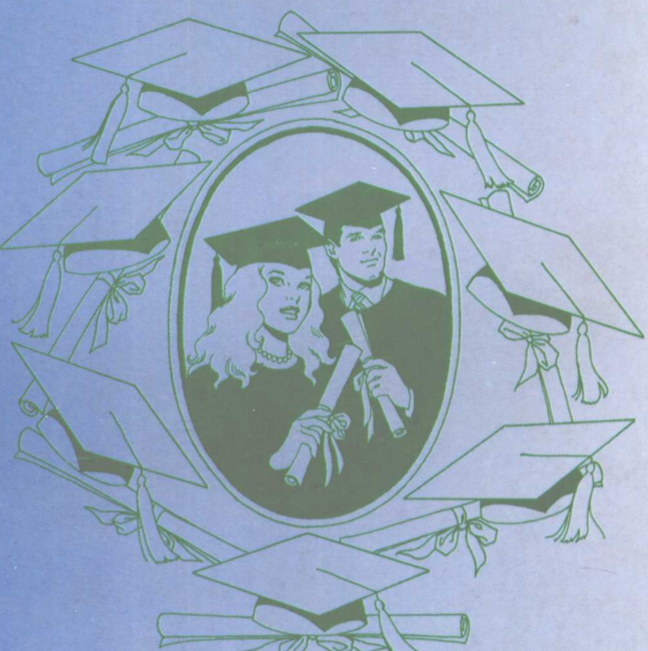
考研大纲辅导教材

1998年
硕士研究生入学考试
应试教程(数学分册)

编写 考研命题研究组
主编 北京大学田茂英教授



新华出版社

考 研 大 纲 辅 导 教 材

1998 年硕士研究生入学考试应试教程

（数 学 分 册）

（含数学一至四及 MBA）

编写　考研命题研究组编写

主编　北京大学田茂英教授

新华出版社

· 北　　京 ·

图书在版编目(CIP)数据

1998年硕士研究生入学考试应试教程:数学分册/田茂英主编. 一北京:新华出版社,1997.4
ISBN 7-5011-3553-3

Ⅰ.19… Ⅱ.田… Ⅲ.数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.G643

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第04196号

责任编辑:张虹生
封面设计:胡东华

内容简介

本书对工学与经济学硕士研究生入学考试大纲所要求的概念、定理和公式进行简明、扼要地叙述、辅导。重点精选了各类题型的例题并作详细解答。对重点例题,或在解答前作了解题方法分析,或在题后有关键注释。部分题目一题多解,对考试中常见题型也以例题的形式作了重点介绍。每节(或章)后均有适当数量的习题(第四篇除外),全部习题都附有答案或提示,以便读者练习。这些都有利于提高考生的解答应试能力。

内容包括高等数学,线性代数、概率论与数理统计初步及微积分在经济学中的应用四部分。可代价工学与经济学类的硕士研究生应试者,大专院校的学生阅读,也适合于自学者学习。

1998年硕士研究生入学考试应试教程(数学分册)
田茂英主编
※
新华出版社出版
各地新华书店经销
香河县胶印厂印刷
开本:787×1092毫米 1/16 印张 28.5 字数:598千字
1997年4月第1版 1997年4月第1次印刷
印数:1—20000册
ISBN 7—5011—3553—3/G·1317
定价:33.00元

编 者 的 话

本丛书《数学分册》一书自出版以来受到了广大读者的欢迎。本书是根据国家教委新修订的工学(数学一和数学二)与经济学(数学三、数学四及 MBA)考试大纲,对原书进行了修订后再版。新版在保留原书优点的基础上,根据新大纲的变动内容也作了相应改动。例如增写了一阶差分方程的内容,删去了超纲的部分,特别是在各章增加了一些综合性的例题。这更有利于提高考生的解题应试能力。我们希望新版将更加受读者欢迎。

根据新的大纲,数学一包括本书的第一(第六章的§3除外)、二、三篇的全部内容。数学二包括第一篇的第一、二两章的全部和第六章的§1的全部与§2的部分内容,此外还包括第二篇的第一、二、三章内容。数学三包括第一篇第一、二两章,第三章§2、§3的内容,第四章§1有关二重积分的内容及无界区域上二重积分的简单计算,第五章§1,§2,第六章§1全部、§2的部分内容及§3全部,第二篇(第四章的§1除外),第三篇的全部及第四篇。数学四包括第一篇的第一、二两章,第三章§2,§3,第四章§1的二重积分的有关内容及无界区域上二重积分的简单计算,第二篇(除去第四章§1及第五章的内容),第三篇(第五章除外)内容,第四篇。除此之外,本书还对有些内容及题目,加以*号,凡带*或**的部分对数学二、数学三及数学四都不要求,带**者是适当拓宽的内容,对数学一的考生一般也不要求,可根据需要由读者自行取舍。这样,更便于不同类考生选用,也有利于广大读者阅读。

此外,还将近几年全国硕士研究生入学考试数学试题作了简单分析,通过分析列表,指出常考内容及复习重点。该部分内容放在与本书配套另行出版的《硕士研究生入学考试最后冲刺——各科全真模拟试题》(数学分册)中。

本书不仅是研究生入学考试应试者的一本复习用书,同时我们希望对正学习高等数学,线性代数,及概率论与数理统计的理工学,经济学类院校的本科生、大专生、电大、夜大的学生也是一本好的参考书。也便于自学者阅读。

本书是在田茂英教授主持下编写的,第三篇概率论由张立昂编写,其他篇章由田茂英完成。

本书的编写曾得到郭懋正教授和黄少云教授的支持,在此表示感谢。

由于水平有限,书中难免有不妥之处,欢迎批评指正。

编者于北京大学燕北园

目　录

说明:第五篇、第六篇见《硕士研究生入学考试最后冲刺——各科全真模拟试题》(数学分册)

常用记号

$\forall$,表示任意一个;

$\exists$,表示存在,有一个;

$A \Rightarrow B$,表示 A 蕴涵 B,即如果 A 则必 B;

$A \Leftrightarrow B$,表示 A 与 B 等价,即 A 以 B 为充分必要条件。

前言 数学一至四适用专业及考试说明

数学一

一、适用的专业

力学、仪器仪表、动力工程及工程热物理、电工、电子学与通信、计算机科学与技术、自动控制、管理科学与工程、船舶与海洋工程、原子能科学与技术、航空与宇航技术、兵器科学与技术、机械工程、材料科学与工程、冶金、土木、水利、测绘、化学工程与工业化学、地质勘探、矿业、石油、铁道、公路、水运、以及建筑学、技术科学史、轻工、纺织、林业工程、农业工程六个学科中对数学要求较高的二级学科、专业。

二、考试内容

1. 高等数学:(1)函数、极限、连续;(2)一元函数微分学;

(3)一元函数积分学;(4)向量代数与空间解机几何;(5)多元函数微分学;(6)多元函数积分学;(7)无穷级数;(8)常微分方程。

2. 线性代数:(1)行列式;(2)矩阵;(3)向量;(4)线性方程组;(5)矩阵的特征值和特征向量;(6)二次型。

3. 概率论与数理统计初步:(1)随机事件和概率;(2)随机变量及其概率分布;(3)二维随机变量及其概率分布;(4)随机变量的数字特征;(5)大数定理和中心极限定理;(6)数理统计的基本概念;(7)参数估计;(8)假设检验。

三、试卷结构

1. 内容比例

(1)高等数学　约60%

(2)线性代数　约20%

(3)概率论与数理统计初步　约20%

2. 题型比例

(1)填空题与选择题　约30%

(2)解答题(包括证明题)　约70%

数学二

一、适用的专业

建筑学、科学技术史、纺织、轻工、林业工程、农业工程六个学科中对数学要求较低的二级学科、专业。

二、考试内容

1. 高等数学:(1)函数、极限、连续;(2)一元函数微分学;(3)一元函数积分学;(4)常微

分方程。

2. 线性代数初步：(1)行列式；(2)矩阵；(3)线性方程组。

三、试卷结构

1. 内容比例

(1)高等数学　约 85%

(2)线性代数初步　约 15%

2. 题型比例

(1)填空题与选择题　约 30%

(2)解答题(包括证明题)约 70%

数学三

一、适用的专业

国民经济计划与管理(含国民经济系统分析)、工业经济、企业管理(含企业财务管理)、统计学、数量经济学、技术经济、运输经济(附邮电经济)、经济地理、投资经济、信息经济以及对数学要求较高的人口经济学、保险学专业。

二、考试内容

1. 微积分：(1)函数、极限、连续；(2)一元函数微分学；

(3)一元函数积分学；(4)多元函数微积分；(5)无穷级数；(6)常微分方程与差分方程。

2. 线性代数：(1)行列式；(2)矩阵；(3)向量；(4)线性方程组；(5)矩阵的特征值与特征向量；(6)二次型。

3. 概率论与数理统计：(1)随机事件和概率；(2)随机变量及其概率分布；(3)随机变量的数字特征；(4)大数定律和中心极限定理；(5)数理统计的基本概念；(6)参数估计；(7)假设检验。

三、试卷结构

1. 内容比例：

(1)微积分　约 50%

(2)线性代数　约 25%

(3)概率论与数理统计　约 25%

2. 题型比例

(1)填空题与选择题　约 30%

(2)解答题(包括证明题)约 70%

数学四

一、适用的专业

农业经济(含林业经济、畜牧业经济、渔业经济)、商业经济(含物资经济)、劳动经济学、财政学、货币银行学、会计学(含审计学)、国际贸易、国际金融、世界经济、政治经济学、马克思主义经济思想史、中国经济思想史、中国经济、西方经济学、外国经济史、外国经济思想史、消费经济、商品经济、旅游经济、城市经济、国际经济以及对数学要求较低的人口

经济学、保险学专业。

二、考试内容

1. 微积分:与数学三相比,数学四不考查无穷级数、常微分方程和差分方程。其余数学三与数学四的要求相同。

2. 线性代数:数学四不考查二次型,其余内容与数学三相同。

3. 概率论:数学四不考大数定律(但考中心极限定理)、数理统计的有关内容(包括基本概念、参考估计、假设检验)。其余部分与数学三要求相同。

三、试卷结构

1. 内容比例

(1)微积分　约 50%

(2)线性代数　约 25%

(3)概率论　约 25%

2. 题型比例

(1)填空题与选择题　约 30%

(2)解答题(包括证明题)　约 70%

第一篇　高等数学

第一章　一元函数微分学

§1　极限与连续

一、极限的概念及运算

1. 数列的极限

(1)**定义**　设有数列$\{x_n\}$及数a，如果对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数N，当$n>N$时，有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

则称数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时以a为极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$或$x_n\to a$(当$n\to\infty$)。也称$\{x_n\}$收敛。

数列$\{x_n\}$是否收敛以及极限a均与$\{x_n\}$的前有限项无关。

(2)若$\{x_n\}$的极限存在，则极限唯一。

2. 函数的极限

(1)**定义**　函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义(可能不包括点x_0)，A为某个确定的常数，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称函数$f(x)$当$x\to x_0$时以A为极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，或$f(x)\to A$(当$x\to x_0$)。

(2)单侧极限

左极限：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Longleftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当$x_0-\delta<x<x_0$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，亦可记作$f(x_0-0)=A$。

右极限：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Longleftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当$x_0<x<x_0+\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，亦可记为$f(x_0+0)=A$。

(3)左、右极限与极限的关系

定理1　极限存在$\Leftrightarrow$左、右极限存在且相等。此定理常用来证明分段函数在分段点处极限的存在性。

3. 极限的运算法则

若$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

(2)$\lim(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$　特别

$\lim Cf(x)=C\lim f(x)=CA$，C 为常数

(3)　$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$，$(B\neq0)$

注　1°极限过程为 $x\to x_0$（或 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$ 等）

2°(1)，(2)可推广到有限个函数的极限。

4.性质

(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且 $A>B$，则∃ $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>g(x)$

(2)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且存在一个 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\geqslant g(x)$，则 $A\geqslant B$

(3)**夹逼定理**：若∃ $\delta_0>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时，有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$。

注　夹逼定理的数列形式

若存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $a_n\leqslant C_n\leqslant b_n$ 且

$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=l$，

则
$$\lim_{n\to+\infty}C_n=l。$$

5.无穷小量与无穷大量

(1)**定义**　若函数（或数列）以零为极限，则称该函数（或数列）为无穷小量。非零无穷小量的倒数为无穷大量。

(2)无穷小量的阶

设 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 都是 x 的同一极限过程的无穷小量。

1°　若　$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量，记作 $\alpha(x)=0(\beta(x))$

2°　若　$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq0$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小量

3°　若　$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等阶的无穷小量，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$)

4°　若　$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k_{(x)}}=C\neq0$，($k$ 为常数)，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小量。

(3)极限与无穷小量的关系

定理 2　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$

二、求极限的常用方法

1. 证明数列极限存在的常用方法：

(1)单调增(或减)且有上(或下)界的数列有极限。

(2)夹逼定理。

(3)利用函数极限与数列极限的关系。

定理 3 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ （A 为有限或∞）$\Leftrightarrow$对任何以 x_0 为极限的数列$\{x_n\}(x_n\neq x_0)$都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$

该定理还常用来证明函数的极限不存在。

2. 求极限是最基本的运算，也是必定考的问题。求极限的主要方法如下：

(1)利用极限的运算法则及函数的连续性；

(2)利用两个重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ 与 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$；

(3)利用函数的单调有界性；

(4)利用无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量；

(5)用夹逼定理；

(6)用洛必达法则；

(7)利用等价无穷小量及台劳公式；

(8)利用导数与定积分的定义；

(9)利用微分中值定理和积分中值定理。

另外，求极限还常用以下结果：

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

三、常考题型例题分析

1. 用极限的定义证明极限

例 1 用“$\varepsilon-N$”的方法证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2-3}=0$。

分析 根据定义，$\forall\ \varepsilon>0$，要找 $N>0$，使当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{n}{n^2-3}-0\right|=\frac{n}{n^2-3}<\varepsilon$$

如何找 N? 首先要从上面最后的不等式中解出 n，为便于这样做，要通过适当放大，消去分

子中的 n，只让分母含有 n。

由于 $n\to\infty$，故可设 $n>3$，从而（用 n 代替分母中的 3）有

$\frac{n}{n^2-3}<\frac{n}{n^2-n}=\frac{1}{n-1}$，要使 $\left|\frac{n}{n^2-3}-0\right|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{n-1}<\varepsilon$，即只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}+1$，这样就可取到 N

证明 不妨设 $n>3$，$\forall\ \varepsilon>0$，取 $N\geqslant\max\{\frac{1}{\varepsilon}+1,3\}$，当 $n>N$ 时，就有

$$\left|\frac{n}{n^2-3}-0\right|<\varepsilon,\quad \text{这就证明了}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2-3}=0$$

注 要使 $\frac{1}{n-1}<\varepsilon$，只要取 $N\geqslant\frac{1}{\varepsilon}+1$ 即可，但前面已设 $n>3$，故取 $N\geqslant\max\{\frac{1}{\varepsilon}+1,3\}$

例 2 用定义证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}|q|^n=0(|q|<1)$

证法一 $\forall\ \varepsilon>0$，要使 $||q|^n-0|=|q|^n<\varepsilon$，只要 $n\ln|q|<\ln\varepsilon$，即只要 $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$（因为 $|q|<1$，故 $\ln|q|<0$），可取 $N\geqslant\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，当 $n>N$ 时，就有

$$||q|^n-0|<\varepsilon$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty}|q|^n=0$

证法二 $\because|q|<1$，故可令 $|q|=\frac{1}{1+h}(h>0)$，从而 $|q|^n=\frac{1}{(1+h)^n}$，$(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2!}h^2+\cdots+h^n>nh$，于是 $|q|^n=\frac{1}{(1+h)^n}<\frac{1}{nh}$，$\forall\ \varepsilon>0$，要使 $||q|^n-0|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{nh}<\varepsilon$，即只要 $n>\frac{1}{h\varepsilon}$，故可取 $N=[\frac{1}{h\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时，就有 $||q|^n-0|<\varepsilon$

例 3 用定义证明 $\lim\limits_{x\to3}x^2=9$

分析 由定义，$\forall\ \varepsilon>0$，要找 $\delta>0$，使当 $0<|x-3|<\delta$ 时，有 $|x^2-9|<\varepsilon$。

为找 $\delta>0$，要从最后的不等式中解出 $|x-3|$。因为 $|x^2-9|=|x+3||x-3|$，将其中的 $|x+3|$ 用数代替，为此可设 $|x-3|<1$（因为 $x\to3$），即 $-1<x-3<1$，于是 $5<x+3<7$，由此得 $|x+3|<7$，这样就容易找到 δ（在证明时，也可不写出分析）

证明 不妨设 $|x-3|<1$。因为

$$|x^2-9|=|x+3||x-3|<7|x-3|$$

$\forall\ \varepsilon>0$，要使 $|x^2-9|<\varepsilon$，只要 $7|x-3|<\varepsilon$，即只要 $|x-3|<\frac{\varepsilon}{7}$，故可取 $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{7},1\}$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，就有 $|x^2-9|<\varepsilon$，这就证明了 $\lim\limits_{x\to3}x^2=9$