◇ 叶立军 著

SHUXUE FANGFALUN

数学方法论

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

SHUXUE FANGFALUN

数学方法论

◇ 叶立军 著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学方法论/叶立军著. —杭州：浙江大学出版社，2008.6

ISBN 978-7-308-05892-6

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 叶…　Ⅲ. 数学方法—方法论　Ⅳ. 01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 052135 号

数学方法论

叶立军　著

丛书策划　阮海潮
责任编辑　阮海潮(ruanhc@163.com)
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn)
电话：0571－88925592，88273066(传真)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　杭州浙大同力教育彩印有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　21.25
字　　数　316 千
版 印 次　2008 年 6 月第 1 版　2008 年 6 月第 1 次印刷
印　　数　0001—3154
书　　号　ISBN 978-7-308-05892-6
定　　价　34.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

前　言

随着数学教育改革与发展的不断深入，数学思想方法在数学教学中的重要性日趋凸现，人们已经越来越认识到数学思想方法是数学教学的重要内容。

数学方法论是哲学、方法论和数学史等多门学科的交叉科学，其着眼点在于数学的创新。它是研究数学发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明等的一门学科。数学思想方法是数学的核心与灵魂，它不仅是数学的重要组成部分，而且是数学发展的源泉与动力。

中外数学家都十分重视数学思想方法的研究与应用。日本著名数学教育家米山国藏曾说过：科学工作者所需要的数学知识，相对地说是不多的，而数学的精神、思想与方法却是绝对必要的。数学的知识可以记忆一时，但数学的精神、思想和方法却随时随地发挥作用，可以使人受益终身。

作为数学教师了解数学思想方法的产生、发展和特点，掌握数学中的典型方法，了解数学的创造法则以及数学运动发展规律，形成正确的数学观，并能自觉地用数学方法论去指导数学学习与数学教学，从而提高数学教师驾驭教材之能力，是十分重要的。

本书共十章，在介绍数学方法论的学科性质、研究对象、发展简史以及研究意义的基础上，结合数学思想方法，介绍了数学发展史上的三次危机以及数学悖论，阐述了数学化归思想、类比、归纳、猜想等数学发现的基本方法以及它们在数学解题中的应用，介绍了数形结合、构造法等数学方法在数学解题中的应用。本书还介绍了数学建模、数学美学方法在数学发现中的应用，在此基础上，阐述了数学证明方法和数学结论的发现方法，力图让读者掌握数学方法论在数学解题中的意义、作用，领悟数学思想。

本书在编撰过程中，力图做到以数学思想为重点，以正确理解数学思想方法，指导数学思想方法的教学为目的。全书既有理论原理，又有丰富的典型例证分析，富有启发性。

本书在框架设计、内容安排、呈现方式及陈述方式上均体现数学新课程标准的理念，内容反映数学理论前沿。同时，本书定位准确、内容丰富、选材合理、结构严谨、叙述通俗，具有科学性、实用性、时代性、学术性等特点。

本书在编撰过程中得到了杭州师范大学科研处领导的支持和帮助，并被列为 2007 年杭州师范大学优秀学术专著资助项目；本书编写过程中得到了杭州市重点学科经费、杭州市“131”人才基金的资助，在此表示衷心的感谢。也感谢浙江大学出版社阮海潮责任编辑为本书的出版付出的辛勤劳动。

本书在编撰过程中，吸收了许多专家、学者的著作和研究成果，在此表示衷心的感谢。

由于本书作者学识有限，时间仓促，书中难免有不当之处，恳请各位专家、广大师生批评指正。

叶立军
于杭州师范大学
2008 年 6 月

目　录

第一章

数学方法论简介

数学同其他各门学科一样，在其发展过程中，形成了一系列适合于自身特点的思想方法。而数学是一门高度抽象而又计算精巧的学科，学习数学必须讲究思想方法。在数学发展史中，数学思想方法不断为人们所掌握和运用，并创造出一个又一个成果。因此，在《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》中要求我们帮助学生"真正理解和掌握基本的数学知识与技能、数学思想和方法，获得广泛的数学活动经验"。《普通高中数学课程标准(实验稿)》的前言中提出了"使学生掌握数学的基本知识、基本技能、基本思想，使学生表达清晰、思考有条理……"过去对数学成果本身的收集、分析与说明较为重视，发表了许多论著，这是有益的。但是，由于种种原因，对数学思想方法的研究却有所忽略。正因为对数学思想方法缺乏应有的重视，所以在一定程度上影响了数学成果的取得和数学人才的培养。因此，把数学思想方法作为一个独立领域加以研究，从方法论的高度探讨其研究对象、内容、功能以及孕育、形成与发展的规律，无疑对数学的发展与哲学的研究，都是有重要意义的。

第一节　相关概念辨析

一、什么是数学?

数学具有高度的抽象性、严谨的逻辑性和广泛的适用性。这是关于数学学科特点的传统看法。近些年来,随着数学的发展与人们认识的深化,对数学学科特点又提出了一些新的见解。比如,有人指出数学的基本特点是确切性、抽象性、严格性、应用的广泛性、数学美,还特别强调,数学美是数学诸特点中不可忽视的基本特点之一。人类进入以物质装置代替原来由人从事的信息加工处理工作的信息时代(或称信息加工时代、计算机时代)后,数学的上述诸特点进一步显示出来。也有人认为,从当前科学数学化的趋势看,高度的抽象性与广泛的适用性是数学最根本的两个特点。还有人主张,数学的主要特点是它的高度抽象性、严谨逻辑性与数学美,而应用的广泛性是高度抽象性和严谨逻辑性的具体表现。数学作为一门基础科学到底有哪些特点?结合现代科学发展的实际对这一问题加以深入探讨,显然对充分发挥数学的功能,促进数学的发展是有积极作用的。

同时,数学具有多方面的功能,主要表现在三个方面:① 科学功能,即数学在自然科学、社会科学和哲学等领域中所起的作用;② 思维功能,即数学作为一种思维工具,它在日常思维活动中所起的作用,以及它对思维科学发展的意义等;③ 社会功能,即数学在社会生产、经济、文化、教育以及在精神文明建设中占有的地位与作用等。数学为什么会有上述功能?怎样才能更好地发挥它的功能?这些问题在科学技术高度发展的今天,显得特别重要。

二、数学是什么科学?

关于数学本质的另一个问题:数学究竟是什么科学?是演绎科学,还是经验科学呢?或是实验归纳科学呢?由于人们从不同的角度来认识,因而对这个问题有着不同的看法。

（一）数学科学的几种论述

1. 从数学所从属的研究领域来看

在17世纪以前，Pytnagoras学派的数学观占据了统治地位，他们认为“数是一切事物的本质，整个有规定的宇宙的组织，就是数以及数的关系的和谐系统”。Galieo说得更明白：“大自然乃至整个宇宙这本书都是用数学语言写的”。依他们看来，科学的本质就是数学。这一时期数学成了科学的“皇后”。到了17世纪，这种观点发生了明显变化。数学家Alembert把数学划归在自然科学之内，确认它是自然科学的一个门类。数学不再被认为是科学的“皇后”，而是科学的“仆人”，是自然科学的工具。直到20世纪80年代末，我国杰出的科学家钱学森明确提出，“数学应该与自然科学和社会科学并列”，成为现代科学技术的自然科学、社会科学、数学科学、思维科学、系统科学、人体科学、军事科学、文艺理论、地理科学等十大门类之一。他主张“数学应该称为‘数学科学’”。钱学森教授这一科学见解，不仅将推动数学自身的发展与繁荣，而且直接影响人们的思维方式，影响着其他科学的进步。

科学技术飞速发展，愈来愈显示出“高新技术的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学”。现代高新技术越来越表现为是一种数学技术。正如美国科学院院士Glimm所说：“数学是一种关键的、普遍适用的、并授予人以能力的技术”。这样一来，数学就有科学与技术两种品质。

2. 从研究数学的方法来看

匈牙利数理逻辑学家卡尔马认为，“数学是一门有经验根据的科学并不排斥用演绎方法，因为其他许多经验的科学也成功地应用这个方法！”著名的科学哲学家Lakatos认为，“数学是既含有经验成分又含有理性成分的一种非封闭的演绎系统——拟经验的体系”；美籍匈牙利数学家、数学教育家G. Polya认为，“用欧几里得方法提出来的数学看来却像是一门系统的演绎科学；但在创造过程中的数学看来却像是一门实验性的归纳科学”。从数学真理（定理、法则、公式等）的发现或发明的无数事实可以认为，数学通过大量实验、归纳而得以发现，

进而通过演绎推理证明它的可靠性和真实性。从这种意义上来讲，数学具有两重性，它既是一门系统的演绎科学（从最后被确定的定型的数学来看），又是一门实验性的归纳科学（从创造过程中的数学来看）。

3. 从数学对象来看

数学家 Descartes 把数学称作“序的科学”；物理学家 Weinberg 把数学看作是“模式与关系”的科学，如同生物是有机体的科学，物理是物和能的科学一样，“数学是模式的科学”。如果把数学看作是一种语言，它又可被认为“是描述模式的语言”。随着现代数学的创立与发展，人们对数学的本质的认识逐步深化。在当今数学哲学界流行一些新颖和较成熟的数学哲学观点。下面我们介绍比较流行的两种观点。

（二）数学是模式的科学

在《现代汉语词典》里，对模式的解释是“某种事物的标准形式”。这种标准形式是通过抽象、概括而产生的。按照这种解释，数学的概念、理论、公式、定理和方法都可以看成是一种模式。显然它们又是一种数学抽象思维活动的产物。这种抽象不同于其他科学中的抽象。首先，在抽象的内容上，它仅仅保留了事物的量的特性，而舍去了它的质的内容；其次，在抽象的度量上，数学中的概念并非都是真实事物或现象直接抽象的结果，而是在第一次抽象的基础上，进行多次的再抽象。换句话说，由概念引出概念。如正方形是由长方形引出的概念；再次，在抽象的方法上，它是一种“建构”的活动。也就是说，数学的对象是借助于明确的定义得到构造的，数学理论又是建立在逻辑演绎之上展开的。我们不妨通过几个例子的研究来说明这一点。

1. 关于数学概念的模式

我们知道“1”这个数，是对一个人、一棵树、一间房等类事物的量的特性的刻画，是抽象思维的产物。实际上，在现实世界里并不存在作为数学研究对象的真正的“1”。又如，在现实世界中，我们只看到圆形的十五的月亮，圆形的水池，圆形的车轮，而数学概念中的“圆”，则是这类事物的标准形式，反映了这类事物都具有的“到一个定点的距离等于定长”的量的特性。

在高等数学中，我们知道瞬时速度可以看成是距离对时间的导

数，即 $v=\frac{ds}{dt}$；同样，电流强度 I 是电量 Q 对时间 t 的导数，表示为 $I=\frac{dQ}{dt}$；切线斜率是曲线 $y=y(x)$ 的纵坐标 y 对横坐标 x 的导数，记为 $\tan\alpha=\frac{dy}{dx}$。

我们如果将距离、电量、曲线等一类事物都抽象成关于 x 的函数 $f(x)$，那么刻画函数的变化率这一普遍意义的现象，可以用导数这一标准形式——模式来表示。这样，我们把数学概念都可以看成是量化模式。

2. 关于数学问题的模式

下面的两个问题，我们如果从质的方面来看，显然是两个不同的问题，但若从量的属性角度来看，却是同一个标准形式。

(1) 某人有两套不同的西装和三条不同颜色的领带，问共有多少种搭配方法？

(2) 有两个军官和三个士兵，现由一个军官和一个士兵组成巡逻队，问共有多少种组成方法？

这类问题，如果我们都舍去各自质的内容，那么它们就可以抽象成如图 1－1 所示的形式。

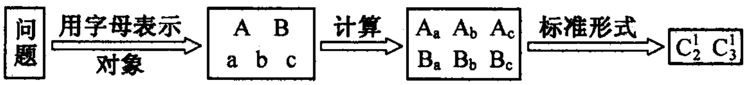

图 1－1

从方框图的推演可以看到，实际问题化归成了数的组合问题。这个过程就是关于量化模式的一种建构和研究。

三、数学的思维方法与数学研究的基本方法

数学的主要思维方法是什么？这是数学家们历来关注的一个重要问题。20 世纪初以来，围绕什么是数学的基础问题的讨论，逐步形成了三个不同的学派，即逻辑派、直觉派与形式公理派。如果从思维方式上看数学基础问题的讨论，可以说，在逻辑主义学派看来，数学的主要思维方法是逻辑思维；在直觉主义学派看来，数学的主要思维方

式是直觉(或灵感)思维;在形式主义学派看来,数学的主要思维方式是以符号为特征的纯粹的抽象思维。到底什么是数学的主要思维方式?辩证思维在数学尤其是高等数学中占有怎样的地位?仍是一些尚待解决的问题。

数学中的一些常用方法,诸如公理性、模型法、构造法、解析法、递归法、极限法、逐次逼近法、统计法、对偶法、关系映射反演法、数学归纳法、反证法等是大家所熟悉的,那么数学中到底有哪些基本方法呢?每个方法又是怎样产生和发展的,其特征和作用如何?这是一些具有重要方法论价值且至今没有很好解决的研究对象。

四、思想、科学思想和数学思想

思想,从词义看是指客观存在反映在人的意识中经过思维活动而产生的结果。

从哲学角度看,思想的涵义有二:一是与“观念”同义,二是指相对于感性认识的理性认识成果。何谓数学思想方法?它的研究对象是什么?这是一个理论问题,至今看法不一。归纳起来主要有两种理解:第一种是“狭义的理解”,认为数学思想方法就是指数学本身的论证、运算以及应用的思想、方法和手段;第二种是“广义的理解”,认为数学思想方法除上述作为研究的对象外,还应把关于数学(其中包括概念、理论、方法与形态等)的对象、性质、特征、作用及其产生、发展规律的认识,也作为自己的研究对象。我们是主张广义理解的。

对于什么是思想,这里援引几种解释。《苏联大百科全书》:“解释客观现象的原则”;《中国大百科全书·哲学(2)》:“对于感性认识的理性认识结果”。毛泽东曾说:“感性认识的材料积累多了,就会产生飞跃,变成了理性认识,这就是思想。”概括以上几点看法可以认为:思想是客观存在反映在人的意识中,经过大脑的思维活动而产生的结果。它是大量思维活动的产物,经过反复提炼和实践,如果一再被证明为正确,就可以反复被应用到新的思维活动中,并产生新的结果。本文所指的思想,都是那些颠扑不破、屡试不爽的思维产物。因此,对于学习者来说,思想就成为他们进行思维活动的细胞和基础;思想和

下面述及的方法都是他们的思维活动的载体。每门科学都逐渐形成了它自己的思想，而科学法则概括出各门科学共同遵循和运用的一些科学思想。

对于数学思想，也有不同的理解。有人认为，“数学思想和数学方法往往不加区别”；也有人说：“数学思想尚不成为一种专有名词，人们常用它来泛指某些有重大意义的、内容比较丰富的、体系相当完整的数学成果。”根据思想的概念及数学特点，可以给数学思想作如下界说：数学思想是数学中的理性认识，是数学知识的本质，是数学中高度抽象概括的内容，它蕴涵于运用数学方法分析、处理和解决数学问题的过程之中。也就是说，数学思想是对数学知识的本质认识，是对数学规律的理性认识，是从某些具体的数学内容和对数学的认识过程中提炼上升的思想观点，它在认识活动中被反复运用，带有普遍的指导意义，是建立数学和用数学问题的指导思想。化归思想、分类思想、模型思想、极限思想、统计思想、最优化思想等都是数学思想。

所谓数学思想，是指现实世界的空间形式和数量关系反映到人的意识之中，经过思维活动而产生的结果，它是对数学事实与数学理论的本质认识。首先，数学思想比一般说的数学概念具有更高的抽象和概括水平，后者比前者更具体、更丰富，而前者比后者更本质、更深刻。其次，数学思想、数学观点、数学方法三者密不可分。如果人们站在某个位置、从某个角度并运用数学去观察和思考问题，那么数学思想也就成了一种观点。而对于数学方法来说，思想是其相应的方法的精神实质和理论基础，方法则是实施有关思想的技术手段。中学数学中出现的数学观点（例如方程观点、函数观点、统计观点、向量观点、几何变换观点等）和各种数学方法，都体现着一定的数学思想。

数学思想是一类科学思想，但科学思想未必就单单是数学思想。例如，分类思想是各门科学都要运用的思想，如语文分为文学、语言和写作，外语分为听、说、读、写和译，物理学分为力学、热学、声学、电学、光学和原子核物理学，化学分为无机化学和有机化学，生物学分为植物学、动物学和人类学等；中学生见到的最漂亮的分类应该是在学习哺乳纲动物时所出现的门（亚门）、纲（亚纲）、目（亚目）、属、科、种的分

类表,它不是单由数学给予的。只有将分类思想应用于空间形式和数量关系时,才能成为数学思想。如果用一个词语"逻辑划分"作为标准,那么,当该逻辑划分与数理有关时(可称之为"数理逻辑划分"),可以说是运用数学思想;当该逻辑划分与数理无直接关系时(例如把社会中的各行各业分为工、农、兵、学、商等),不应该说是运用数学思想。同样地,当且仅当哲学思想(例如一分为二的思想、量质互变的思想和肯定否定的思想)在数学中予以大量运用并且被"数学化"了时,它们也可以被称为数学思想。

五、思路、思绪和思考

我们在中学数学教育、教学中,还经常使用着"思路"和"思绪"这两个词语。一般说来,"思路"是指思维活动的线索,可视为以串联、并联或网络形状出现的思想和方法的载体,而"思绪"是指思想的头绪。实际上"思路"和"思绪"是同义词,并且都是名词。

那么,另一个词语"思考"又是什么意思呢?"思考"就是进行比较深刻、周到的思维活动。作为动词,它反映了主体把思想、方法、串联、并联或用网络组织起来以解决问题的思维过程。由此可见,"思考"所产生的有效途径就是"思路"或"思绪";"思路"或"思绪"是"思考"的结果,是思想、方法的某种选择和组织,且明显带有程序性。对思路及其所含思想、方法的选择和组织的水平,反映了学习者能力的差异。

六、方法与数学方法

什么是方法?有人认为"方法是一个元概念,不能逻辑的定义";《哲学百科全书》(美)认为,方法是"按给定程序达到既定成果必须采取的步骤";《苏联大百科全书》认为:"方法表示研究或认识的途径、理论或学说,即从实践上或理论上把握现实的、为解决具体课题而采用的手段或操作的总和。"概而言之,方法是人们在认识和改造客观世界中所采用的方式、手段的统称。数学方法是人们从事数学活动时所使用的方法。人们通过长期的实践,发现了许多运用数学思想的手段、途径或程序,同一手段、途径或程序被重复使用了多次,并且达到

了预期的目的，便成为数学方法。

因此，确切地说，数学方法是以数学为工具进行科学研究的方法，即用数学语言表达事物的状态、关系和过程，经过推导、运算和分析，以形成解释、判断和预言的方法。

数学方法就是提出、分析、处理和解决数学问题所采用的思路、方式、逻辑手段等概括性的策略，也就是从数学角度提出问题、解决问题（包括数学内部问题和实际问题）的过程中采用的各种方式、手段、途径等，其中包括变换数学形式。

数学方法具有以下三个基本特征：一是高度的抽象性和概括性；二是精确性，即逻辑的严密性及结论的确定性；三是应用的普遍性和可操作性。

数学方法在科学技术研究中具有举足轻重的地位和作用：一是提供简洁精确的形式化语言，二是提供数量分析及计算的方法，三是提供逻辑推理的工具。现代科学技术特别是电脑的发展，与数学方法的地位和作用的强化正好是相辅相成的。

宏观的数学方法包括：模型方法、变换方法、对称方法、无穷小方法、公理化方法、结构方法、实验方法。微观的且在中学数学中常用的基本数学方法大致可以分为以下三类：

(1) 逻辑学中的方法。例如分析法（包括逆证法）、综合法、反证法、归纳法、穷举法（要求分类讨论）等。这些方法既要遵从逻辑学中的基本规律和法则，又因运用于数学之中而具有数学的特色。

(2) 数学中的一般方法。例如建模法、消元法、降次法、代入法、图像法（也称坐标法，代数中常用图像法，解析几何中常用坐标法）、向量法、比较法（数学中主要是指比较大小，这与逻辑学中的多方位比较不同）、放缩法、同一法、数学归纳法（这与逻辑学中的不完全归纳法不同）等。这些方法极为重要，应用也很广泛。

(3) 数学中的特殊方法。例如配方法、待定系数法、加减法、公式法、换元法（也称为中间变量法）、拆项补项法（含有添加辅助元素实现化归的数学思想）、因式分解诸方法，以及平行移动法、翻折法等。这些方法在解决某些数学问题时起着重要作用，不可等闲视之。

【例 1】 求和 $\arctan 1+\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}+\cdots+\arctan\frac{1}{1+n+n^2}$。

思考与分析 可以考虑分解组合的方法，变换问题的数学形式，

$\arctan\frac{1}{1+k+k^2}=\arctan\frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}$。

联想正切的差角公式 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$，

$\alpha-\beta=\arctan\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$。

令 $\tan\alpha=k$，$\tan\beta=k+1$，

$$\begin{aligned}&\arctan 1+\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}+\cdots+\arctan\frac{1}{1+n+n^2}\\=&\arctan 1+(\arctan 2-\arctan 1)+(\arctan 3-\arctan 2)+\cdots+\\&[\arctan(n+1)-\arctan n]\\=&\arctan(n+1)\end{aligned}$$

我们可以把数学方法分成四个层次：

(1) 基本的和重大的数学方法。这是一些哲学范畴的数量侧面，如模型化方法、概率统计方法、拓扑方法等。

(2) 与一般科学相应的数学方法，如联想类比、综合分析、归纳演绎等。

(3) 数学中特有的方法，如数学等价、数学表示、公理化、关系映射反演、数形转换等，这些方法在数学中产生并应用(也部分地迁移到其他学科)。

(4) 中学数学中的解题方法或技巧。它们在数学方法中具有特殊的基础意义，其内容丰富，变化无穷。

事实上，数学方法按作用的范围可分为三个不同的层次：

(1) 一般的逻辑方法，如分析、综合、类比、联想、归纳、演绎、猜想等，它们不仅适用于数学，而且适应于其他学科领域。

(2) 全局性的数学方法，如极限方法、关系映射反演方法、数学模型方法等，这些方法的作用范围广，有的甚至影响着一个数学分支和其他学科的发展方向。