· 经济数学基础 ·

微积分
学习指导

严守权　编著

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导/严守权编著.
北京：中国人民大学出版社，2008
(经济数学基础)
ISBN 978-7-300-08903-4

Ⅰ.微…
Ⅱ.严…
Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 004934 号

经济数学基础
微积分学习指导
严守权　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010-62511242（总编室）		010-62511398（质管部）
	010-82501766（邮购部）		010-62514148（门市部）
	010-62515195（发行公司）		010-62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	河北三河汇鑫印务有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2008 年 3 月第 1 版
印　　张	22.25　插页 1	**印　　次**	2008 年 3 月第 1 次印刷
字　　数	445 000	**定　　价**	29.00 元

总　　序

随着教学改革的不断深入和办学规模的扩大，我国各高校经济与管理类专业的学生情况、不同专业对公共数学基础课的要求都有很大变化，教学内容的更新、教学课时量的调整都对数学基础课的教学工作和教材建设提出了新的要求。与此同时，全国硕士研究生入学统一考试的规模不断扩大，其中数学考试对于高校公共数学基础课的影响也愈来愈大。对于许多院校经济与管理类专业而言，经过多年调整，实际教学大纲与经济类研究生入学统一考试的考试大纲所涉及的内容已日趋一致。经济数学基础系列丛书正是适应我国高校经济和管理类专业教学改革的新形势、新变化，适时推出的一套教材。全套教材分为五个分册：《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《实用运筹学——运用 Excel 建模和求解》和《高级经济数学教程》。

本套教材具有以下特点：作为经济和管理类专业公共数学基础课的主干课程，《微积分》分册、《线性代数》分册、《概率论与数理统计》分册的编写大纲，融括了目前各高校经济和管理类专业普遍采用的教学大纲和教育部颁布的经济类研究生入学统一考试考试大纲所要求的范围；突出了对其中所涉及的基本概念、基本理论和基本方法的介绍和训练；内容完整紧凑，难度适中，便于组织教学，能够在规定的课时内达到各个专业对公共数学基础课教学的基本要求和目的。

考虑到一些经济和管理类专业对公共数学基础课有更高的要求和分级教学的需要，本套教材推出了《高级经济数学教程》分册，该书将为相关专业的学生提供更多面向经济学的高等数学知识。另外，作为高等数学知识的进一步延伸和扩展，本套教材同时推出了《实用运筹学——运用 Excel 建模和求解》分册，该书将为经济和管理类专业提供数学在经济和管理中应用的实用知识，并同时介绍相关的计算机应用软件。

本套教材还有一个重要特点是，基础课教材每个分册都配套推出学习辅导书。辅导书主要通过精选典型例题，对教材的每个章节进行系统的归纳总结、说明重点难点、进行答疑解惑，其中包括对教材中多数习题提供解答，以便于学生自习。另一方面，《微积分学习指导》、《线性代数学习指导》、《概率论与数理统计学习指导》三个分册还要着重对教材中的题目类型做必要的补充，增加相当数量的研究生入学考试试题题型，力求在分析问题和综合运用知识解决问题的能力培养方面，帮助学生实现跨越，达到并适应经济类全国硕士研究生入学考试对

数学的要求。因此，这三个分册完全具备硕士研究生入学考试数学复习参考书的功能，将在读者日后备考研究生时发挥积极作用。

经济数学基础丛书的编写人员由中国人民大学、北京大学、清华大学的专家、教授组成，绝大多数编者具有 20 年以上从事经济数学研究和公共基础课教学的工作经历，还有许多人从事过多年研究生入学考试数学考前辅导工作，有相当高的知名度。因此，作者在把握经济和管理类公共数学基础课程的教学内容和要求、课时安排和难易程度，以及教学与考研之间的协调关系等方面均具有丰富的经验，这为本套教材的编写质量提供了非常可靠的保障。

我们知道，一套便于使用的成熟的教材往往需要多年不断的磨练和广大读者的支持与帮助，我们热诚欢迎广大读者在使用过程中对本套教材存在的错误和不足之处提出批评和建议。

经济数学基础丛书编写组

2006 年 10 月

前　　言

本书是与经济数学基础系列教材中的《微积分》(严守权主编)配套的学习辅导书。

经济数学基础系列教材中的《微积分》是在对教育部教学指导委员会颁布的经济和管理类微积分教学大纲(修改稿)和全国硕士研究生入学考试经济和管理类(数学三、数学四)数学考试大纲进行协调统一下编写的教材。本书作为该教材的配套辅导书,紧扣教材编写大纲,围绕基本概念、基本方法和基本计算,精心组织典型例题和习题,力求在帮助读者同步学习或期末复习或考研备考过程中发挥总结、答疑、解惑、提高的辅助功能。

本书每章由五部分内容组成。

一、知识结构　归纳总结本章知识点的联系与逻辑结构。知识结构图列于每章之首,虽然便于读者了解全章概貌,但事实上更宜于在精读全章后再仔细回顾和品味,这将有助于读者达到我国著名数学家、教育家华罗庚先生倡导的“从厚到薄”的治学境界。

二、内容提要　列出本章的基本概念、基本计算方法和公式,增强读者对这些内容的熟悉、理解和记忆,避免一些概念性的错误。学习内容提要后,即可直接阅读本书其他内容。

三、重点难点　说明本章学习中应注意的重点、难点,明确学习要求,其中有些也是考研的重点与难点。

四、例题解析　根据各章的知识点和问题类型的顺序安排典型例题分析的次序,通过各种典型例题的详尽分析,巩固和加深对基本概念的理解,增强知识间的相互联系,扩展和活跃解题思路,提高综合分析问题和应用所学知识解决问题的能力。

典型例题的选择以“助学”和“提高”为原则,采取从易到难、循序渐进、点面结合、前后联系的方法处理。其中既有对教材基本知识解读的基础题,也有历届硕士研究生入学考试中具有代表性和典型性的提高题;既有开拓思路、广泛联系的一题多解题,也有将前后章节多个知识点融会贯通推广应用的综合题。

典型例题的形式以结合考研题型为主。有:(1) 填空题(以基本计算为主),(2) 选择题(四选一,以基本概念为主),(3) 解答题(以概念性的计算题、综合题为主,还配备了一定数量的证明题)。

五、综合练习 为了使读者获得更多的解题能力的训练，也为了弥补教材中习题数量及广度和深度上的不足，本书每章都选编了一定数量的与“典型例题解析”搭配的习题，供读者练习。

每章最后提供了所有综合习题的参考答案，其中较难的习题还提供了提示或解题思路。

此外，在本书的最后，我们将配套教材中的全部习题作了解答，以帮助读者解决在课程学习中遇到的困难。

“解题可以认为是人最富有特征的活动。……解题是一种本领，就像游泳、滑雪、弹钢琴一样，你只能靠模仿与实践才能学会。……你想在解题中得到最大的收获，就应该在新做的题目中找到它的特征，那些特征在求解其他问题时，能起到指导作用。一种解题方法，若是经过你自己努力得到的，或是从别人那里学来的或听来的，只要经过自己的体验，那么对你来讲，它就是一种楷模，碰上类似的问题时，就成为你仿照的模型。”这是著名数学家、教育家乔治・波利亚(G. Polya)的一段名言，在这里和本书一起奉献给读者。引领读者到数学的海洋中去模仿，去实践，去体验。

本书作者除严守权外，赵晋、于长千也参加了部分书稿的编写。由于编者水平所限，错误和不妥之处在所难免，欢迎广大读者批评指正。

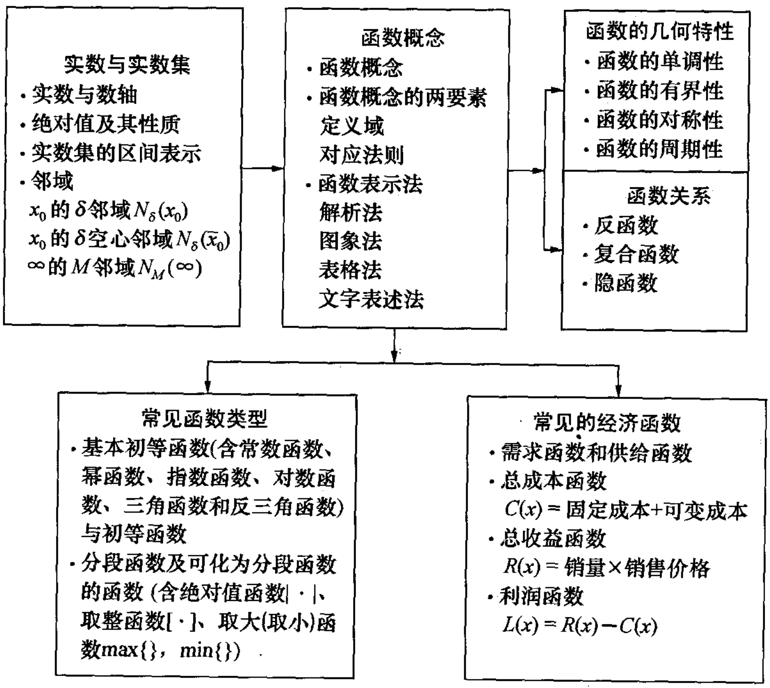
编著者

2008 年 1 月

目　录

第一章 函　　数

一、知 识 结 构



二、内 容 提 要

1. 函数概念

设有两个变量x,y,x属于一个非空实数集合D,如果存在一个对应法则f,使得对于每个$x\in D$,依对应法则必存在唯一的实数y与之对应,则称对应法则

f 为定义在实数集 D 上的一个函数，记作 $y=f(x)$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为 f 的定义域，记作 D_f，函数全体取值的集合称为 f 的值域，记作 Z_f.

函数表示法 解析法(即公式法)；表格法；图像法；文字表述法.

2. 函数的几何特性

有界性 设函数 $f(x)$ 在实数集 D 上有定义，若存在正常数 M，使得对任意 $x\in D$，总有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界.

单调性 设函数 $f(x)$ 在实数集 D 上有定义，若对任意 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时总有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加(或单调减少).

对称性 设函数 $f(x)$ 的定义域 D_f 是关于原点对称的，若对任意的 $x\in D$，总有

$$f(x)=f(-x)\quad (\text{或 } f(x)=-f(-x)),$$

则称函数 $f(x)$ 是偶函数(或奇函数).

周期性 设函数 $f(x)$ 在实数集 D 上有定义，若存在常数 $T>0$，使得对任意 $x\in D$，总有

$$f(x)=f(x+T),$$

则称函数 $f(x)$ 为周期函数，其中满足等式的最小正数 T_0 称为函数 $f(x)$ 的周期.

3. 反函数、复合函数、隐函数、分段函数

反函数 已知函数 $f(x)$，其定义域为 D_f，值域为 Z_f. 若对任意的 $y\in Z_f$，总存在唯一的实数 $x\in D_f$ 与之对应，并满足等式 $y=f(x)$，则称 x 是定义在 Z_f 上的以 y 为自变量的函数，并称之为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，习惯记作 $y=f^{-1}(x)$，并且有 $D_{f^{-1}}=Z_f$，$Z_{f^{-1}}=D_f$.

复合函数 设函数 $y=f(u)$，定义域为 D_f，$u=g(x)$，值域为 Z_g，若 $D_f\cap Z_g\neq\varnothing$(空集)，则称函数 $y=f[g(x)]$ 为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数. 其中 x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量.

隐函数 函数关系 $y=f(x)$ 隐含在方程 $F(x,y)=0$ 中的函数，称 $f(x)$ 为由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数.

分段函数 函数关系用解析法表示时，两个或两个以上解析式表示的函数，称为分段函数. 含绝对值的函数$|\cdot|$、取整函数$[\cdot]$或取大取小函数 max{}，min{}均可化为分段函数.

4. 初等函数

基本初等函数 常数函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数.

初等函数 从基本初等函数出发，经过有限次四则运算或有限次复合并在定义域内由一个解析式表示的函数.

经济函数 常见的经济函数包括需求函数、供给函数、总成本函数、总收益函数和利润函数.

三、重点难点

1. 函数概念

(1) 函数概念中定义域和对应法则是函数的两个基本要素. 不仅要掌握求函数定义域的方法，而且要养成在定义域内考虑和求解函数问题的习惯.

(2) 函数关系中最常见的是复合函数关系，要熟练掌握复合函数关系之间的转换关系. 对于复合函数 $\varphi(x)=f[g(x)]$常见的问题是：

1) 已知 $g(x)$，$\varphi(x)$，求 $f(x)$及其定义域；

2) 已知 $f(x)$，$\varphi(x)$，求 $g(x)$及其定义域；

3) 已知 $g(x)$，$\varphi(x)$，求 $f(x)$及其定义域.

(3) 理解反函数的概念，会由已知函数求其反函数.

2. 函数的几何特性

(1) 掌握一些常见的有界函数，如

$$|\sin x|\leqslant 1,\quad |\cos x|\leqslant 1,\quad |\arctan x|<\frac{\pi}{2},$$

$$0<\operatorname{arccot} x<\pi,\quad \left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2},\quad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$|\arcsin x|\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\arccos x\leqslant\pi,\quad x\in[-1,1].$$

(2) 会用函数单调性的定义及其直观背景判定一些较为简单的函数在某区

间的单调性. 掌握单调函数的运算性质;如单调增(减)函数的复合或相加仍为单调增(减)函数,两个单调增(减)函数的乘积所得的函数未必单调.

(3) 函数的对称性在微积分中有重要应用,应注意掌握.

奇函数图形关于原点对称,偶函数图形关于 y 轴对称,若 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 互为反函数,则其图形关于直线 $y=x$ 对称.

会用函数的奇偶性的定义及其直观背景判定函数的奇偶性或对称性. 掌握单调函数的运算性质,如偶函数与偶(奇)函数的复合必为偶函数,奇函数的复合必为奇函数,奇函数与奇函数的乘积为偶函数,奇函数与偶函数的乘积为奇函数.

会利用函数的奇偶性由 y 轴一侧函数性质推断另一侧函数的性质.

(4) 利用函数的周期性,将一个周期内函数关系和性质平移至其他周期范围内讨论.

3. 熟练掌握常见的几个函数类型的性质特点

(1) 微积分研究的对象是函数,初等函数是最常见的函数,首先要熟悉各基本初等函数的定义域、对应法则、值域、几何特性和图形,理解初等函数的概念.

(2) 分段函数也是在经济数学中常见的一类函数,处理这类函数时,在各分段开区间按对应法则、公式一般处理,在分段点则要按相关定义处理.

(3) 要掌握常见的经济函数,主要是:需求函数,供给函数,总成本函数,总收益函数和利润函数的结构特点,建立简单经济应用问题的函数关系式.

四、例题解析

1. 函数概念

[**例 1**] 单项选择题

(1) 下列函数对中两函数不相等的是(　　).

A. $y=3^{\log_3 x}$ 与 $y=\log_3 3^x$

B. $y=\arcsin x$ 与 $y=\dfrac{\pi}{2}-\arccos x$

C. $y=1-\sqrt{x}$ 与 $x=1-\sqrt{y}$

D. $y=\sqrt{-x^2-2x+3}$ 与 $y=\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{1-x}$

(2) 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2kx}{kx^2+2kx+3}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,则 k 的取值范围

为(　　).

A. $(0,3)$　　　　B. $[0,3)$

C. $(3,+\infty)$　　　　D. $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

答　(1) A　(2) B

解析　(1) 判断两个函数是否相等,依据是函数的两个基本要素即定义域和对应法则是否相同. 选项 A 中两函数的定义域不同,故不相等,选之. 其余选项均有相同的定义域和对应法则,其中选项 C 虽然符号不同但两函数定义域都为$[0,+\infty)$,对定义域中的每个取值,均有相同的函数值.

(2) 函数 $f(x)$的定义域即为保证函数解析式有意义的自变量 x 取值的全体. 依题设,即要求对任意 x 的取值,总有 $kx^2+2kx+3\neq0$,即有 $\Delta=4k^2-4\times3\times k<0$ 或 $k=0$,解得 $0\leqslant k<3$,故选 B.

[例 2]　求函数 $y=\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{x-3}$的定义域和值域.

分析　反三角函数 $\arccos u$ 的定义域为$|u|\leqslant1$,值域为$[0,\pi]$,又在反函数存在的条件下,函数的值域即为其反函数的定义域.

解　由$\left|\frac{2}{x-3}\right|\leqslant1$ 且 $x-3\neq0$,即 $2\leqslant|x-3|$,解得函数的定义域为:$(-\infty,1]\cup[5,+\infty)$.

由 $y=\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{x-3}$反解得其反函数为 $x=3+\frac{2}{\cos2y}$,其定义域为 $y\neq\frac{1}{2}\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$,同时有 $0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$. 综上讨论,得原函数的值域为:$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

[例 3]　已知函数 $y=\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x$ 在区间$(0,1]$内恒正,求常数 a 的取值范围.

分析　所给函数为直线或二次曲线,因此可以借助函数图形求解.

解　当 $a=0$ 时,$y=4x$,显然,函数值在区间$(0,1]$内恒正. 当 $a\neq0$ 时,函数图形如图 1-1,曲线 $y=f(x)$与 x 轴交点为 $x=0$,$x^*=\frac{2(a-4)}{3a}$. 当 $a>0$ 时,要

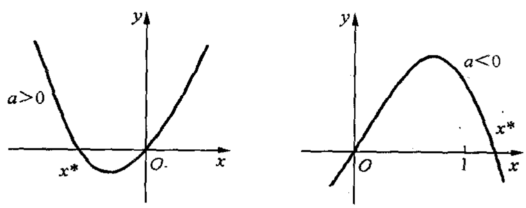


图 1-1

使 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 内恒正，只要交点 $x^*\leqslant 0$，即 $\frac{2(a-4)}{3a}\leqslant 0$；当 $a<0$ 时，要使 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 内恒正，只要 $x^*>1$，即 $\frac{2(a-4)}{3a}>1$，求解不等式组：

$$\begin{cases}a>0,\\ \dfrac{2(a-4)}{3a}\leqslant 0,\end{cases}\quad \text{或}\quad \begin{cases}a<0,\\ \dfrac{2(a-4)}{3a}>1,\end{cases}$$

可得 a 的取值范围为 $(-8,4]$.

2. 函数的几何特性

[**例 1**] 填空题

(1) 函数 $f(x)=e^{\arccos(x^2-2x)}$ 的单调增区间为________.

(2) 已知 $f(x)$ 为偶函数，且 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^3-x+e^{x^2}$，则 $x<0$ 时，$f(x)=$________.

(3) 已知 $f(x)=f(x+2)$，且当 $0<x\leqslant 2$ 时，$f(x)=x^2-1$，则在 $(-3,-1]$ 上，$f(x)=$________.

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $|x^2-2x|\leqslant 1$，即 $1-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{2}$. 函数 $f(x)$ 可以看作由单调增函数 $y=e^u$、单调减函数 $u=\arccos v$ 及 $v=x^2-2x$ 复合而成. 从而知，$f(x)$ 的单调增区间为 $v=x^2-2x$ 的单调减区间，即为 $[1-\sqrt{2},1]$.

(2) 由 $f(-x)=f(x)$ 和 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)=x^3-x+e^{x^2}$，知 $x<0$ 时，$f(x)=f(-x)=-x^3+x+e^{x^2}$.

(3) 周期函数问题可以利用平移法处理，即

当 $-3<x\leqslant -2$，即 $1<x+4\leqslant 2$ 时，有 $f(x)=f(x+4)=(x+4)^2-1$；

当 $-2<x\leqslant -1$，即 $0<x+2\leqslant 1$ 时，有 $f(x)=f(x+2)=(x+2)^2-1$.

因此，有解析式

$$f(x)=\begin{cases}(x+4)^2-1, & -3<x\leqslant -2,\\ (x+2)^2-1, & -2<x\leqslant -1.\end{cases}$$

[**例 2**] 单项选择题

(1) 设函数 $f(x)=\log_a x$ 在区间 $(1,a)$ 上有定义，则(　　).

A. $f[f(x)]<f(x^2)<[f(x)]^2$　　B. $f[f(x)]<[f(x)]^2<f(x^2)$

C. $f(x^2)<f[f(x)]<[f(x)]^2$　　D. $[f(x)]^2<f(x^2)<f[f(x)]$

(2) 设函数 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，在 $(0,+\infty)$ 上，$f(x)>0$，且为增函数，又设 $F(x)=3-f^2(x)$，则 $F(x)$ 是(　　).

A. 偶函数，在 $(-\infty,0)$ 上单调减

B. 偶函数，在$(-\infty,0)$上单调增

C. 偶函数，在$(-\infty,0)$上单调性不能确定

D. 奇函数，在$(-\infty,0)$上单调减

(3) 已知函数$y=f(x)$在(a,b)上存在反函数$x=\varphi(y)$，则有结论(　　).

A. $y=f(x)$在$[a,b]$上严格单调

B. 曲线$y=f(x)$和$x=\varphi(y)$关于直线$y=x$对称

C. $y=f(x)$与$y=\varphi(x)$有相同的单调性

D. $y=f(x)$与$y=\varphi(x)$有相同的有界性

答　(1) B　(2) B　(3) C

解析　(1) 依题意，$a>1$时，$f(x)$在$(1,a)$上单调增，于是有

$$0=f(1)<f(x)=\log_a x<f(a)=1<x^2,$$

进而有　$$f[f(x)]<f(1)=0<[f(x)]^2<2f(x)=f(x^2),$$

故选B.

(2) 容易验证$F(x)=F(-x)$，$F(x)$为偶函数. 由函数的对称性，在$(-\infty,0)$上，$f(x)<0$，单调增，从而有$f^2(x)$单调减，进而知$F(x)=3-f^2(x)$单调增，故选B.

(3) 函数$y=f(x)$存在反函数的充要条件是函数的定义域与值域之间存在一一对应关系，$f(x)$单调仅为充分而非必要条件；$y=f(x)$和$x=\varphi(y)$在直观上表示同一条曲线，变量替换后方有$y=f(x)$和$y=\varphi(x)$关于直线$y=x$对称，且由几何直观知，$y=f(x)$与$y=\varphi(x)$有相同的单调性，但有界性不一定相同，因此仅C符合题意，选之.

[**例3**]　判断函数$f(x)=\sin\sqrt{3}x+\cos\sqrt{2}x$是否为周期函数，并证明你的结论.

分析　两个周期函数的和是否仍为周期函数关键看两函数的周期是否有公倍数.

解　函数$f(x)$不是周期函数，若不然，设$f(x)$是周期函数，则其周期T是$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$与$\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$的公倍数，即$T=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}m(m=1,2,\cdots)$，$T=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}n(n=1,2,\cdots)$. 于是有

$$\frac{m}{n}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

即有理数变为一个无理数，矛盾. 故$f(x)$不是周期函数.

3. 反函数、复合函数、分段函数

［例 1］ 填空题

(1) 已知函数 $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$ 与函数 $y=g(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，则 $g(x)=$________.

(2) 已知 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$，$f(\varphi(x))=\ln x$，则 $\varphi(x)=$________.

(3) 已知 $f(x)$ 满足等式 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=af(x)+\dfrac{1}{x^2+1}(a^2\neq1)$，则 $f(x)=$________.

解 (1) 依题设 $y=g(x)$ 为已知函数的反函数. 于是，反解方程 $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$，得 $x=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{1+y}{1-y}$，从而知 $g(x)=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$.

(2) 由 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2-1+1}{x^2-1-1}$，知 $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$，从而

$$f(\varphi(x))=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x,$$

解得 $\varphi(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

(3) x 与 $\dfrac{x}{x-1}$ 互为反函数，用 $\dfrac{x}{x-1}$ 替换原等式中的 x，有 $f(x)=af\left(\dfrac{x}{x-1}\right)+\dfrac{(x-1)^2}{2x^2-2x+1}$，与原方程联立，解得 $f(x)=\dfrac{1}{1-a^2}\left[\dfrac{(x-1)^2}{2x^2-2x+1}+\dfrac{a}{x^2+1}\right]$.

［例 2］ 单项选择题

(1) 设 $f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=x$，则有(　　).

A. $f(-2-x)=-2-f(x)$　　B. $f(-x)=f\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

C. $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$　　D. $f(f(x))=-x$

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant0,\\ 2x, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -2x, & x<0,\end{cases}$ 则 $x\leqslant0$ 时，$f(g(x))=$(　　).

A. $2x$　　B. x^2　　C. $4x^2$　　D. $-4x^2$

答 (1) A　(2) C

解析 (1) 先求出 $f(x)$，再验证各选项. 于是令 $u=\dfrac{1-x}{1+x}$，得 $x=\dfrac{1-u}{1+u}$，从而有 $f(u)=\dfrac{1-u}{1+u}$，因此，$f(-2-x)=-\dfrac{3+x}{x+1}=-2-\dfrac{1-x}{1+x}=-2-f(x)$，故选 A.