普通高等学校教材

数学物理方法

■张 民 罗 伟 吴振森 编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

西安电子科技大学教材建设基金项目

普通高等学校教材

数学物理方法

张　民　罗　伟　吴振森　编著

西安电子科技大学出版社

2008

内 容 简 介

本书系统地讲述了数学物理方法的基础理论及其在物理学、工程技术科学中的应用。全书共八章，包括三部分内容：第一部分为数学物理方程的建立与常规解法，包括定解问题、行波法、分离变量法、积分变换法、格林函数法和其他常用的数学物理方法(如变分法、积分方程解法等)；第二部分为特殊函数，重点讨论球函数(勒让德多项式)和柱函数(贝塞尔函数)的基本性质及其在数学物理方程中的应用；第三部分主要结合物理、电子信息工程、通信和材料科学类专业的特点，针对数学物理方程和特殊函数在电磁场等问题中的应用提出算例，利用计算编程，求解问题并给出解的可视化图形，以提高读者编程、理解和解决实际问题的能力。

本书可作为物理、电子信息工程、通信、材料科学等专业的理工科大学本科教材，亦可作为相关专业研究生、科技工作者的参考用书。

★本书配有电子教案，有需要者可从我社网站免费下载。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/张民，罗伟，吴振森编著.
—西安：西安电子科技大学出版社，2008.2
普通高等学校教材
ISBN 978-7-5606-1983-5
Ⅰ.数…　Ⅱ.①张…　②罗…　③吴…　Ⅲ.数学物理方法—高等学校—教材
Ⅳ.0411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 003323 号

策　　划　云立实
责任编辑　任　婧　云立实
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
http://www.xduph.com　　E-mail：xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西天意印务有限责任公司
版　　次　2008年3月第1版　2008年3月第1次印刷
开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印　张 17.625
字　　数　415千字
印　　数　1～4000册
定　　价　25.00元
ISBN 978-7-5606-1983-5/O·0091
XDUP 2275001-1

前　言

数学物理方法是物理、电子信息工程、通信和材料科学等专业的重要公共基础课和工具。其主要特色在于将数学和物理紧密地结合，将精妙的数学思想和方法应用于实际的物理和交叉科学的实际问题的研究中，通过物理过程建立数学模型(偏微分方程)，通过求解和分析模型，对实际物理过程进一步深入理解，提出解决实际问题的途径和方法。

全书共八章。第 1 章为数学物理方程的定解问题，学习三类数理方程导出的基本理论和定解问题的确定方法。第 2 章为行波法，学习一维波动方程的达朗贝尔公式、三维波动方程的泊松公式、冲量原理的相关知识以及数理方程求解的技巧。第 3 章为分离变量法，主要讨论斯特姆-刘维型本征值问题的求解、直角坐标系和正交曲线坐标系下的双齐次问题的分离变量法、非齐次泛定方程的本征函数展开法和非齐次边界条件定解问题的边界条件齐次化原理。第 4 章为特殊函数，为配合第 3 章，本章重点研究特殊函数(勒让德函数和贝塞尔函数)的性质与应用，进一步学习正交曲线坐标系下的分离变量法。第 5 章为积分变换法，学习傅里叶变换和拉普拉斯变换在数学物理方程中的应用。第 6 章为格林函数法，主要讨论格林函数的基本概念和电像法等求解格林函数在数学物理方程中的应用。第 7 章为数学物理方程的其他解法，学习数学物理方程中的其他常用解法，包括延拓法、保角变换法、积分方程法和变分法，这些方法都是求解数学物理方程的一些常用方法。第 8 章为数学物理方程的可视化计算，在本章中，结合物理、电子信息工程、通信和材料科学类专业的特点，针对数学物理方程和特殊函数在电磁场等问题中的应用提出多个算例，包括平面波展开为球面波和柱面波的叠加，球体电磁散射的 Mie 理论解等实际问题；利用计算编程，求解问题并给出解的可视化图形，这些可视化的结果清楚显示了实际的物理特性；给出了相关计算程序。

本书把斯特姆-刘维型方程的本征值问题的求解和特殊函数的内容教学穿插在分离变量法求解偏微分方程的教学中，并且增加了特殊函数和场论的相关知识在数理方程中的应用，使教材内容的衔接更为紧密。同时，结合物理、电子信息工程、通信和材料科学类专业的特点，开展了波导中的电磁波、平面波的球面波与柱面波展开，球体电磁散射的 Mie 理论解等实际问题的应用分析，给出可视化计算结果和分析程序，以便读者提高编程技能，提高理解和解决实际问题的能力，激发学习兴趣。

在本书的编写过程中，参照了国内外许多优秀的数学物理方程的教材，在此对这些教材的作者表示感谢。要特别感谢李平舟教授对本书编写的关心和指导，感谢西安电子科技大学教务处、理学院领导和同事们的支持。同时，还要感谢研究生刘江涛、张利军、朱蕾、田卫国、赵言伟、孙华东和王淑娟在文字录入、校对、绘图等方面的工作。本书在出版过程中云立实编辑作了大量细致的编辑工作，在此也一并表示衷心的感谢。

限于作者的知识水平，虽然数易书稿，书中难免仍有不足和疏漏，热忱欢迎专家学者和读者对本书提出宝贵意见。

本书的出版得到了西安电子科技大学教材建设基金项目的资助和支持，在此表示衷心感谢。

作　者
2007 年 12 月
于西安电子科技大学

目　　录

第 1 章　数学物理方程的定解问题

数学物理方程是指从物理学和实际工程问题中导出的描述物理规律的数学表述。一般特指偏微分方程为数学物理方程(简称数理方程)，但是有时也包括与此相关的积分方程和常微分方程。本章主要讨论偏微分方程的基本概念，三类典型数理方程的建立，定解条件的确定和定解问题的描述等。

1.1 基 本 概 念

1.1.1　偏微分方程的基本概念

含有未知函数及其导数的方程称为微分方程。自然科学和工程技术的许多规律、过程和状态都可以用微分方程来描述。当这个方程中的未知函数含有两个以上自变量时，称此方程为偏微分方程，并记为

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}\cdots\partial x_n^{m_n}}\right)=0 \tag{1.1}$$

其中，x_1，x_2，…，x_n 为自变量；u 为未知函数；$m=m_1+m_2+\cdots+m_n$。

在此，需引入以下几个定义。

1. 方程的阶数

方程的阶数即微分方程中出现的未知函数的偏导数的最高次数，如式(1.1)就是一个 m 阶偏微分方程。

2. 线性和非线性方程

如果一个偏微分方程中的未知函数及其各阶导数都是线性的，即含有未知函数及其导数的表达式是一次式，系数只依赖于自变量，则称方程为线性的，否则称为非线性偏微分方程。例如，一个含有变量 x、y 的未知函数 $u=u(x, y)$满足的方程

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+C(x, y)u=f(x, y) \tag{1.2}$$

就是一个二阶线性偏微分方程。

3. 齐次和非齐次方程

方程中不含未知函数及其导数的项称为自由项，当自由项为零时，称方程为齐次方程，否则称为非齐次方程。式(1.2)中的 $f(x, y)$就是自由项，当 $f(x, y)=0$ 时，方程为二阶线性齐次方程，否则为非齐次方程。

1.1.2 三类常见的数学物理方程

数学物理方程是从物理问题中导出的反映物理过程的数学表达式，它所包括的范围十分广泛，本书主要讨论二阶线性偏微分方程。按照我们常见的典型物理过程，可以把数学物理方程分为三类：波动方程、输运方程和稳定场方程。它们分别描述以下三类典型的物理现象：

(1) 描述波动过程的波动方程(机械波和电磁波)：

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f \tag{1.3}$$

其中，$u=u(x, y, z; t)$，代表坐标为(x, y, z)的点在t时刻的位移(未知函数)；a是波传播的速度；$f=f(x, y, z; t)$，是与振源有关的函数；$\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$，是拉普拉斯(Laplace)算符；记$u_{tt}=\partial^2 u/\partial t^2$。

(2) 描述输运过程的输运方程(热传导和扩散)：

$$u_t = D\Delta u + f \tag{1.4}$$

其中，$u=u(x, y, z; t)$，表示扩散物质的浓度(或物体的温度)；D是扩散(或热传导)系数；$f=f(x, y, z; t)$，是与扩散源有关的函数；记$u_t=\partial u/\partial t$。

(3) 描述平衡状态的稳定场方程(势场分布、平衡温度场分布)：

$$\Delta u = -h \tag{1.5}$$

其中，$u=u(x, y, z)$，表示稳定现象的物理量，如静电场中的电势等；$h=h(x, y, z)$，表示与源有关的已知函数。

从方程本身来看，以上这三类方程的特点是：关于未知函数的偏导数最高阶数是二阶的，同时，关于未知函数及其导数的表达式均是线性表示，所以都是二阶线性偏微分方程。还可以看出，这三类方程都是关于空间的二阶偏导数，而关于时间，它们则分别是二阶、一阶偏导数以及与时间无关。因此，这三类方程在数学上又是三类不同的方程，可以依次分别称为双曲型、抛物型和椭圆型方程。

1.1.3 数学物理方程的一般性问题

数学物理方程是以物理学和工程技术中的具体问题作为研究对象的，利用数学物理方程研究物理问题一般需要以下三个步骤。

1. 确定定解问题

在物理学中，经常需要研究某个物理量(如位移、电势分布等)在空间某个区域中的分布情况和其随时间变化的规律。要解决这个问题，首先必须掌握该物理量在空间的分布和随时间变化的规律，即掌握有关的物理规律，把这些规律用数学语言描述出来，就得到了数学物理方程。值得注意的是，数学物理方程描述的是同一类物理现象的共同规律，反映的是物理量变化的最本质的关系，如波动方程(式(1.3))反映了所有的波动现象，如弦的振动、声音的传播、电磁波的传播所满足的共同规律。要解决具体问题必须考虑研究区域所处的物理状态，即定解条件。简单地说，这个过程就是把物理问题的研究对应翻译成数学问题，利用物理规律，确定能够恰当反映物理规律的数学方程和定解条件。

我们把这种由一类物理问题所共有的物理特性所决定的方程称为泛定方程，把由于具

体问题在研究区域所满足的约束边界条件和时间初值条件统称为定解条件。为了得到符合具体问题的解，必须同时提出泛定方程和定解条件，作为一个整体，把上述过程称为定解问题的确定。

2. 定解问题的求解

一旦定解问题确定，需要完成的就是对定解问题的求解。这些数学物理方程的求解(偏微分方程的求解)与我们学过的常微分方程的求解有很大的不同，主要体现在对偏微分方程还没有一个适用于偏微分方程求解的统一理论。也就是说，对于不同的定解问题，一般需要采用不同的方法一类一类地进行讨论。这些方法大致可以归纳为以下几种：

(1) 行波法；

(2) 分离变量法；

(3) 积分变换法；

(4) 格林函数法；

(5) 保角变换法。

以上这些解析解法我们将在后面各章中一一阐述。此外，当无法得到解析解时，我们还可以利用数值方法来求解。

3. 解的适定性

用数学物理方程研究实际问题时，仅仅求解出方程是远远不够的，还必须讨论解的适定性，即存在性、唯一性和稳定性。

(1) 存在性是指验证所求解的解是否满足方程，是否符合实际物理问题的意义。

(2) 唯一性是指讨论在什么样的定解条件下，对于不同函数类，方程的解是否唯一。

(3) 当定解条件有微小变化时，解是否也只有微小变化，如果是这样，则说明解具有稳定性。在从事工程设计或者物理规律的研究时，总需要实际测量，而测量难免会有误差。如果定解条件的微小误差会导致解的重大改变，就无法保证在数学上找出的解确实是实际所需解的近似，这样的解就失去实用价值。相反，如果定解问题的解具有稳定性，那么只要是在合理的误差范围内所得到的解就可以看做是实际问题解的良好近似。

只有对定解做适定性分析，才可以得到符合实际问题的物理规律的解，这样的解才是具有实际意义的。

数学物理方程一方面紧密联系物理学中的许多问题，另一方面又广泛地应用相关的数学成果。其主要特色在于数学和物理的紧密结合，将数学方法应用于实际的物理和交叉科学的具体问题的分析中，通过物理过程建立数学模型(偏微分方程)，通过求解和分析模型，对具体物理过程进一步深入理解，以解决实际问题的需要。

1.2　数学物理方程的导出

基于数学物理方程的重要作用，本节将以几个具体的物理模型为例来描述如何从物理学的实际问题中导出数学物理方程。这里所谓的“导出”，就是用数学语言把物理规律表达出来，希望读者能学会这种表达的技巧。它主要包括：表述同一类物理现象的共同规律——泛定方程的建立，表述具体问题特殊性的边界条件和初始条件——定解问题的建

立。因此，导出数学物理方程的一般步骤是：

（1）确定研究对象，即所研究的物理量 u。

（2）利用微元法建立方程，即从所研究的物理系统中分离出一个小部分，对应数学中的"微元"，根据物理规律，分析这个微元邻近部分和它的相互作用规律，抓住最本质的关系，略去不重要的因素，把这种相互作用规律在短时间内对物理量 u 的影响用数学表达式表示出来，经化简整理就可以得到相应的数学物理方程。

以下具体讨论三类典型数学物理方程的建立。我们应注意从这些例子中学习如何把物理问题转化成数学问题。

1.2.1　波动方程的导出

1. 弦的横振动方程

如图 1.1 所示，设有一根细长柔软的弦线绷紧于 A、B 两点之间，在平衡位置 AB 附近产生振幅极为微小的横振动，求该弦上各点的运动规律。

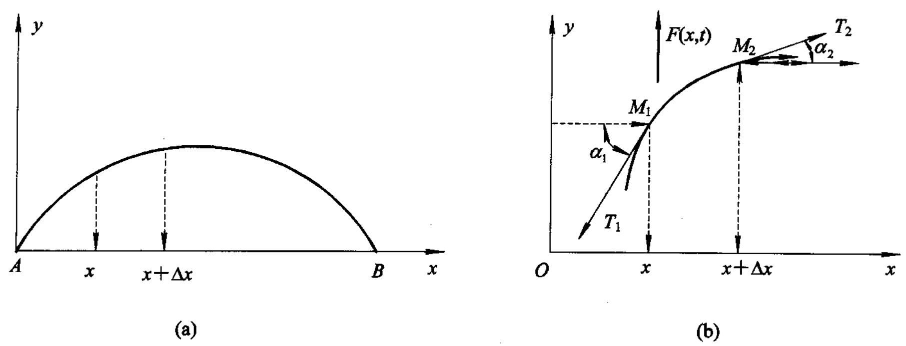

图 1.1　弦的横振动示意

一根拉紧的弦不振动时是一条直线，它处于平衡位置，如图 1.1(a)所示。我们将弦的平衡位置选在 x 轴上，并以 $u(x,t)$表示弦上 x 点在时刻 t 沿垂直于 x 方向的位移。首先我们对这个问题的物理名词做数学的表述：

（1）由于弦是"细长"的，即线密度 $\rho(x,t)=\rho(t)$，且任一小段的重量可以忽略不计。

（2）由于弦"绷紧"于 AB 两点，这说明弦中各相邻部分之间有拉力即"张力"作用；由于弦是"柔软"的，这就意味着弦没有弯抗力，在放松情况下，把它弯成任意形状都可以保持不变，而在绷紧以后，相邻小段张力总是弦线的切线方向。

（3）由于弦作"微小"的横向振动，故相邻点沿振动方向位移的差别很小，即

$$|u_x| = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1(\text{无穷小量}) \quad (u_x^2 \approx 0) \tag{1.6}$$

显然，一根均匀柔软且具有弹性的细弦，绷紧之后相邻各小段之间都存在沿弦切线方向的张力；由于这个张力的作用，一个小段的振动必定带动相邻小段的振动，这种振动形式的传播便形成了波动。

有了以上对问题的数学描述，下面我们来推导方程：

首先，我们需要确定研究对象，即从任意弦中划分出不包括端点(A,B)的一小段 Δx 作为研究对象。

注意到在振动过程中这一小段 Δx 变成了弧$\overset{\frown}{M_1M_2}$，但是

$$\overset{\frown}{M_1M_2} = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+(u_x)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int_x^{x+\Delta x} \mathrm{d}x = \Delta x \tag{1.7}$$

即这一小段弦的长度在振动过程中可以看做是不变的。因此，由胡克(Hooke)定律可知张力和线密度都不随 t 而变，即

$$T(x,t) = T(x) \quad 且 \quad \rho(t) = \rho(常数) \tag{1.8}$$

从这一小段与邻近部分的相互作用的物理规律出发，尝试建立表征这种规律的数学方程。

分析$\overset{\frown}{M_1M_2}$的受力情况，如图 1.1(b)所示。

(1) M_1 点受有张力 T_1，它在 x 轴方向的分力为 $-T_1\cos\alpha_1$，y 轴方向的分力为 $-T_1\sin\alpha_1$；

(2) M_2 受有张力 T_2，它在 x 轴方向的分力为 $T_2\cos\alpha_2$，y 轴方向的分力为 $T_2\sin\alpha_2$；

(3) 设$\overset{\frown}{M_1M_2}$受有沿 y 轴方向的外力 $F(x+\eta_1\Delta x, t)\Delta x$(注意，$\overset{\frown}{M_1M_2}=\Delta x$)，其中 $F(x,t)$表示单位长度所受的外力，$0<\eta_1\leqslant 1$。

由牛顿(Newton)第二定律，得

$$T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0 \tag{1.9}$$

$$T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 + F(x+\eta_1\Delta x, t)\Delta x = (\rho\Delta x)u_{tt}(x+\eta_2\Delta x, t) \tag{1.10}$$

其中，$\rho\Delta x$ 为小段弦的质量；$u_{tt}(x+\eta_2\Delta x, t)$为 t 时刻在小段弦上 $x+\eta_2\Delta x$ 处的加速度，这里 $0<\eta_2\leqslant 1$。

由三角公式

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx u_x \tag{1.11}$$

可得

$$\begin{cases} \sin\alpha_1 \approx u_x(x,t),\ \sin\alpha_2 = u_x(x+\Delta x, t) \\ \cos\alpha_1 = \sqrt{1-\sin^2\alpha_1} \approx 1,\ \cos\alpha_2 = \sqrt{1-\sin^2\alpha_2} \approx 1 \end{cases} \tag{1.12}$$

因此，由式(1.9)可得

$$T_1 = T_2 = T \tag{1.13}$$

进而由式(1.10)可得

$$(\rho\Delta x)u_{tt}(x+\eta_2\Delta x, t) = F(x+\eta_1\Delta x, t)\Delta x + T[u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)] \tag{1.14}$$

即

$$u_{tt}(x+\eta_2\Delta x, t) = \frac{T}{\rho}\frac{u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)}{\Delta x} + \frac{F(x+\eta_1\Delta x, t)}{\rho} \tag{1.15}$$

对式(1.15)两边取 $\Delta x\to 0$ 时的极限，得

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{1.16}$$

其中，$a^2=T/\rho$，表示振动在弦上的传播速度；$f(x,t)=F(x,t)/\rho$，称力密度，表示 t 时刻作用于 x 处的单位质量上的横向外力。

式(1.16)即为弦的横振动方程。若 $f=0$，即弦在振动过程中不受外力时，

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \tag{1.17}$$

称之为弦的自由振动方程。

可以看到，弦的微小横振动方程是一维的波动方程，式(1.16)是非齐次波动方程，式(1.17)是齐次波动方程。

2. 均匀薄膜的微小横振动

把柔软的均匀薄膜张紧，静止薄膜所在的平面记为 xy 平面，求薄膜在垂直于 xy 平面方向上做微小横振动时所满足的运动规律。

这个问题如图 1.2 所示，不妨设膜上各点的横位移为 $u(x, y; t)$；首先对薄膜的运动做数学抽象：

(1) 薄膜是“柔软”的，即在膜的横截面内不存在切应力(指与薄膜的切平面相垂直的应力)。这样，对于膜上任一点，膜的表面张力 T(指作用在单位长度上并且与该长度方向相垂直的拉力)必须在过这一点的切平面内，如图 1.2(a)所示。

(2) 膜是“均匀”的，即面密度 $\rho(x, y; t)=\rho(t)$。

(3) 振动是“微小”的，也就是说张力的仰角 $\alpha\approx 0$，这样，张力 T 的横向分量为 $T\sin\alpha\approx T\tan\alpha = T\dfrac{\partial u}{\partial n}$，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 指的是张力 T 在 xy 平面上的投影的单位矢量。

(4) 与弦的横振动中推导式(1.7)～(1.9)类似，可以证明张力 T 与面密度函数 ρ 均与空间位置坐标无关，为常量。

因此，依据以上的描述，做如下具体推导：

首先，如图 1.2(b)所示，把膜分成许多小方块，以 x：$x+\mathrm{d}x$ 之间，y：$y+\mathrm{d}y$ 之间的小块为研究对象。这一小块在 x：$x+\mathrm{d}x$ 方向的两边，受到的张力的横向分力分别是 $-T\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_x$ 和 $T\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\mathrm{d}x}$，这样，小块膜在 x 方向所受的横向作用力是：

$$\left[T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\mathrm{d}x} - T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x\right]\mathrm{d}y = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1.18}$$

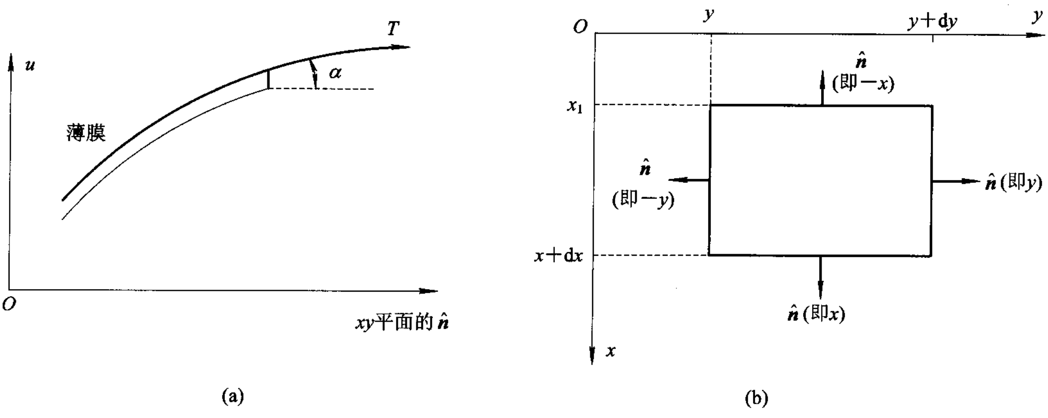

图 1.2　薄膜微小横振动示意

同理，在 y：$y+\mathrm{d}y$ 两边受到的横向力为 $T\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。根据牛顿第二定律，这小块膜

的横向运动方程为

$$(\rho\, dx\, dy)u_{tt} = Tu_{xx}\, dx\, dy + Tu_{yy}\, dx\, dy \tag{1.19}$$

即

$$u_{tt} = a^2 \Delta u \tag{1.20}$$

其中，$a^2 = \dfrac{T}{\rho}$，为膜上振动的传播速度；$\Delta = u_{xx} + u_{yy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，在此表示二维拉普拉斯算符。

式(1.20)为二维齐次波动方程。如果膜上有横向外力作用，设单位面积上的横向外力为 $F(x, y; t)$，重复上述步骤，可以得到薄膜的受迫振动方程为

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, y; t) \tag{1.21}$$

其中，$f(x, y; t) = F(x, y; t)/\rho$，为作用于单位质量上的横向外力。

3. 传输线方程(电报方程)

对于直流电或者低频交流电，线与线之间的电容和电感可以忽略不计，根据电路的基尔霍夫定律有：同一支路的电流相等。但是，对于较高频率的交流电(这里指频率还没有高到能显著向外辐射电磁波的情况)，电路中导线的自感和电容的效应不可忽略，因而同一支路中的电流未必相等。那么我们又该如何确定这种高频传输线中电流和电压所满足的规律呢?

考虑一对高频传输线，如图 1.3 所示，可以把它看成是具有分布参数的导体。

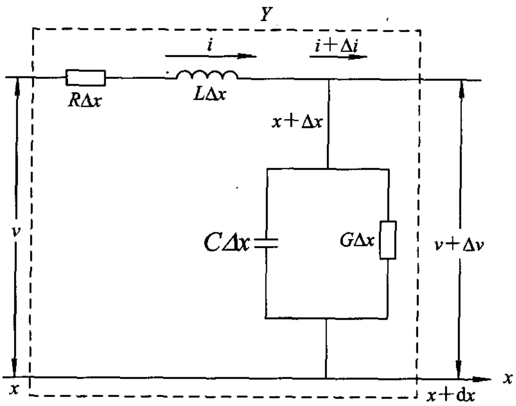

图 1.3　高频传输线的等效电路示意

对所求问题首先做以下数学描述：

(1) 在具有分布参数的导体中，电流分布的情况可以用电流强度 i 与电压 v 来描述，此处 i 与 v 是 x，t 的函数，记做 $i(x, t)$ 与 $v(x, t)$。

(2) 分别以单位传输线的参数表示 R、L、C、G 传输线的介质特性。其中，R 表示每一回路单位长度的串联电阻，L 表示每一回路单位长度的串联电感，C 表示每单位长度的分路电容，G 表示每单位长度的分路电导。

(3) 解决传输线上电压和电流分布的基本原理是基尔霍夫(Kirchhoff)电流电压定律。

第一定律：汇合在节点的电流的代数和为零(规定流入节点的为正，流出节点的为负)。即

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0 \tag{1.22}$$

第二定律：沿任一闭合回路的电势增量的代数和为零(规定沿回路顺时针方向的电动势和电流都为正，反之为负)。即

$$\sum_{k=1}^{n} I_k R_k = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \tag{1.23}$$

具体求解过程如下：

首先，把传输线分成许多小段，取区间$(x, x+\mathrm{d}x)$上的小段加以研究。

根据基尔霍夫第二定律，由式(1.23)得

$$v-(v+\mathrm{d}v) = R\,\mathrm{d}x \cdot i + L\,\mathrm{d}x \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \tag{1.24}$$

其中，$\mathrm{d}v \approx \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$。故上式可写成

$$\frac{\partial v}{\partial x} \approx -Ri - L\frac{\partial i}{\partial t} \tag{1.25}$$

即

$$v_x \approx -Ri - Li_t \tag{1.26}$$

同时，利用基尔霍夫第一定律，由式(1.22)得

$$i = (i+\mathrm{d}i) + C\,\mathrm{d}x\frac{\partial v}{\partial t} + G\,\mathrm{d}xv \tag{1.27}$$

同样可以写成

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C\frac{\partial v}{\partial t} - Gv \tag{1.28}$$

即

$$i_x = -Cv_t - Gv \tag{1.29}$$

由式(1.26)和式(1.29)可以得到i、v应满足如下方程组

$$\begin{cases} i_x + Cv_t + Gv = 0 & (1.30\text{a}) \\ v_x + Ri + Li_t = 0 & (1.30\text{b}) \end{cases}$$

将$\partial/\partial x$作用于式(1.30a)(即作用于式(1.29))，同时，对式(1.30b)两端乘以C后，再对t微分$\left(\text{即将 } C\frac{\partial}{\partial t}\text{作用于式(1.26)}\right)$，并把两个结果相减，即得

$$i_{xx} + Gv_x - LCi_{tt} - RCi_t = 0 \tag{1.31}$$

同时消去v，把式(1.26)代入上式，得

$$i_{xx} = LCi_{tt} + (RC+GL)i_t + GRi \tag{1.32}$$

这就是电流i所满足的偏微分方程。采用类似的方法，从式(1.26)与式(1.29)中消去i，可得电压v满足的偏微分方程为

$$v_{xx} = LCv_{tt} + (RC+GL)v_t + GRv \tag{1.33}$$

式(1.32)和式(1.33)称为传输线方程(也叫电报方程)。如果导线电阻R和线间的漏电导G(即分路电导)很小时，这种传输线称为理想传输线。对于理想的均匀传输线，G和R均可忽略，即$G=R=0$。则式(1.32)和式(1.33)可简化为