程、农业工程六个学科中对数学要求较高的二级学科、专业。

二、考试内容

1. 高等数学：(1)函数、极限、连续；(2)一元函数微分学；(3)一元函数积分学；(4)向量代数与空间解析几何；(5)多元函数微分学；(6)多元函数积分学；(7)无穷级数；(8)常微分方程。
2. 线性代数：(1)行列式；(2)矩阵；(3)向量；(4)线性方程组；(5)矩阵的特征值和特征向量；(6)二次型。
3. 概率论与数理统计初步：(1)随机事件和概率；(2)随机变量及其概率分布；(3)二维随机变量及其概率分布；(4)随机变量的数字特征；(5)大数定理和中心极限定理；(6)数理统计的基本概念；(7)参数估计；(8)假设检验。

三、试卷结构

1. 内容比例

- (1)高等数学 约 60%
- (2)线性代数 约 20%
- (3)概率论与数理统计初步 约 20%

2. 题型比例

- (1)填空题与选择题 约 30%
- (2)解答题(包括证明题) 约 70%

数学二

一、适用的专业

建筑学、科学技术史、纺织、轻工、林业工程、农业工程六个学科中对数学要求较低的二级学科、专业。

二、考试内容

1. 高等数学：(1)函数、极限、连续；(2)一元函数微分学；(3)一元函数积分学；(4)常微

分方程。

2. 线性代数初步: (1)行列式; (2)矩阵; (3)线性方程组。

三、试卷结构

1. 内容比例

(1)高等数学 约 85%

(2)线性代数初步 约 15%

2. 题型比例

(1)填空题与选择题 约 30%

(2)解答题(包括证明题)约 70%

数学三

一、适用的专业

国民经济计划与管理(含国民经济系统分析)、工业经济、企业管理(含企业财务管理)、统计学、数量经济学、技术经济、运输经济(附邮电经济)、经济地理、投资经济、信息经济以及对数学要求较高的人口经济学、保险学专业。

二、考试内容

1. 微积分: (1)函数、极限、连续; (2)一元函数微分学;

(3)一元函数积分学; (4)多元函数微积分; (5)无穷级数; (6)常微分方程与差分方程。

2. 线性代数: (1)行列式; (2)矩阵; (3)向量; (4)线性方程组; (5)矩阵的特征值与特征向量; (6)二次型。

3. 概率论与数理统计: (1)随机事件和概率; (2)随机变量及其概率分布; (3)随机变量的数字特征; (4)大数定律和中心极限定理; (5)数理统计的基本概念; (6)参数估计; (7)假设检验。

三、试卷结构

1. 内容比例:

(1)微积分 约 50%

(2)线性代数 约 25%

(3)概率论与数理统计 约 25%

2. 题型比例

(1)填空题与选择题 约 30%

(2)解答题(包括证明题)约 70%

数学四

一、适用的专业

农业经济(含林业经济、畜牧业经济、渔业经济)、商业经济(含物资经济)、劳动经济学、财政学、货币银行学、会计学(含审计学)、国际贸易、国际金融、世界经济、政治经济学、马克思主义经济思想史、中国经济思想史、中国经济、西方经济学、外国经济史、外国经济思想史、消费经济、商品经济、旅游经济、城市经济、国际经济以及对数学要求较低的人口

经济学、保险学专业。

二、考试内容

1. 微积分:与数学三相比,数学四不考查无穷级数、常微分方程和差分方程。其余数学三与数学四的要求相同。

2. 线性代数:数学四不考查二次型,其余内容与数学三相同。

3. 概率论:数学四不考大数定律(但考中心极限定理)、数理统计的有关内容(包括基本概念、参数估计、假设检验)。其余部分与数学三要求相同。

三、试卷结构

1. 内容比例

(1)微积分 约 50%

(2)线性代数 约 25%

(3)概率论 约 25%

2. 题型比例

(1)填空题与选择题 约 30%

(2)解答题(包括证明题) 约 70%

第一篇 高等数学

第一章 一元函数微分学

§1 极限与连续

一、极限的概念及运算

1. 数列的极限

(1) 定义 设有数列 $\{x_n\}$ 及数 a , 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时以 a 为极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 或 $x_n \rightarrow a$ (当 $n \rightarrow \infty$)。也称 $\{x_n\}$ 收敛。

数列 $\{x_n\}$ 是否收敛以及极限 a 均与 $\{x_n\}$ 的前有限项无关。

(2) 若 $\{x_n\}$ 的极限存在, 则极限唯一。

2. 函数的极限

(1) 定义 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义 (可能不包括点 x_0), A 为某个确定的常数, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时以 A 为极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A$ (当 $x \rightarrow x_0$)。

(2) 单侧极限

左极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 亦可记为 $f(x_0 - 0) = A$ 。

右极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 亦可记为 $f(x_0 + 0) = A$ 。

(3) 左、右极限与极限的关系

定理 1 极限存在 $\iff$ 左、右极限存在且相等。此定理常用来证明分段函数在分段点处极限的存在性。

3. 极限的运算法则

若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$$

$$(2) \lim(x) \cdot g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB \quad \text{特别}$$

$$\lim Cf(x) = C \lim f(x) = CA, C \text{ 为常数}$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}, (B \neq 0)$$

注 1° 极限过程为 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow \infty$ 等)

2° (1), (2) 可推广到有限个函数的极限。

4. 性质

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 且 $A > B$, 则 $\exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > g(x)$

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 且存在一个 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) \geq g(x)$, 则 $A \geq B$

(3) 夹逼定理: 若 $\exists \delta_0 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_0$ 时, 有 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ 。

注 夹逼定理的数列形式

若存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n \leq C_n \leq b_n$ 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = l.$$

5. 无穷小量与无穷大量

(1) 定义 若函数(或数列)以零为极限, 则称该函数(或数列)为无穷小量。非零无穷小量的倒数为无穷大量。

(2) 无穷小量的阶

设 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 都是 x 的同一极限过程的无穷小量。

1° 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量, 记作 $\alpha(x) = o(\beta(x))$

2° 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小量

3° 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等阶的无穷小量, 记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

4° 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)^k} = C \neq 0$, (k 为常数), 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小量。

(3) 极限与无穷小量的关系

定理 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$

二、求极限的常用方法

1. 证明数列极限存在的常用方法:

(1) 单调增(或减)且有上(或下)界的数列有极限。

(2) 夹逼定理。

(3) 利用函数极限与数列极限的关系。

定理 3 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ (A 为有限或 ∞) $\Leftrightarrow$ 对任何以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\} (x_n \neq x_0)$

都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

该定理还常用来证明函数的极限不存在。

2. 求极限是最基本的运算,也是必定考的问题。求极限的主要方法如下:

(1) 利用极限的运算法则及函数的连续性;

(2) 利用两个重要极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

(3) 利用函数的单调有界性;

(4) 利用无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量;

(5) 用夹逼定理;

(6) 用洛必达法则;

(7) 利用等价无穷小量及台劳公式;

(8) 利用导数与定积分的定义;

(9) 利用微分中值定理和积分中值定理。

另外,求极限还常用以下结果:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0); \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

三、常考题型例题分析

1. 用极限的定义证明极限

例 1 用“ $\epsilon-N$ ”的方法证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2-3} = 0$ 。

分析 根据定义, $\forall \epsilon > 0$, 要找 $N > 0$, 使当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{n}{n^2-3} - 0 \right| = \frac{n}{n^2-3} < \epsilon$$

如何找 N ? 首先要从上面最后的不等式中解出 n , 为便于这样做, 要通过适当放大, 消去分

子中的 n , 只让分母含有 n 。

由于 $n \rightarrow \infty$, 故可设 $n > 3$, 从而 (用 n 代替分母中的 3) 有

$\frac{n}{n^2-3} < \frac{n}{n^2-n} = \frac{1}{n-1}$, 要使 $\left| \frac{n}{n^2-3} - 0 \right| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{n-1} < \epsilon$, 即只要 $n > \frac{1}{\epsilon} + 1$, 这样就可取到 N

证明 不妨设 $n > 3, \forall \epsilon > 0$, 取 $N \geq \max\{\frac{1}{\epsilon} + 1, 3\}$, 当 $n > N$ 时, 就有

$$\left| \frac{n}{n^2-3} - 0 \right| < \epsilon, \text{ 这就证明了 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2-3} = 0$$

注 要使 $\frac{1}{n-1} < \epsilon$, 只要取 $N \geq \frac{1}{\epsilon} + 1$ 即可, 但前面已设 $n > 3$, 故取 $N \geq \max\{\frac{1}{\epsilon} + 1, 3\}$

例 2 用定义证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0 (|q| < 1)$

证法一 $\forall \epsilon > 0$, 要使 $||q|^n - 0| = |q|^n < \epsilon$, 只要 $n \ln |q| < \ln \epsilon$, 即只要 $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |q|}$ (因为 $|q| < 1$, 故 $\ln |q| < 0$), 可取 $N \geq \frac{\ln \epsilon}{\ln |q|}$, 当 $n > N$ 时, 就有

$$||q|^n - 0| < \epsilon$$

这就证明了 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0$

证法二 $\because |q| < 1$, 故可令 $|q| = \frac{1}{1+h} (h > 0)$, 从而 $|q|^n = \frac{1}{(1+h)^n}$, $(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \dots + h^n > nh$, 于是 $|q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{nh}$, $\forall \epsilon > 0$, 要使 $||q|^n - 0| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{nh} < \epsilon$, 即只要 $n > \frac{1}{h\epsilon}$, 故可取 $N = [\frac{1}{h\epsilon}]$, 当 $n > N$ 时, 就有 $||q|^n - 0| < \epsilon$

例 3 用定义证明 $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$

分析 由定义, $\forall \epsilon > 0$, 要找 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x-3| < \delta$ 时, 有 $|x^2-9| < \epsilon$ 。

为找 $\delta > 0$, 要从最后的不等式中解出 $|x-3|$ 。因为 $|x^2-9| = |x+3||x-3|$, 将其中的 $|x+3|$ 用数代替, 为此可设 $|x-3| < 1$ (因为 $x \rightarrow 3$), 即 $-1 < x-3 < 1$, 于是 $5 < x+3 < 7$, 由此得 $|x+3| < 7$, 这样就容易找到 δ (在证明时, 也可不写出分析)

证明 不妨设 $|x-3| < 1$ 。因为

$$|x^2-9| = |x+3||x-3| < 7|x-3|$$

$\forall \epsilon > 0$, 要使 $|x^2-9| < \epsilon$, 只要 $7|x-3| < \epsilon$, 即只要 $|x-3| < \frac{\epsilon}{7}$, 故可取 $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{7}, 1\}$, 当 $0 < |x-3| < \delta$ 时, 就有 $|x^2-9| < \epsilon$, 这就证明了 $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$