



名校课时互动计划

知行天下 策划

集优 方案

数学

九年级上 华东师大版

从基础开始，去虚存实，讲练结合，遵循素质教育的要求，梳理归纳课本知识，使掌握课本内容更加容易。以各种题型使学生开拓思维，明确知识重点，提高学习效率，提供思路或学习方法、技巧，排除学习中的障碍，引导学生走出困境。提倡研究性学习，在举一反三中引导学生自己发现问题、提出问题、解决问题，从而使课本知识转化为内在的技能，并逐步培养学生的自主学习能力和终身学习能力。

甘肃教育出版社

GANSUJIAOYUCHUBANSHE

创新

依据素质教育,提倡研究性学习,引导同学们对教材核心内容的学习有的放矢,使课本知识转化为内在知识和技能,增强创造性学习能力是其目的所在。

解析

抛砖旨在引玉,解析所提供同学们的不仅仅是一种方法、技巧,更重要的在于拓展思路,开阔思维。解要害、析事理,微观上可提供解决具体问题的具体方法,宏观上则可引导同学们对已有知识进行综合思考和思维发散。

★全新教材

★全新配套

★全新方案

重点

文求详略得当,事分轻重缓急。学习必须抓住重点,才能有的放矢。只有这样才能减少学习的盲目性,提高学习效率,增强学习效果。本书的重点讲解将使同学们明确学习重点,使学习更具针对性。

精练

遵循新课标的教学要求,以各种题型的灵活运用开拓思维,考核教材知识和能力范围以内可以达到的要求,排除学习障碍,引导同学们走出学习困境,找到盲点和突破口,推动学习和研究能力的进一步提高。

难点

每一门学科都是一个整体、系统,其内在的知识点环环相扣,任何一个知识点的学习缺失都会成为后面学习的拦路虎。难点部分往往不易弄懂,最容易成为后续学习的障碍。本书的难点讲解将使同学们心中的疑惑迎刃而解,使学习更轻松,更愉快。



甘教精品

知行天下策划

本册作者 许祥珠

基础

基础知识的归纳是学习的主要方法。对于大多数学生而言,难以把握基础知识主要是因为对课本的掌握不够。梳理和归纳课本所包含的基础知识以及课外知识,使知识系统化、条理化。

资料

学无止境。课本知识总是有限的。扩大视野,掌握更多的课外知识无论是对同学们学习课本知识还是培养自学能力和学科兴趣都是十分有益的。资料部分旨在给同学们提供一个更大的平台,使同学们能够放眼于课本之外的知识,为进一步学习打下良好的基础。

甘肃教育出版社隆重推出精品教辅

从基础开始,去虚存实,讲练结合,遵循素质教育的要求,梳理归纳课本知识,使掌握课本内容更加容易。以各种题型使学生开拓思维,明确知识重点,提高学习效率,提供思路或学习方法、技巧,排除学习中的障碍,引导学生走出困境。提倡研究性学习,在举一反三中引导学生自己发现问题、提出问题、解决问题,从而使课本知识转化为内在的技能,并逐步培养学生的自主学习能力和终身学习能力。

巩固提高 启发点拨 解惑释疑 拓展深化

— 集优方案 —

科目	版本					
	七年级	学期	八年级	学期	九年级	学期
语 文	人教版	上	人教版	上	人教版	上
	北师大版	上	北师大版	上	北师大版	上
英 语	人教版	上	人教版	上	人教版	全
	河北教育版	上	河北教育版	上	河北教育版	上
数 学	人教版	上	人教版	上	人教版	上
	北师大版	上	北师大版	上	北师大版	上
	华东师大版	上	华东师大版	上	华东师大版	上
物 理			人教版	上	人教版	全
			北师大版	上	北师大版	全
化 学					人教版	上
					科学、粤教版	上
生 物	人教版	上	人教版	上		
	江苏教育版	上	江苏教育版	上		
历 史	人教版	上	人教版	上	人教版	上
	北师大版	上	北师大版	上	北师大版	上
			中国地图版	上	中国地图版	上
地 理	人教版	上	人教版	上		
	湖南教育版	上	湖南教育版	上		
			中国地图版	上		
思想品德	人教版	上	人教版	上	人教版	全
	教育科学版	上	教育科学版	上	教育科学版	全

网址: <http://www.gseph.com> E-mail: gs.eph@163.com

编辑部电话: 0931-8773145 8773141

发行部电话: 0931-8773255 8773146

地址: (730030) 兰州市南滨河东路 520 号甘肃教育出版社

打造最专业的教育出版社 汇集最权威的作者编辑队伍
编辑最适合学生的教辅读物 出版最有品位的社科文化图书

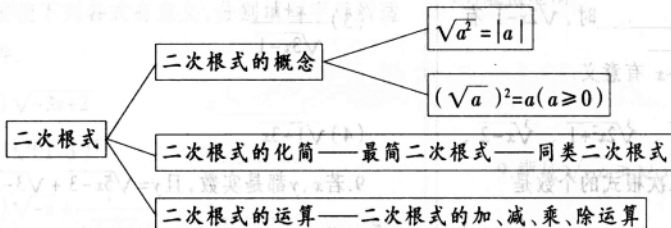
联系电话: 0931-8773146 8519007

目 录

第 22 章 二次根式	1
22.1 二次根式(一)	1
22.1 二次根式(二)	4
22.2 二次根式的乘法(一)	7
22.2 二次根式的乘法(二)	10
22.2 二次根式的乘法(三)	13
22.3 二次根式的加减法(一)	16
22.3 二次根式的加减法(二)	19
第 23 章 一元二次方程	22
23.1 一元二次方程	22
23.2 一元二次方程的解法	
1. 直接开平方法与因式分解法	25
23.2 一元二次方程的解法	
2. 配方法和公式法	27
23.2 一元二次方程的解法	
3. 列方程解应用题	30
23.3 实践与探索	33
第 24 章 图形的相似	37
24.1 图形的相似	37
24.2 相似图形的性质(一) ——成比例线段	41
24.2 相似图形的性质(二)	44
24.3 相似三角形(一)	48
24.3 相似三角形(二)	51
24.3 相似三角形(三)	54
24.3 相似三角形(四)	58
24.3 相似三角形(五)	61
24.3 相似三角形(六)	66

第22章 二次根式

目标瞭望



22.1 二次根式(一)

考点集优

考点1. 二次根式的概念

形如 \sqrt{a} ($a \geq 0$) 的式子, 叫做二次根式.

例1. 下列各式: $\sqrt{a^2+1}$ 、 $\sqrt{b-2}$ ($b > 0$)、

$$\sqrt{-(3x-1)^2}$$
、 $\sqrt{(-\frac{1}{2})^2}$ 、 $\sqrt{(x-1)^2}$ 、 $\sqrt[3]{x-1}$ ($x > 1$)

是二次根式的有 ()

- A. 2个 B. 3个
C. 4个 D. 5个

解: B

【点拨】 判断式子是不是二次根式, 从以下两个方面考虑: (1) 根指数是2; (2) 被开方数必须满足大于等于0. $\sqrt{a^2+1}$ 、 $\sqrt{(-\frac{1}{2})^2}$ 、 $\sqrt{(x-1)^2}$ 都满足(1)(2)的要求, 而其余式子不是二次根式的原因分为两种: $\sqrt[3]{x-1}$ ($x > 1$) 满足(2)但不满足(1); $\sqrt{b-2}$ ($b > 0$)、 $\sqrt{-(3x-1)^2}$ 满足(1)但不满足(2). 如当 $\sqrt{b-2}$ ($b > 0$) 中 $b=1 > 0$, 但 $b-2=1-2=-1 < 0$. $\sqrt{-(3x-1)^2}$ 中当 $x \neq \frac{1}{3}$ 时, $-(3x-1)^2 < 0$.

考点2. 二次根式有意义的条件

二次根式有意义的条件是被开方数大于等于零.

例2. x 是什么实数时, 下列式子有意义?

(1) $\sqrt{x^2+4}$; (2) $\sqrt{\frac{2}{1-x}}$;

(3) $\sqrt{x+3} + \sqrt{1-2x}$.

解: (1) 被开方数 $x^2+4 \geq 0$, 而 x 取任意实数时, $x^2+4 \geq 0$ 成立. 所以, 当 x 取全体实数时, 二次根式 $\sqrt{x^2+4}$ 有意义.

(2) 被开方数 $\frac{2}{1-x} \geq 0$, 而 $\frac{2}{1-x}$ 为分式, 所以当 $1-x > 0$, 即 $x < 1$ 时, $\frac{2}{1-x} > 0$, 所以当 $x < 1$ 时,

二次根式 $\sqrt{\frac{2}{1-x}}$ 有意义.

(3) 式子中的两个被开方数 $x+3 \geq 0$ 且 $1-2x \geq 0$, 即 $-3 \leq x \leq \frac{1}{2}$, 所以当 $-3 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时, $\sqrt{x+3} + \sqrt{1-2x}$ 有意义.

【点拨】 利用二次根式有意义的条件求字母的取值范围时, 第一要求式子中的被开方数非负,



第二要注意其他的条件限制.例如,分式中分母不能为0,多个二次根式必须满足被开方数同时不为零等.

基础巩固

1. 在实数范围内,当 x _____ 时, $\sqrt{2x-1}$ 有意义;当 x _____ 时, $\sqrt{\frac{2}{3}-x}$ 有意义.

2. 下列各式: $\sqrt{3x^2+1}$ 、 $\sqrt[3]{2x^2+1}$ 、 $\sqrt[3]{x-2}$ 、 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{x-3}$ ($x \geq 4$) 中,是二次根式的个数是 _____

- A. 5 B. 4
C. 3 D. 5

3. 当 $x > 0$ 时, x _____ (是、不是) 二次根式;当 $x < 0$ 时, \sqrt{x} _____ (是、不是) 二次根式.

4. 下列各式中不是二次根式的为 _____

- A. $\sqrt{b^2+1}$ B. \sqrt{a} ($a < 0$)
C. $\sqrt{0}$ D. $\sqrt{(a-b)^2}$

5. (1) a 取什么实数时, $\frac{\sqrt{a-1}}{3-a^2}$ 有意义? (2) a 取什么实数时, $\frac{1}{a-2}$ 有意义?

6. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ 的自变量 x 的取值范围为 _____

- A. $x \geq 2$ B. $x > 2$
C. $x < 2$ D. $x \leq 2$

7. 若 $\sqrt{-m} - \frac{1}{m+1}$ 有意义,则 m 的取值范围是 _____

- A. $m \leq 0$ B. $m \leq 0$ 且 $m \neq -1$
C. $m < 0$ 且 $m \neq -1$ D. $m \neq -1$

8. x 取什么实数时,下列各式有意义?

(1) $\sqrt{-x-1}$

(2) $\sqrt{2x^2+1}$

(3) $\frac{x+1}{\sqrt{3x-1}}$

(4) $\sqrt{1-3x}$

9. 若 x, y 都是实数,且 $y = \sqrt{5x-3} + \sqrt{3-5x} + 2$, 则 $\frac{x}{y}$ 的值是 _____

- A. 0 B. $\frac{3}{10}$
C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{2}$

10. 若式子 $\sqrt{x-2} - \sqrt{3-x}$ 有意义,化简下列式子:

(1) $|x-2| + |3-x|$

(2) $3|x^2-4| + 2|9-x^2|$

11. y 为什么实数时, $\sqrt{7-3y}$ 无意义?

12. y 取什么实数时, $\sqrt{\frac{1}{x-2}}$ 无意义?

13. 当 x _____ 时, $\sqrt{5x+4}$ 有最小值,其最小值为 _____.

14. 当 x 取何值时, $\frac{\sqrt{1-2x}}{x+3}$ 有意义?

15. 当 x 取何值时, $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$ 有意义?

能力提升

1. 要使下列各式有意义, 分别填写字母所适合的条件.

(1) $\sqrt{-3x+2}$ x _____;

(2) $\sqrt{(1-x)^3}$ x _____;

(3) $\sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ x _____.

2. 若 $\sqrt{\frac{x-2}{x^2-4}}$ 无意义, 则 x 的取值范围为 ()

- A. $x > 2$ B. $x > 2$ 且 $x \neq -2$
C. $x > -2$ D. $x > -2$ 且 $x \neq 2$

3. 使式子 $\sqrt{a} + \sqrt{-a}$ 有意义的 a 的范围是 ()

- A. $a > 0$ B. $a = 0$
C. $a < 0$ D. 以上都不对

4. 若 x, y 为实数, $y < \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} + \frac{1}{2}$, 化简

$$\frac{|1-y|}{1-y}$$

5. 函数 $y = \frac{x+2}{2-\sqrt{x-3}}$ 中, 自变量 x 的取值范围

是 ()

- A. $x > -2$ B. $x > -2$ 且 $x \neq 3$
C. $x > 3$ D. $x \geq 3$ 且 $x \neq 7$

6. x 是什么实数时, $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}$ 有意义?

7. 若 $\sqrt{x-2} + 3\sqrt{3-x}$ 有意义, 化简 $|x-4| - 2|5-x|$

$$x|+|x^2-4|.$$

8. 若 $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2-x} = \sqrt{(x-1)(2-x)}$ 成立, 求 x 的取值范围.

9. 满足 $\sqrt{-x} \geq \sqrt{x}$ 的 x 的值是多少?

10. $\frac{\sqrt{2a+1}}{1-|a|}$ 有意义的 a 的取值范围是多少?

11. 若式子 $\sqrt{2a+3} + \sqrt{4b-6a} + \sqrt{c-a-b}$ 有意义, 化简 $|2a+5| - 2|8b+20| - |4c+15|$.

中考回望

1. (2007·兰州) 下列函数中, 自变量 x 的取值范围是 $x > 2$ 的函数是 ()

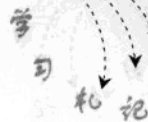
A. $y = \sqrt{x-2}$ B. $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

C. $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ D. $y = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

2. (2007·天水) 函数 $y = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x-2}$ 的自变量 x 的取值范围是 ()

A. $x \geq -1$ B. $x \geq 1$

C. $x \neq 2$ D. $x \geq -1$ 且 $x \neq 2$





学习札记

3. (2007·兰州) 在函数 $y = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ 中, 自变量 x

的取值范围是_____.

4. (2007·天水) 函数 $y = \sqrt{x+2}$ 中自变量 x 的取值范围是_____.

A. $x > 2$ B. $x < 2$

C. $x \geq -2$ D. $x \geq 2$

5. (2007·庆阳) 在函数 $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$ 中, 自变量 x

的取值范围是_____.

22.1 二次根式(二)

考点集优

考点1. 二次根式 \sqrt{a} 的非负性

在二次根式 \sqrt{a} 在有意义的条件下, \sqrt{a} 是非负的.

例1. 已知: $\sqrt{2a+3} + \sqrt{6b-3} = 0$, 求 a^b 的值.

解: 根据二次根式的意义,

$$\sqrt{2a+3} \geq 0, \sqrt{6b-3} \geq 0.$$

$$\text{而 } \sqrt{2a+3} + \sqrt{6b-3} = 0,$$

$$\therefore \begin{cases} \sqrt{2a+3} = 0, \\ \sqrt{6b-3} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2a+3=0, \\ 6b-3=0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = -\frac{3}{2}, \\ b = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\therefore a^b = \left(-\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

【点拨】 由于二次根式是非负的, 说明已知等式是非负数之和为0, 则可得每个非负数统统为零.

考点2. 二次根式的性质

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad a = \begin{cases} a (a \geq 0) \\ -a (a < 0) \end{cases}$$

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geq 0)$$

注意: $(\sqrt{a})^2 = a$ 与 $\sqrt{a^2} = |a|$ 的区别: (1) 运算

顺序不同, $(\sqrt{a})^2$ 表示对 a 先开方, 再平方, 而 $\sqrt{a^2}$ 则表示对 a 先平方后开方. (2) a 的取值范围不同, $(\sqrt{a})^2$ 中的 a 必须是非负数, 而 $\sqrt{a^2}$ 里的 a 可以取任意实数.

例2. 化简:

$$\sqrt{(2-\sqrt{3})^2 - \sqrt{a^2 - 4a + 4}} + (\sqrt{-a})^2 \quad (a \leq -1)$$

$$\text{解: } \because a \leq -1, \therefore a-2 < 0, -a > 0,$$

$$\begin{aligned} & \therefore \sqrt{(2-\sqrt{3})^2 - \sqrt{a^2 - 4a + 4}} + (\sqrt{-a})^2 \\ & = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2 - \sqrt{(a+2)^2}} + (-a) \\ & = |2-\sqrt{3}| - |a+2| + (-a) \\ & = (2-\sqrt{3}) - [-(a-2)] + (-a) \\ & = 2-\sqrt{3} + a-2-a = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

【点拨】 应用 $\sqrt{a^2} = |a|$ 中去绝对值时, 要考虑相应字母的取值范围. $\sqrt{-a}$ 中的 $-a > 0$, 说明 $\sqrt{-a}$ 有意义, 不要被 $\sqrt{-a}$ 中的“-”误导成 $-a$ 为负.

基础巩固

1. 下列各式正确的有_____.

(1) $\sqrt{(-9)^2} = 9$ (2) $(\sqrt{\frac{3}{5}})^2 = \frac{3}{5}$

(3) $-\sqrt{\frac{9}{121}} = -\frac{3}{11}$ (4) $\sqrt{-2^2} = -2$

A. 4个

B. 3个

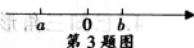
C. 2个

D. 1个

2. $\sqrt{3a+1} + \sqrt{b-1} = 0$ 成立, 求 $a^2 - b^{2008}$ 的值.

3. 实数 a, b 在数轴上的位置如图所示.

化简: $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} + \sqrt{(b-a)^2}$.



第 3 题图

4. 若 $\sqrt{(a-1)^2} = 1 - a$, 则 a 的取值范围是 _____.

5. 如果 $a^2 = 16$, 且 $\sqrt{a^2} = -a$, 求 $\sqrt{5-2a}$ 的值.

6. 若 $|x+y-25| + \sqrt{2x-y-8}$ 互为相反数, 求 $3x-4y$ 的值.

7. 判断下列各式是否正确:

(1) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2} = \sqrt{3}-\sqrt{5}$

(2) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \pm(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

(3) $\sqrt{(a-b)^2} = \pm(a-b)$

(4) $\sqrt{(a^2+b^2)^2} = a^2+b^2$

(5) $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$

8. 化简下列各式:

(1) $\sqrt{x^2-4xy+4y^2} (x \geq 2y)$

(2) $\sqrt{a^2b^8} (a \geq 0)$

(3) $\sqrt{9y^2-6y+1} (y < \frac{1}{3})$

9. 在实数范围内分解 $4x^4 - y^4$ 得 _____

A. $(2x^2+y^2)(2x^2-y^2)$

B. $(2x^2+y^2)(\sqrt{2}x+y)(\sqrt{2}x-y)$

C. $(2x^2+y^2)(\sqrt{2}x+y)(\sqrt{2}x-\sqrt{y})$
 $(\sqrt{2}x-\sqrt{y})$

D. 以上答案都不对

10. 计算 $\sqrt{(2a-1)^2} + \sqrt{(1-2a)^2}$ 的值是 _____

A. $2-4a$ 或 $4a-2$

B. 0

C. $2-4a$

D. $4a-2$

11. 若 $0 < x < 1$, 则 $\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+4} - \sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-4} =$ _____

A. $\frac{2}{x}$

B. $-\frac{2}{x}$

C. $-2x$

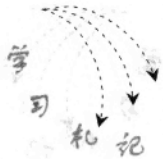
D. $2x$

12. 化简下列各式:

(1) $(\sqrt{2\sqrt{3}-3})^2 + \sqrt{(3-2\sqrt{3})^2}$



学习札记



(2) $\sqrt{(a-2)^2} - \sqrt{(1+2a)^2} (a > 5)$

(3) $\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}} (x \leq -\frac{1}{4})$

13. 化简下列各式:

(1) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

(2) $\frac{\sqrt{(a+b)^2}}{b+1} \div \frac{a+b}{\sqrt{(b+1)^2}} (a < -b < 1)$

14. 已知 $\sqrt{x-2y-5} + 2\sqrt{2x+y+4} = 0$, 求 x^2y 的值.

15. 若 $a < 2$, 化简 $\sqrt{9 \cdot (a-2)^2} + \sqrt{81(a-3)^2}$.

能力提升

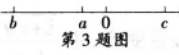
1. 若 $x < 0, y < 0$, 则 $(\sqrt{-x})^2 - \sqrt{y^2}$ 的值是 ()

- A. $x-y$ B. $-x-y$
C. $x+y$ D. $-x+y$

2. $(\sqrt{-2})^2(\sqrt{5})^2 =$ _____ ;

$7x^2 = (\quad)^2$; $8a^2b^4 = (\quad)^2$.

3. 已知 a, b, c 在数轴上的位置如图, 则代数式 $\sqrt{a^2} - \sqrt{(a+b)^2} + \sqrt{(a-c)^2} + \sqrt{(b+c)^2}$ 的值等于 ()



- A. $2c-a$ B. $2a-2b$
C. $-a$ D. a

4. 已知三角形 ABC 的三边分别为 a, b, c , 化简:

$\sqrt{(a+b+c)^2} + \sqrt{(a-b-c)^2} + \sqrt{(b-c-a)^2} + \sqrt{(c-a-b)^2}$

5. 若 $2x+1 < 0$, 你能说出 $\sqrt{4x^2-12x+9} - \sqrt{1+4x+x^2}$ 的值不变的道理吗?

6. 已知 $\sqrt{a^2-2a+1} + \sqrt{a^2-6a+9} = 2$, 则 a 的取值范围是 _____.

7. 化简 $\frac{|a|}{a} + \sqrt{4a^2-4a+1}$ 正确的是 ()

- A. $2a (a < \frac{1}{2})$ B. $2-2a (0 < a < \frac{1}{2})$
C. $-2a (a > \frac{1}{2})$ D. 以上均不对

8. 在实数范围内分解因式:

(1) $4x^2-9y^2$

(2) $(xy)^4-49$

(3) $z^2 - 2\sqrt{2}z + 2 = (\sqrt{2}z - \sqrt{2})^2$

(4) $\sqrt{2}z - \sqrt{2} \leq z$

解得 $z \geq \sqrt{2}$

9. 已知 a, b 为实数, 且 $\sqrt{2a+6} + |b - \sqrt{2}| = 0$, 解关于 x 的方程 $(a+2)x + b^2 = a - 1$.

10. 若化简 $|1-x| - \sqrt{x^2 - 8x + 16}$ 的结果为 $2x - 5$, 则 x 的取值范围是

A. 任意实数 B. $1 \leq x \leq 4$

C. $x \geq 1$ D. $x \leq 4$

中考回望

(2007·武威) 计算: $1 - \sqrt{4} =$

A. 5 B. 3

C. -3 D. -1

22.2 二次根式的乘除法(一)

考点集优

考点

利用 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ($a \geq 0, b \geq 0$) 与 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ($a \geq 0, b \geq 0$) 进行二次根式的化简与运算; 利用公式 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, 其中 $a \geq 0, b \geq 0$, 将被开方数比较复杂的二次根式分解为几个较简单的二次根式.

利用公式 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ($a \geq 0, b \geq 0$) 可将几个二次根式的积化简为一个二次根式.

应用公式 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ($a \geq 0, b \geq 0$) 化简二次根式时, 被开方数所分解的因式, 应尽可能选取平方数(或平方式), 使这些平方数(平方式)可从被开方数中提到根式外面.

例1. 计算: $\sqrt{3x} \cdot \sqrt{2x^2} \cdot \sqrt{6x^4}$.

解: $\sqrt{3x} \cdot \sqrt{2x^2} \cdot \sqrt{6x^4} = \sqrt{3x \cdot 2x^2 \cdot 6x^4} = \sqrt{36x^7} = \sqrt{6^2(x^3)^2 \cdot x} = 6x^3\sqrt{x}$.

【点拨】 利用 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{abc}$ ($a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$) 将 $6^2(x^3)^2$ 从根号里提到根号外面时要注意 x 的正负性, 而原题中出现 $\sqrt{3x}$ 说明 $3x \geq 0$, 即 $x \geq 0$.

例2. 化简: $\sqrt{24a^3b^3}$ ($a > 0$).

解: $\sqrt{24a^3b^3} = \sqrt{6 \times 2^2 \times a^2 \times b^2 \times b}$ ($a > 0, b \geq 0$)
 $= 2ab\sqrt{3b}$.

【点拨】 二次根式的化简和计算都是在二次根式有意义的情况下进行的. 在变形时, 当能够确定被开方数的字母取值范围时, 例如: 在化简 $\sqrt{x^4y^3}$ 时, 二次根式要有意义, 必然有 $y \geq 0$, 这时就不必对 y 进行分类讨论. 当不能确定被开方数的字母取值范围时, 应根据情况对字母进行讨论. 例如在化简 $\sqrt{a^4b^6}$ 时, 就必须对 b 进行分类讨论, 而不必对 a 进行讨论.

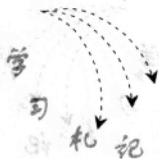
基础巩固

1. 计算下列各题:

(1) $(5 + \sqrt{6})(2\sqrt{3} - 5\sqrt{2})$

(2) $(\sqrt{ax} - a\sqrt{x})^2$





2. $\sqrt{18} - \sqrt{2}$ 的结果是 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2
C. $2\sqrt{2}$ D. 16

3. 下列运算中正确的是 ()

- A. $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{3a} = \sqrt{6a}$
B. $\sqrt{-3a^2} \cdot \sqrt{-3b^2} = 3ab$
C. $\sqrt{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt{-a} = \sqrt{-1}$
D. $\sqrt{\frac{1}{a}} + \sqrt{a} = 1$

4. 下列计算正确的有 ()

- ① $\sqrt{16a^4} = 4a^2$
② $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{10a} = 5\sqrt{2}a$
③ $2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2^2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
④ $-2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-2)^2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
- A. 4个 B. 3个
C. 2个 D. 1个

5. 已知 $x = \sqrt{2-1}$, $y = \sqrt{2} + 1$, 求 $(1 + \frac{1}{x})(1 - \frac{1}{y})$ 的值.

6. 下面的推理过程是否正确? 若不正确, 请写出正确的计算.

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2} &= \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{-\frac{3}{4}} \\ \sqrt{-\frac{3}{4}} &= \left(\sqrt{-\frac{3}{4}}\right)^2 = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

7. 如果 $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-6} = \sqrt{x(x-6)}$, 那么 ()

- A. $x \geq 6$ B. $x \geq 0$
C. $0 \leq x \leq 6$ D. x 为所有正数

8. $\sqrt{x^4+x^2}$ ($x > 0$) 等于 ()

- A. x^2+x B. $x\sqrt{x^2+1}$
C. x^2+1 D. $x^2\sqrt{x^2+1}$

9. 已知 $a > 0, b > 0$, 计算:

$$\frac{2}{b} \sqrt{ab^3} \cdot \left(-\frac{2}{3} \sqrt{a^2b}\right) \cdot 3\sqrt{\frac{a}{b}}$$

10. 下列计算正确的是个数是 ()

- (1) $\sqrt{(-4) \times (+9)} = (-2) \times (+3) = -6$
(2) $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{a} = 3a$
(3) $\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{1}{a}}$
(4) $\sqrt{x^2+y^2} = x\sqrt{x^2+y^2}$ ($x > 0$)
- A. 1个 B. 2个
C. 3个 D. 4个

11. 化简:

(1) $\frac{1}{a} \cdot \sqrt{9a^4} \cdot \sqrt{8a}$

(2) $ab\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$ ($b > a > 0$)

12. 把下列各根式化简 (各字母均取正值):

(1) $\sqrt{54a^3b^2c}$

(2) $\sqrt{8ab^5}$

(3) $\sqrt{a^6b^3}$

13. 化简二次根式 $\sqrt{-9x^3}$ 的结果是 ()

A. $3x\sqrt{-x}$

B. $-3x\sqrt{x}$

C. $3x\sqrt{x}$

D. $-3x\sqrt{-x}$

14. 计算:

(1) $\sqrt{125} + 3\sqrt{\frac{2}{27}} - 4\sqrt{216} + \sqrt{1\frac{4}{5}}$

(2) $\frac{2}{b}\sqrt{ab^3} \cdot (-\frac{3}{2}\sqrt{ab}) \cdot 3\sqrt{\frac{a}{b}}$

(3) $(\sqrt{ab} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab}) \cdot \sqrt{ab}$

15. 当二次根式 $\sqrt{a^{2m} \cdot b^{2n}} = \sqrt{ab}$, 求 n, m 的值.

能力提升

1. 计算:

(1) $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$

(2) $(-\sqrt{m^2n} - \sqrt{m^3n^2})(\sqrt{m^2n^2} - \sqrt{m^2n})$

2. 如果 $\sqrt{m(m-3)} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{m-3}$, 那么

A. $m \geq 0$

B. $m \geq 3$

C. $0 \leq m \leq 3$

D. m 为全体实数

3. 把下列各题中根号外面的因式移到根号里边去.

(1) $-4\sqrt{3}$

(2) $a\sqrt{\frac{1}{a}}$

(3) $-a\sqrt{\frac{1}{a}}$

(4) $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$

4. 若 $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{3+x}$, 则 x 的取值范围是

A. $-3 \leq x \leq 3$

B. $x > -3$

C. $x \leq 3$

D. $-3 < x < 3$

5. 比较下列各组数的大小:

(1) $2\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{7}$

(2) $-2\sqrt{13}$ 与 $-3\sqrt{6}$

(3) $3\sqrt{5}$ 与 $2\sqrt{11}$

6. 化简:

(1) $\sqrt{x^{2n+1}y^{3n+2}}$ (n 为正整数)

(2) $(a\sqrt{b} - b\sqrt{a})(-a\sqrt{b} - b\sqrt{a})$





(3) $(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}})^2 \cdot \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} (b > 0)$

7. 已知 $\sqrt{x^2 + 3x} = -x\sqrt{x+3}$, 求 x 的取值范围.

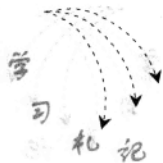
8. 化简 $(a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}}$.

9. 若 $y\sqrt{\frac{x-3}{y}} = -\sqrt{(x-3)y}$, 试化简

$\sqrt{x^2 - 8x + 16} + \sqrt{(y-1)^2} - \sqrt{(x-3)^2}$.

10. 计算:

$(\sqrt{ab} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{1}{ab}}) \cdot \sqrt{ab} (a > 0)$



22.2 二次根式的乘除法(二)

考点集优

考点1. 二次根式的除法

商的算术平方根为 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} (a \geq 0, b > 0)$

反过来, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} (a \geq 0, b > 0)$ 就是二次根式的除法运算, 应用以上公式特别要注意条件 $a \geq 0, b > 0$.

例1. 化简: $\sqrt{7(b-a)^2} \div \sqrt{a-b} (a > b > 0)$.

解: 原式 = $\frac{\sqrt{7(a-b)^2}}{\sqrt{a-b}} = \sqrt{\frac{7(a-b)^2}{(a-b)}}$
 $= \sqrt{7(a-b)}$.

【点拨】 利用 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} (a \geq 0, b > 0)$ 时,

把 $(b-a)^2$ 改写成 $(a-b)^2$.

考点2. 分母有理化

分母有理化的关键是找出有理化因式, 常用的有理化因式有: ① $m\sqrt{a}$ 与 \sqrt{a} , ② $\sqrt{a \pm b}$ 与 $\sqrt{a \pm b}$, ③ $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ 与 $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$, ④ $a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}$ 与 $a\sqrt{b} \mp c\sqrt{d}$, ⑤ $a \pm c\sqrt{d}$ 与 $a \mp c\sqrt{d}$.

例2. 把下列各分母有理化:

(1) $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{40}}$; (2) $x^2 \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{8x^3}}$.

解: (1) 原式 = $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{4 \cdot 2 \cdot 5}} = \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}$
 $= \frac{1}{6\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{6 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{30}$

(2) 原式 = $x^2 \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x}} = \frac{x^2 \sqrt{y}}{2x \sqrt{2x}}$
 $= \frac{x}{2} \sqrt{\frac{y}{2x}} = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{y \cdot 2x}{2x \cdot 2x}} = \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{2xy}}{2x}$

$$= \frac{x}{4x} \sqrt{2xy}$$

【点拨】当分母是单个二次根式时，应先把分子、分母的被开方数分解因式，将能拿到根号外的因式拿出来。若分子、分母有公因式，可先约分，然后再找有理化因式。

基础巩固

1. $\sqrt{1\frac{1}{2}} \div \sqrt{\frac{3}{8}} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. $(a^2-4)\sqrt{\frac{a+2}{a-2}} (a>2) = \underline{\hspace{2cm}}$

3. $(\sqrt{48} + \sqrt{45}) \div (\sqrt{3} + \sqrt{5}) = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 若 $\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-6}} = \sqrt{\frac{x-5}{x-6}}$, 则 x ()

A. $x > 5$

B. $x < 6$

C. $5 < x < 6$

D. $x < 5$ 或 $x > 6$

5. 化简 $\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b}} \div \sqrt{(1-b)^2} (a>0, b>1)$ 的结果是 ()

A. $\frac{1}{1-b} \sqrt{b}$

B. $\frac{b}{b-1} \sqrt{b}$

C. $\frac{1}{b-1} \sqrt{b^2-b}$

D. $\frac{b}{b-1}$

6. $3\sqrt{a-2}$ 的有理化因式是 ()

A. $3\sqrt{a+2}$

B. $3\sqrt{a-2}$

C. $\frac{1}{3}\sqrt{a-2}$

D. $\sqrt{a-2}$

7. 计算:

(1) $-\sqrt{\frac{1}{24}} \div \frac{3}{2} \sqrt{1\frac{23}{27}}$

(2) $\sqrt{3\frac{1}{16} \times 2\frac{14}{25}} \div \sqrt{5\frac{1}{16} \times 2\frac{34}{81}}$

8. 将下列各式分母有理化:

(1) $\frac{7}{3\sqrt{2}-4}$

(2) $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}$

(3) $\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}}$

9. 化简:

(1) $\sqrt{8xy^6} \div \sqrt{16x^3y^3}$

(2) $\sqrt{3a^2b^3} \times \sqrt{\frac{25b^3}{12a}}$

10. 下列各式计算正确的是 ()

A. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{1}{6}\sqrt{a}$

B. $\sqrt{\frac{ab^2}{50}} = 10b\sqrt{2a}$

C. $\sqrt{\frac{2b}{3a}} = \frac{1}{3a}\sqrt{6ab} (a>0, b>0)$

D. $\sqrt{\frac{(-4)^2x}{y}} = -\frac{4}{y}\sqrt{xy} (x>0, y>0)$

11. 化简 $3x\sqrt{\frac{x}{9}} - x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$ 的结果是 ()

A. \sqrt{x}

B. 0

C. $x^2(1-x\sqrt{x})$

D. $x(1-x^2)\sqrt{x}$

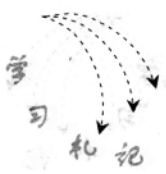
12. $\frac{2}{b}\sqrt{ab^3} \div (-\frac{3}{2}\sqrt{a^2b}) \div 3\sqrt{\frac{a}{b}} = \underline{\hspace{2cm}}$

13. 化简:

(1) $\frac{a^2}{\sqrt{98a}}$

(2) $\sqrt{\frac{x+3}{x-5}} (x<5)$





14. $2\sqrt{6} \div (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) =$ _____

15. 计算或化简:

(1) $9\sqrt{45} \div 3\sqrt{\frac{1}{5}} \times \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$

(2) $\sqrt{\frac{4x^3}{3y^3}} (x < 0)$

能力提升

1. 等式 $\sqrt{\frac{2k-1}{k-3}} = \frac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt{k-3}}$ 成立, 那么实数 k 的

取值范围是

()

A. $k > 3$ 或 $k < \frac{1}{2}$

B. $0 < k < 3$

C. $k \geq \frac{1}{2}$

D. $k > 3$

2. 化去根号里的分母:

$\sqrt{\frac{5}{ab}} =$ _____;

$(4-a^2) \cdot \sqrt{\frac{a+2}{a-2}} (a > 2) =$ _____.

3. 把 $\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} (x > 2)$ 分母有理化.

4. 比较 $4 - \sqrt{2}$ 与 $2 + \sqrt{2}$ 的大小 (用比商法).

5. 已知 $x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$, $y = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, 求 $x - y$

的值.

6. 计算或化简:

(1) $\sqrt{x(x^2 - y^2)} \div \sqrt{\frac{xy^2}{x+y}}$

(2) $\frac{5}{\sqrt{45-7}} \div \frac{5}{3\sqrt{5+7}}$

7. 化简或计算:

(1) $\frac{\sqrt{a^2 + a\sqrt{b}}}{ab - b^2} \div \frac{a+b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$

(2) $(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{4}{3}a^2} \div \frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{5}a^6}) \div (\sqrt{30a} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{3}a^3})$

$\cdot \frac{1}{2}\sqrt{5a}$

8. 计算:

(1) $\frac{\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{3\sqrt{5} - 4\sqrt{2}}$

(2) $\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}$