UMSS

大学数学科学丛书 —22

随机微分方程

胡适耕　黄乘明　吴付科　著

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学科学丛书　22

随机微分方程

胡适耕　黄乘明　吴付科　著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书介绍Itô型随机微分方程(包括随机泛函微分方程与中立型随机微分方程)的基本理论与研究进展.前半部分简要介绍随机微分方程的基本概念与一般理论，然后以较大篇幅综述该领域若干有代表性的近期研究成果，其内容集中于随机微分方程解的渐近状态，包括稳定性、有界性、持久性、非爆发性等.特别深入讨论了有重要应用价值的随机神经网络系统与随机Lotka-Volterra系统．部分内容为作者的近期研究成果.

本书可用作相关专业研究生的教材或高校教师的参考书，亦可供有兴趣于随机微分系统的科技工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

随机微分方程/胡适耕，黄乘明，吴付科著．—北京：科学出版社，2008

(大学数学科学丛书；22)

ISBN 978-7-03-021380-8

Ⅰ.随… Ⅱ.①胡… ②黄… ③吴… Ⅲ.随机微分方程 Ⅳ.O211.63

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第034312号

责任编辑：吕 虹 赵彦超／责任校对：赵桂芬

责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年5月第 一 版 开本：B5(720×1000)

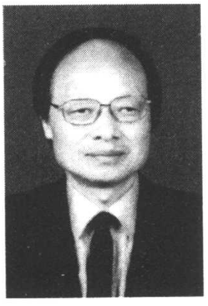
2008年5月第一次印刷 印张：24 1/4

印数：1—3 000 字数：366 000

定价：68.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

作 者 简 介



胡适耕，湖南湘乡人. 1967 年毕业于湖南大学数学系，1979 年起在华中理工大学(即今华中科技大学)任教. 现为华中科技大学数学系教授、博士生导师，并兼任《应用数学》杂志常务副主编.

长期从事基础数学与应用数学的教学和研究，主要研究领域为非线性动力系统与随机动力系统. 发表了一系列研究论文与著作，代表性著作有《非线性分析》、《抽象空间引论》、《宏观经济的随机模型》等.

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学．从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵．正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同．

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的．作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱．数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视．数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会数学的精神实质和思想方法．在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点．

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生（包括硕士生及博士生）走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好．

李大潜

2003 年 12 月 27 日

前　　言

半个多世纪之前，当 Itô 的划时代著作 *On Stochastic Differential Equations* (Itô, 1951) 面世时，对于"随机微分方程"(SDE)这一新的数学分支的要义、价值与前景，人们能够确切说明的东西尚不多. 经历半个多世纪堪称辉煌的发展之后，SDE 已负盛名，但人们似乎仍然难以评说——不是因为材料缺乏，而是因为材料实在太多！今天，SDE 已积累了如此丰富的成果，欲加以适当的概括以睹其全貌已非易事.

尽管如此，有两件重要的事情无论如何值得一提.

其一就是，SDE 在其发展过程中展示出与某些经典数学问题之间存在着出人意料的深刻联系，最著名的例子就是 Feynman-Kac 公式，它将一定偏微分方程(PDE)问题的解表为适当的 SDE 的解，从而为在 PDE 的研究中使用随机分析方法开辟了道路. 无论这一联系所导致的实际结果如何，在两个看来相距甚远的领域建立起明确的联系，在整个数学发展史上都是值得大书特书的事件. 这一事实令人信服地表明，建立在初看起来颇为诡异的随机微积分基础上的 SDE，并非纯粹是概率论学者独特思想的逻辑衍生物，而是现代数学统一理论大厦中一个自然的部分. 在 Feynman-Kac 公式这类成果面前，随机数学与非随机数学之间看来难以逾越的鸿沟最终消失了. 仅此一端，就不能不说是过去这个世纪数学发展进程中的一件大事.

SDE 理论中另一件值得一提的大事是：一些明显不稳定的确定性微分系统，因随机扰动的介入居然可能成为稳定的系统. 这就完全颠覆了人们对于随机扰动似乎理所当然的负面看法，人们终于明白，在动态过程中，随机扰动或噪声并非总是不稳定或紊乱的根源，而且在特定情况下甚至是镇定系统所必需的. 这一事实的发现，其理论价值也许不及 Feynman-Kac 公式那么重大，但其实际意义则可能更大. 它实际上宣告，即使对于确定性系统的稳定性研究，SDE 也是必需的. 大而言之，上述事实恰好印证了数学发展中的一条普通规律：对于一个旧体系的真正深刻理解来自该体系的某个新的扩展. 从实分析到复分析的扩展提供了熟知的例子，而从通常微分方程理论过渡到 SDE 理论，则可能是更令人振奋的例子.

或许，使以上两件事都显得黯然失色的是 SDE 在范围广泛的领域中卓有成效的应用. 近几十年来，SDE 在物理、力学、化学、生物学、经济与金融学、控制理论、航天工程等多个部门发挥了重要作用，已有不可计数的文献作证. 尽管这些应用的某些方面本书有所涉及，但在总体上加以概括，则远非本书作者的学识所能胜任. 我

们只能指出如下已成定论的事实:对于许多实际领域的专家而言,为运用强有力的现代数学工具,对所考察的系统建立某种**随机模型**常常是不可避免的,而这往往就意味着运用 SDE!

正是这样一种广泛而又实际的需求,促使我们生出了一种冲动:应当为希望运用 SDE 这一工具的科学工作者做点什么. 这就是写作本书的意图. 同时,我们也意识到,只能将目标限定在一个较小的题目上,即限于考虑 Itô 型的 SDE,而且将重点放在以稳定性理论为中心的问题上,这既是本书作者研究兴趣所及的领域,似乎也是许多研究者的关注点之所在.

就其渊源而言,本书所涉及的问题已有颇长的研究历史. 大约十年前,当本书作者听英藉华裔教授毛学荣关于 SDE 稳定性的讲演时,对于贯穿于其中的基本思想就已颇有感触. 这些思想除了其特有的效力之外,即使从纯数学方法论的角度考虑,也是很有价值的,甚至可以说是异常优美的. 这些体验与理解对于本书的形成不无作用.

在写作本书时,我们充分利用了 20 年来 SDE 领域的大量文献,其中尤其要提到毛学荣等人影响深远的系列工作. 作为合作者,本书作者在与毛学荣等的讨论中受益匪浅,由衷感激,自不待言. 本书也包含了作者及其合作者近年来的某些研究成果. 特别,第 4 章的大部分结果(其主导思想或表达方法)是属于作者及其合作者的. 就这些部分而言,对于同行们的批评自然有特别的期待.

为方便读者阅读,本书一开始就汇集了所用的主要记号以供查询,但仍需作点说明. 首先,作者力求使用通用的记号,但一本专著要使散见于各种文献的材料连成一气,记号上的统一与调整难度较大,有些符号没有使用通用记号总是不可避免的. 此外,有少数几个似乎源于作者偏爱的记号,在简化公式与富于启发性两方面都效果显著,即使可能引发异议,也不能割爱了. 特别要提到的是 $\bar{x}(t) = x(t) - u(x_t)$ 与 Hale 倡用的 $C(=C([-\tau,0],\mathbf{R}^d))$ 这两个例子(参看 §3.1 与 §3.3).

本书的写作得到国家自然科学基金及华中科技大学研究生院专项基金的资助,在此谨致以诚挚的感谢.

作　者

2007 年 4 月于武汉

记号与约定

A^c	集 A 的补；$A\backslash B = A \cap B^c$
A^{T}	矩阵 A 的转置
a. s.	几乎必然
BSDE	倒向随机微分方程
$\mathscr{B}$	通常记 Borel 集族
$\mathscr{B}_E$	空间 E 中的 Borel 集族
$\mathscr{B}^d$	$\mathscr{B}_{\mathbf{R}^d}$
C	$C([-\tau,0],\mathbf{R}^d)$
C_{++}	$C([-\tau,0],\mathbf{R}^d_{++})$
C^r	r 阶连续可微函数类
$C^{1,2}$	对 t 为 C^1 类对 x 为 C^2 类的函数 $V(t,x)$ 之全体
$C^b_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C)$	$\mathscr{F}_t$ 可测有界 C 值随机变量之全体
$\mathrm{cov}(X,Y)$	X 与 Y 的协方差或协方差矩阵
$\mathrm{d}x(t)$	随机函数 $x(t)$ 的 Itô 微分
δ_{ij}	Kronecker 记号
$\mathrm{E}X$	随机变量 X 的期望
$\mathrm{E}(\cdot\mid\mathscr{A})$	在 $\mathscr{A}$ 下的条件期望；$\mathrm{E}_t(\cdot) = \mathrm{E}(\cdot\mid\mathscr{F}_t)$；$\mathrm{E}(\cdot\mid Y) = \mathrm{E}(\cdot\mid\sigma(Y))$
$F_X(\cdot)$	随机变量 X 的分布函数
$F(s,x,t,y)$	$P(X_t \leqslant y \mid X_s = x)$
$F(t,x,y)$	$F(0,x,t,y)$
FDE	泛函微分方程
$\mathscr{F}$	基本的 σ 代数；$\mathscr{F}_t$:σ 代数流；$\mathscr{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t\geqslant 0}\mathscr{F}_t\right)$
$\mathscr{F}^X_t$	随机过程 X_t 生成的 σ 代数流
$f_X(\cdot)$	随机变量 X 的密度函数
$f(s,x,t,y)$	转移密度；$f(t,x,y) = f(0,x,t,y)$
$\varphi_X(\cdot)$	随机变量 X 的特征函数
I	单位矩阵或某个区间
I_A	集 A 的示性函数

J	某个紧空间,通常指 $[t_0,T]$;$J_\tau = [t_0-\tau,T]$;下标 j 的变程
$K,\bar{K}$	通常记某个正常数
$\mathscr{L}$	通常记结合 SDE 的微分算子
L^p	p 次可积函数(或随机变量)的空间
$L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,\mathbf{R}^d)$	p 次可积 $\mathscr{F}_t$ 可测的 $\mathbf{R}^d$ 值随机变量之空间; $L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C)$ 仿此
$\mathscr{L}^p$	沿轨道 p 次可积的随机函数之空间
$LV(t,x(t))$	$\mathrm{d}V(t,x(t)) = LV(t,x(t))\mathrm{d}t + (\cdots)\mathrm{d}w(t)$
$\lambda_{\max}(A)$	对称矩阵 A 的最大特征值, $\lambda_{\min}(A)$ 仿此; $\lambda^p_{\max}(A) = [\lambda_{\max}(A)]^p$
$\mathscr{M}^p$	满足 $\mathrm{E}\int_{t_0}^T \vert x(t)\vert^p \mathrm{d}t < \infty$ 的函数 $x(t)$ 之空间
$\mathbf{N}$	自然数集; $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N}\cup\{\infty\}$
$N(\mu,\sigma^2)$	一维正态分布; $N(\mu,\Sigma)$: 多维正态分布
NSFDE	中立型 SFDE
n	通常记非负整数
ODE	常微分方程
P	概率; P_X: 随机变量 X 的分布
$P(\cdot\vert B),P(\cdot\vert\mathscr{A}),P(\cdot\vert Y=y)$	均表条件概率
$P(s,x,t,B) = P(X_t\in B\vert X_s = x)$	
Q	通常记某个正定或半正定矩阵
$\mathbf{R}$	实数域; $\mathbf{R}^d$: d 维 Euclid 空间; $\mathbf{R}^{d\times m}$: $d\times m$ 矩阵之全体
$\mathbf{R}_+ = [0,\infty)$;$\bar{\mathbf{R}}_+ = \mathbf{R}_+\cup\{\infty\}$;$\mathbf{R}^d_+ = (\mathbf{R}_+)^d$;$\mathbf{R}^d_{++}$ 记 $\mathbf{R}^d_+$ 之内部	
SDDE	随机延迟微分方程
SDE	随机微分方程
SFDE	随机泛函微分方程
$\operatorname{sgn} x$	符号函数
$\Sigma = [\sigma_{kl}]$	协方差矩阵
$\sigma(\mathscr{A})$	集族 $\mathscr{A}$ 生成的 σ 代数
$\sigma(A)$	矩阵 A 的谱
$\sigma(X)$	随机变量 X 生成的 σ 代数
$\sigma(X_t,t\in T)$	$\sigma\left(\bigcup_{t\in T}\sigma(X_t)\right)$
$\mathrm{tr}(A)$	矩阵 A 的迹
τ	停时或时滞
$\mathrm{Var}(\cdot)$	方差; $\mathrm{Var}_t(\cdot) = \mathrm{Var}(\cdot\vert\mathscr{F}_t)$

w	记某个 Brown 运动；$w=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$：$m$ 维 Brown 运动
$X_t, X(t)$ 或 $x(t)$	通常记随机过程
x_t	$x(t+\cdot)\in C$
$\mathbf{Z}$	整数集；$\mathbf{Z}_+$：非负整数集；$\overline{\mathbf{Z}}_+=\mathbf{Z}_+\cup\{\infty\}$
Ω	记取定的概率空间；ω 通常记 Ω 中的元
$\triangleq$	定义为；$\equiv$：恒等于；$\approx$：近似于
$\square$	定理或命题证完

几 点 说 明

1. 指标用法 不致误解时，符号 $\sum, \prod, \cup, \cap$ 下的指标均予省略；和式 $\sum a_i$ 依情况可写作：

$$\sum_{i\in I} a_i,\ \sum_{i=1}^{n} a_i,\ \sum\nolimits_{i=1}^{n} a_i,\ \sum\nolimits_{1}^{n} a_i \text{ 或} \sum_{i} a_i;$$

$\prod a_i$，$\cup A_i$ 等仿此. 任给 $x \in \mathbf{R}^d, f: J \to \mathbf{R}^d$ 与 $g: J \to \mathbf{R}^{d\times m}$，总自动地认定 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d)^{\mathrm{T}}, f = (f_1, f_2, \cdots, f_d)^{\mathrm{T}}, g = [g_{ij}]$. 下标 n 总表示非负整数.

2. 极限记号 $\lim\limits_{n} x_n$ 记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，$\lim\limits_{t\downarrow 0}\varphi(t)$ 记 $\lim\limits_{0<t\to 0}\varphi(t)$；$\rightrightarrows$ 记一致收敛；$\xrightarrow{\text{a. s.}}$ 记几乎必然收敛；$\xrightarrow{L^p}$ 记 L^p 收敛；$\xrightarrow{\text{m. s.}}$ 或 l. i. m 记均方收敛；$\xrightarrow{P}$ 或 (P) lim 记依概率 P 收敛；$\xrightarrow{d}$ 记分布收敛.

3. 范数 $|\cdot|$ 记 $\mathbf{R}^d$ 中的 Euclid 范数或 $\mathbf{R}^{d\times m}$ 中的迹范数；$\|\cdot\|_p$ 记 L^p 范数；$\|\cdot\|$ 记 $C([-\tau, 0], \mathbf{R}^d)$ 中的上确界范数或 $\mathbf{R}^{d\times m}$ 中的算子范数.

4. 集记号 2^X 记集 X 的子集之全体；$\{f < a\} = \{\omega \in \Omega: f(\omega) \leqslant a\}$，余仿此.

5. 序记号 设 $x, y \in \mathbf{R}^d$，则 $x \leqslant y \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i (1 \leqslant i \leqslant d)$；设 $A, B \in \mathbf{R}^{d\times m}$，则 $A \leqslant B \Leftrightarrow a_{ij} \leqslant b_{ij} (1 \leqslant i \leqslant d, 1 \leqslant j \leqslant m)$；设 $f, g: J \to \mathbf{R}^d$，则 $f \leqslant g \Leftrightarrow f(t) \leqslant g(t) (\forall t \in J)$. $a \vee b = \max\{a, b\}$；$a \wedge b = \min\{a, b\}$；$a^+ = a \vee 0$；$a^- = (-a)^+$. 对 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$，记 $\hat{a} = \min\limits_i a_i$，$\check{a} = \max\limits_i a_i$.

6. const 的用法 当 const 出现在式子中时，它表示某个常数，其具体数值无法或不必明确写出.

7. 矩阵 通常将 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 写作 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$；$\mathrm{diag}(x) = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots, x_d)$.

8. 导数 设 $V \in C^{1,2}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d)$，则约定 $V_x = \left(\dfrac{\partial V}{\partial x_1}, \dfrac{\partial V}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial V}{\partial x_d}\right)^{\mathrm{T}}$，$V_{xx} = \left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{d\times d}$，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_d)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^d$.

目　　录

第 1 章　随 机 过 程

我们要到下一章才进入本书的主题——随机微分方程(SDE),此处当然不是大谈 SDE 的地方. 但略知 SDE 的渊源与特性,无疑有助于理解,在这个序章中我们该准备些什么? 在一般的意义上,微分方程的主要任务之一,就是描述随时间演进的微分系统,此类系统的状态变量 $x(t)$ 是时间 t 的函数;依 $x(t)$ 为普通函数与随机函数,描述系统的方程被区分为常微分方程(ODE)与 SDE. ODE 理论基于普通函数的分析学,即熟知的实分析;与之对照,SDE 理论无疑应基于随机函数的分析学,即随机分析. 由此看来,这个预备性的序章的任务正是要提供有关随机函数及其分析学的基本材料,这就涉及有关随机变量、随机过程及随机微积分的一个简单概括. 当然,我们的目的只是提供基本的用语与常用结论,而不追求任何意义上的完备性. 大多数结果仅供后面引用,通常省略了证明. 不过,对于重要概念与结论的背景与直观意义,则作必要的解释,以有助于理解与有效运用.

§1.1　随 机 变 量

本节给出有关随机变量的基本概念与主要结论,其内容可在任何一本概率论基础教材中找到详尽表述,此处自然处理得更概括些. 使用测度论的语言与方法是理所当然的,这不仅不应成为一个障碍,而应视为沟通实分析与随机分析的桥梁.

1.1.1　概率空间

如所熟知,概率用于量度随机事件发生的可能性. 但从逻辑上说,概率不过是一种特殊的测度而已. 这一理解使得概率论的相当一部分内容可自然地纳入测度论的框架之内.

定义 1.1.1　设 Ω 是任一非空集, $\mathscr{F}\subset 2^{\Omega}$. 若 $\mathscr{F}$满足条件:

(M_1) $\Omega\in\mathscr{F}$;$A\in\mathscr{F}\Rightarrow A^c\in\mathscr{F}$;$\{A_n\}\subset\mathscr{F}\Rightarrow\bigcup A_n\in\mathscr{F}$,

则称 $\mathscr{F}$为 Ω 上的一个 **σ 代数**或 σ 域,称 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为一个**可测空间**,称任何 $A\in\mathscr{F}$为 $\mathscr{F}$可测集或简称为**可测集**. 若一个函数 $P:\mathscr{F}\to\overline{\mathbf{R}}_+=[0,\infty]$ 满足条件:

(M_2) $P(\varnothing)=0$; 当 $A_n\in\mathscr{F}(n\in\mathbf{N})$ 互不相交时 $P(\bigcup A_n)=\sum P(A_n)$,

则称 P 为可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的一个**测度**;若进而设 $P(\Omega)=1$, 则称 P 为**概率测度**或简称为**概率**,称 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一个**概率空间**. 若概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 满足条件:

(M_3) 完备性：$P(A)=0, B\subset A\Rightarrow B\in\mathscr{F}$，

则称 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为**完备概率空间**.

从现在开始直至本书结束，都假定 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是一给定的完备概率空间. 必须指出，当将概率论用于特定的随机现象时，具体构成所用的概率空间未必容易，且其构成亦随所研究的问题而异. 但对于理论分析而言，这并不成为障碍. 实际上，$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 不过是为展开理论分析而预设的一个逻辑前提而已. 一旦设定了这一前提，甚至不必处处提到它.

对于与概率空间有关的概念，既可以使用一般测度论的术语，亦可以使用初等概率论中的习惯用语；两套用语交叉使用而互不排斥，在现代文献中已被广泛认可. 例如，每个 $A\in\mathscr{F}$ 可称为可测集或事件；当 $P(A)=0$ 时可称 A 为零测集（即零概集）或几乎不可能事件；当 $P(A)=1$ 时称 A 为**几乎必然**(a. s.)事件. 采用什么术语并不关乎问题的本质. 当然，适当的术语有助于对概念的理解.

既然概率只是一种特殊的测度，一般测度论的所有结论自然均可供概率论使用，这实属幸事. 凡属标准的测度论结论，本书都直接引用而不一一注明出处.

给定 $A\in\mathscr{F}$，设 $P(A)>0$，则可验证

$$P(\cdot\mid A):\mathscr{F}\to[0,1],\quad B\to P(A\cap B)/P(A)$$

亦为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的一个概率测度，称为关于 A 的**条件概率**. 若 $\Omega=\cup A_n$，A_n 互不相交且 $P(A_n)>0$，$B\in\mathscr{F}$，则成立

$$P(B)=\sum_n P(A_n)P(B\mid A_n),\qquad\text{(全概率公式)}\qquad(1.1.1)$$

$$P(A_n\mid B)=\frac{P(B\mid A_n)P(A_n)}{\sum_i P(B\mid A_i)P(A_i)},\qquad\text{(Bayes 公式)}\qquad(1.1.2)$$

式(1.1.2)要求 $P(B)>0$.

定义 1.1.2　设 $\{A_t: t\in T\}\subset\mathscr{F}$. 若对任何有限集 $\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}\subset T$，有

$$P(\cap A_{t_i})=\prod P(A_{t_i}),\qquad(1.1.3)$$

则称 $\{A_t\}$ 为独立事件族. 若 $\mathscr{A}_t\subset\mathscr{F}\ (t\in T)$，对任何有限集 $\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}\subset T$ 及任何 $A_{t_i}\in\mathscr{A}_{t_i}(1\leqslant i\leqslant n)$，式(1.1.3)恒成立，则说族 $\mathscr{A}_t(t\in T)$ 互相独立.

由于有形如(1.1.3)的等式可用，独立性条件常给问题带来显著简化. 独立性概念的引入，可以说是概率测度区别于一般测度的要件之一.

任给 $\mathscr{A}\subset 2^{\Omega}$，必有一个包含 $\mathscr{A}$ 的最小 σ 代数，称它为 $\mathscr{A}$ 生成的 σ 代数，记作 $\sigma(\mathscr{A})$；若 $\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$，则必 $\sigma(\mathscr{A})\subset\mathscr{F}$. 简单地说，$\sigma(\mathscr{A})$ 就是由 $\mathscr{A}$ 中的集经可数次集运算（包括并、交与补运算）所得之集构成的集族. 考虑由适当集族生成的 σ 代数是概率论（也是一般测试论）中的一个常用方法.

定理 1.1.3　设 $\mathscr{A}_t\subset\mathscr{F}\ (t\in T)$ 互相独立，且每个 $\mathscr{A}_t$ 对有限交运算封闭，则