College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

微积分概念解析

韩云瑞

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学学习辅导丛书

微积分概念解析

韩云瑞

高等教育出版社

内容提要

本书以教育数学的理论为指导，通过对微积分历史背景的分析和相关知识的研究，对微积分的概念作了更为清晰和科学的表述，努力使微积分体系的逻辑结构尽可能简约，概念表述尽量直观、平易，更加适合于数学知识的传承。本书的内容和观点可以帮助教师在加深理解、开阔视野的基础上提高微积分的教学水平。本书既是微积分教学参考书，也是学生学习微积分课程的学习指导书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分概念解析/韩云瑞.—北京:高等教育出版社,2007.12

ISBN 978-7-04-022527-3

Ⅰ.微… Ⅱ.韩… Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 171696 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	中青印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	850×1168　1/32	**版　　次**	2007年12月第1版
印　　张	7.5	**印　　次**	2007年12月第1次印刷
字　　数	190 000	**定　　价**	9.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　22527-00

前　言

《微积分概念解析》是高等数学(微积分)课程的教学参考书。本书的内容和观点可以帮助教师在加深理解、开阔视野的基础上提高教学水平。

本书作者在多年的教学中,广泛参阅国内外的优秀教材和有关资料,深入研究微积分的概念、原理以及相关知识的历史形成与近代发展,在教学实践中不断学习和积累,使得自己对于教学内容的理解不断深入,教学水平逐年提高,本书就是对微积分教学内容的认识和总结。

"教育数学"是张景中院士参照欧几里得的《几何原本》、柯西的《分析教程》和布尔巴基的《数学原理》等教育数学大师的著名范例,创造性地提出并倡导的一个全新理论。"教育数学"是介于数学和教育学之间的、以数学为主体的新兴交叉学科。"教育数学"是一个全新的理论、一门新兴的学科。它的任务是基于数学教育的需要,根据教育数学的规律,对于数学研究成果进行数学上的再创造,提供教学法加工的材料。

数学教育的任务是使教育适合于数学;教育数学的任务是使数学适合于教育。教育数学的任务是对已有数学知识在体系结构的简约性和知识传播的有效性上进行再创造,以简洁明了、易于接受的逻辑体系向学生提供最值得传授的数学知识。教育数学的任务之一是优化数学知识(概念、原理和方法)的表述方式,使得教材更加科学、更加平易、更加符合教育规律。从数学本身化解教学难点,而不是通过教学法化解难点。

按照教育数学的思路,数学教学最重要的事情是透彻地研究教学内容的数学内涵和历史发展。在这个基础上使内容结构尽可

能简约、有效，概念表述尽量直观、平易，更加适合数学知识的传承，这是教育数学的特点和追求的目标。

微积分概念和原理已经成为大众化的知识。但是由于种种原因，例如，对历史背景缺少了解、受到数学记号的误导以及对相关数学知识的研究不够透彻，使得微积分概念陈述和理解存在某些问题。本书通过对历史背景的分析和对相关知识的研究，对微积分的概念作了更为清晰和科学的表述，对提高微积分课程的教学质量和效果发挥了良好的作用。本书作者在教学研究和教学实践中将数学研究与教学研究结合起来，在教学中取得了良好的成绩，受到学生的高度评价。

教育数学的思想对数学教育的一个最重要的启示是，将教学内容从数学本身研究透彻，才能以更简单、更切合问题本质和最富有启发性的方式呈现给学生，提高教学水平和教学效果。

数学教材应当追求概念体系的科学、简约、平易和有效。教师应当深入研究教学内容，包括数学概念的历史和发展，才能从数学本身化解教学难点，使数学更加适合于教学。这是本书作者要体现的主要思想，也是作者的亲身体验。期望教学第一线的教师能够从这本书中获得收益，并且就教育数学和数学教学开展讨论、交流经验，促进教学水平的提高。

本书若有不足与错误之处，敬请读者批评指正。

韩云瑞

2007年6月于清华大学

目 录

一、函　　数

概述:介绍函数概念的发展和形成历史,就高等数学(微积分)教材中有关函数的若干问题提出见解和建议.

1. 函数概念的产生和发展过程

"函数"是微积分研究的主要对象. 微积分的主要内容是用导数和积分研究函数的变化趋势和变化规律.

函数概念的产生经历了漫长的发展过程. 第一时期为17世纪初叶以前,其特点是用文字和比例语言表达函数关系. 伽利略(1564—1642)在其创建近代力学的代表作《两门新科学》一书中,大量使用了函数概念,用文字和比例语言表达函数关系.

第二时期为17世纪中、下叶,其特点是把函数当做曲线来研究. 法国数学家笛卡儿创立了直角坐标系,使变量概念进入数学,促进了函数概念的深化. "函数"(function)一词,由德国数学家莱布尼茨在其1673年的手稿中首次使用,但含义与现在不同. 他用"函数"表示任何一个随曲线上的点变动而变动的量,如切线、法线的长度. 17世纪引入的绝大多数函数都是被当做曲线来研究的.

函数概念发展的第三时期为18世纪,其特点是把函数定义为解析表达式. 1718年瑞士数学家约翰·伯努利(1667—1748)将函数定义为"是变量与常量以任何方式组成的量". 1734年欧拉(1707—1783)引入符号$f(x)$,指出"变量的函数是一个解析表达式,它由这个变量和一些常量以任何方式组成". 欧拉的"解析表达式"定义包括了由加、减、乘、除、开方等代数运算所得到的代数多项式,也包括了三角函数以及指数式等. 欧拉也曾指明"在平面

上徒手画出来的曲线所表示的 x 与 y 之间的关系为函数". 欧拉还引入了超越函数,定义了多元函数. 他把函数分为代数函数和超越函数,有理函数和无理函数,单值函数和多值函数,以及显函数和隐函数等. 18 世纪下半叶,拉格朗日(1736—1813)提出分段函数的概念.

函数概念发展的第四时期为 19 世纪初叶之后,这时已明确给出了函数的现代定义.

1807 年法国数学家傅里叶在其《热的分析原理》中发现"任何函数都可以表示为三角级数". 傅里叶认为,一个不连续曲线可能需要多个表达式表示,或者用无穷多项之和(级数)的形式表示,从而动摇了原有关于函数概念的传统思想,在当时数学界引起了很大震动. 柯西(1789—1857)在 1821 年提出无穷级数表示函数的新定义,指出函数不一定有解析表达式. 从此,数学家开始寻求通过变量之间的"对应关系"刻画函数概念,使函数概念从解析表达式中解放出来. 1837 年德国数学家狄利克雷(1805—1859)指出:如果在给定的区间上的每一个 x 的值,有唯一的 y 的值与其对应,则 y 就是 x 的一个函数. 狄利克雷还强调说,在整个区间上,y 是按照一种还是多种规律依赖于 x,以及 y 依赖于 x 的方式是否能用数学公式来表达,都是无关紧要的.

19 世纪 70 年代,康托尔的集合论出现以后,函数又被定义为集合之间的"对应关系". 这种定义摆脱了"自变量"提法的缺陷,进一步拓展和深化了函数概念,使其易于推广到其他数学分支. 现在许多教科书大都采用这种"集合对应"的定义.

2. 关于函数概念的几个问题

我们不打算像教科书一样,系统地介绍函数的定义和性质. 仅仅就教学中存在的几个受到关心的问题加以说明.

(1) 幂函数 x^0 与相关问题

在幂函数 $y=x^\mu$ 中,一般教材都包含 $\mu=0$ 的情形. 但是,当

$x=0$时，涉及一个没有定义的表达式0^0. 对于这个问题一般都未作交代. 除此之外，这又连带牵涉到另一个问题，即在导数公式$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$中，如果$\mu=1$，则有$(x^1)'=x^0$. 于是，如果幂函数x^0有问题，求导公式$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$就产生疑问了.

许多教材都没有将这个问题交代清楚. 在教学过程中也常常有学生提出这个问题. 下面我们提出化解这个问题的两种方案.

方案1 在幂函数$y=x^\mu$中排除$\mu=0$的情形. 将幂函数x^0归为常数函数$x\equiv1$，同时在导数公式$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$中排除$\mu=1$的情形，单独说明$x'=1$. 在积分公式$\int x^\mu \mathrm{d}x=\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C$中，排除$\mu=0$的情形. 这样一来，人们关心的许多含混不清之处就消除了.

但是这个处理方法也有不足之处. 例如，在幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$中，包含一项$a_0x^0$. 因此，如果在幂函数$y=x^\mu$中排除$\mu=0$，幂级数表示就会产生新的问题，需要将$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$改成$a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$. 这样的改动会将表示变得繁琐，也缺失了数学的美感.

方案2 对于幂函数$y=x^0$，约定$x^0\equiv1(-\infty<x<+\infty)$. 这时，不仅不会产生$0^0$这样的问题，求导公式$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$也不必排除$\mu=1$的情形. 另外，在积分公式$\int x^\mu \mathrm{d}x=\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C$中，也不必排除$\mu=0$的情形.

比较起来，第二种处理方法虽然有些“不讲道理”，但是可以轻松地化解0^0以及后续产生的一系列问题.

(2) 函数与反函数的图形对称问题

一般微积分或者高等数学教材都说明函数$y=f(x)$的图形与其反函数(如果存在)的图形的对称关系，即曲线$y=f(x)$和曲线$y=f^{-1}(x)$关于直线$y=x$是对称的. 但是这里有一个问题，在函数关系$y=f(x)$中，x是自变量，y是因变量. 因此在反函数$x=f^{-1}(y)$

中 y 是自变量，x 是因变量．这就是说，我们应当讨论曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $x=f^{-1}(y)$ 的对称关系（见[1]）．分别画出 xOy 和 yOx 两个坐标系，在两个坐标系中分别画出曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $x=f^{-1}(y)$．可以发现曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $x=f^{-1}(y)$ 关于直线 $y=x$ 是对称的（图 1.1）．

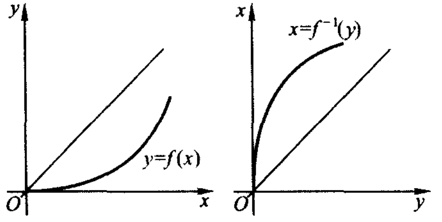

图 1.1

（3）关于分段函数

在微积分中经常提到所谓"分段函数"，是指某个函数在不同区间有不同的初等表达式．言下之意就是不可能用一个初等表达式表示整个定义域上的函数关系．这其中有两个问题值得注意．

① 确切地说，高等数学教材中的"分段函数"应当是"分段初等函数"，因为通常所指的"分段函数"是该函数在不同区间可以表示为不同的初等函数．如果允许用极限、级数或者积分等方式表示函数，那么许多所谓"分段函数"都可用一个统一的表达式来表示．

例如，分段函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$$

可以用极限表示为

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{n(x-|x|)}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

又如，对于分段函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ 1, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$$

如果将函数$f(x)$展开成傅里叶级数，则有

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

这样，这个函数在它的定义域上有统一的表达式，不再是“分段函数”.

② 有些分段函数本身实际上就是初等函数，例如，分段函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

就是初等函数$f(x)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{|x|}{x}\right)$.

著名的狄利克雷函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

可以表示为极限

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\left(\cos^m(n!\ \pi x)\right)\right).$$

这是因为，当x为有理数时，若$x=\dfrac{p}{q}$(p为整数，q为非零整数)，则当$n>q$时，$n!x$是整数. 于是当$n>q$时有$\cos^m(n!\pi x)=1$，因此$\lim\limits_{m\to\infty}(\cos^m(n!\pi x))=1$. 从而

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\left(\cos^m(n!\pi x)\right)\right)=\lim_{n\to\infty}1=1.$$

当x为无理数时，对于确定的x和任意固定的n，

$$-1<\cos(n!\pi x)<1.$$

所以

$$\lim_{m\to\infty}\left(\cos^m(n!\pi x)\right)=0.$$

因此当x为无理数时，

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty}(\cos^m(n!\,\pi x)))=\lim_{n\to\infty}0=0.$$

(4) 关于复合函数的定义

在教材中,对于复合函数概念一般是这样陈述的.

如果函数 $u=g(x)$ 的值域 $R(g)$ 与函数 $y=f(u)$ 的定义域 $D(f)$ 的交集 $R(g)\cap D(f)$ 非空,则可以定义复合函数

$$y=(f\circ g)(x)=f(g(x)).$$

复合函数 $f\circ g$ 的定义域是函数 $u=g(x)$ 的定义域 $D(g)$ 中使得 $f(g(x))$ 有意义的那些 x 组成的集合.

因为完全形式化的叙述一般比较抽象,学生理解会有困难.对于层次较低的学生,降低抽象程度和适当改变过度形式化的要求,换取概念的平易和实用,是一种可以考虑的选择. 为了在保持科学性的前提下尽量使叙述简单易懂,我们建议对于复合函数采用文献[6]中的表述方法.

复合函数的定义 给定函数 f 和 g,由 f 和 g 构成的复合函数是 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$. 复合函数 $f\circ g$ 的定义域是 g 的定义域中那些满足 $g(x)\in D(f)$ 的那些 x 组成的集合.

这个表述方式严密、清晰而且容易检验. 按照这个定义,学生可以非常容易地理解、判定任意两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 是否能够构成复合函数 $f\circ g$. 很容易理解诸如

$$\ln(\sin x),\quad \arcsin(1-x)$$

等函数中的复合关系.

也可以采用一种更加通俗的陈述方式.

将一个函数 $u=g(x)$ 代入另一个函数 $y=f(u)$ 的自变量的位置,得到的新函数 $y=f(g(x))$ 称为这两个函数的复合函数. 复合函数 $y=f(g(x))$ 的定义域 D 是那些使得 $y=f(g(x))$ 有意义的 x 组成的集合.

总之,对于层次较低的教材,处理复合函数的原则是① 科学性:不与严格的、形式化的表述方式相冲突;② 尽可能将问题说得简单、平易,够用为度.

（5）映射与函数

一般教科书中关于函数的定义，大都强调所谓"对应关系"，许多人更愿意由映射引入函数的概念，或者总是强调函数与映射的关系. 将函数看成映射可以强化概念的系统性和一般性，但是对于微积分的教学来说，这种对于抽象性和形式化的过度追求未必需要. 著名数学教育家张奠宙教授曾经指出，在微积分这门科学中，函数研究的重点是了解自变量的变化以怎样的方式引起因变量的变化. 其中一个非常重要的问题是，当 x 有增量 Δx 时，怎样表示函数 $y=f(x)$ 的增量 $\Delta y\equiv f(x+\Delta x)-f(x)$. 即使是多元函数，也不过是一个变量对于多个变量的依赖关系，研究的重点问题仍然是一个或几个自变量的变化怎样影响因变量的变化. 因此，在教材的处理方面，函数概念不一定与映射挂钩. 对于层次较低、以应用为主的教材，函数概念可以不涉及映射.

（6）函数的局部性质和整体性质

微积分特别是微分学，是研究函数性质的重要工具. 函数的性质可以分为局部性质和整体性质.

所谓 $f(x)$ 在一点 x_0 附近的局部性质，包含两种含义. 其一是指当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的某种变化趋势. 例如，$f(x)$ 在点 x_0 连续意味着当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to f(x_0)$；$f(x)$ 在点 x_0 可导意味着当 $x\to x_0$ 时，函数增量与自变量增量的比值 $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ 趋向于某个实数；泰勒公式中的佩亚诺余项 $o((x-x_0)^n)$ 表示当 $x\to x_0$ 时，函数值 $f(x)$ 与函数在该点的 n 阶泰勒多项式的差是 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小等. 局部性质的另一种含义是指 $f(x)$ 在点 x_0 附近的某种性质. 例如，隐函数定理断定，在某些条件被满足时，方程 $F(x,y)=0$ 在点 x_0 的某个邻域中确定了唯一的一个函数 $y=y(x)$. x_0 的这个邻域肯定存在，但是没有确定这个邻域有多大. 这就是一种局部性质. 函数极值以及微分方程解的存在唯一性等性质也属于局部性质. 另外，曲线的渐近线也是一种局部性质. 渐近线所反映的是当 $x\to x_0$

或者$x\to\infty$时，函数的某种变化趋势.

函数的整体性质，是指函数在某个区间或者某个区域上的性质，这个区间或者区域是确定的. 在近代分析中，函数的整体性质又称为大范围性质. 例如，函数的奇偶性、周期性、函数在某个区间上的单调性和凹凸性等. 泰勒公式的佩亚诺余项所表现的是函数的一种局部性质；而拉格朗日余项则反映了函数在某个区间上的一种大范围性质.

二、品 味 极 限

概述:对于大学本科理工科的微积分课程,ε-N 方法和 ε-δ 方法描述的极限概念是教学中的一个难点. 但是,如果缺失了严格的极限概念,微积分概念的表述和推理证明都会遇到困难. 因此,大学本科层次的微积分教材和教学对于严格极限概念的取舍经常举棋不定.

其实,ε-N 和 ε-δ 方法是一种寓意深刻而丰富的思维方法. 它以科学的方式陈述了"极限"概念,从而对于变量的变化趋势做出了定量地、可以观测的表述,因此能够将"导数"和"积分"等微积分的基本概念置于科学的基础之上,从而化解了微积分在一百多年中面临的巨大危机,并且在微积分体系中建立了严密的推理证明方法,使得微积分摆脱了单纯对于几何直观与物理意义的依赖,成为一个科学的体系.

另一方面,ε-N 和 ε-δ 方法又具有很好的直观意义. 如果对这个方法作适当定位,提出合理的教学目标并且采取适当的教学方法,对于教学目标的实现并不是一个非常困难的问题.

1. 极限概念产生的历史背景

我们从两个经典问题出发,回顾严格极限概念的产生与发展.

(1) 牛顿对于运动质点瞬时速度的研究

假设质点 P 在 x 轴上做直线运动,t 表示时间,$s(t)$ 表示质点 P 在时刻 t 所处的位置,t_0 是一个确定的时刻. 如何求质点 P 在时刻 t_0 的瞬时速度?

对于大于零的时间间隔 Δt,用 Δs 表示质点 P 从时刻 t_0 到

$t_0+\Delta t$这段时间前进的距离. $\frac{\Delta s}{\Delta t}$就是质点 P 在这段时间中的平均速度. 时间间隔 Δt 越小,平均速度就越接近于时刻 t_0 的瞬时速度. 关于这个过程,牛顿的说法是这样的:当 Δt 越来越小以至于消失时,比值$\frac{\Delta s}{\Delta t}$的所谓的"最终比"就是质点在时刻 t_0 的瞬时速度(见[1]).

当 Δt 消失后到底变成了什么? 牛顿的解释是变成了"无穷小量". 也就是被称为"微分"的"$\mathrm{d}t$";类似地 Δs 也有最终值 $\mathrm{d}s$,这也是无穷小量. 这样的"无穷小量"当时被理解为一种"新型的数",它不等于零、不是负数,但是却小于任意正数. 然而,两个无穷小量的商$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$又是一个普通的数. 莱布尼茨将这个商称作"微商"(两个微分的商).

但是"无穷小量"、"微分"和"最终比"都是捉摸不定的事物,这样神秘而模糊不清的表述受到了广泛的质疑和猛烈的攻击. "微分"被人讥笑为"消逝的鬼魂".

(2) 莱布尼茨求曲边梯形面积的方法

积分记号 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是莱布尼茨创造的. 他以求曲边梯形面积的问题解释了积分记号的意义. 假设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,D 是以直线 $x=a$ 和 $x=b$ 为底、以 x 轴和曲线 $y=f(x)$ 为边的曲边梯形,如何求 D 的面积?

在区间$[a,b]$上任意点处取一个"无穷小的区间",用 $\mathrm{d}x$ 表示这个无穷小区间的长度,$f(x)\,\mathrm{d}x$ 是以 $\mathrm{d}x$ 为宽、以 $f(x)$ 为高的"无穷窄"的矩形的面积. 则曲边梯形 D 就表示成无穷多个"无穷窄"的矩形之并. D 的面积 S 就等于无穷多个"无穷窄的矩形"面积 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 之和. 用 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示对这无穷多个 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 求和. 于是曲边梯形 D 的面积就等于 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$(图 2.1).

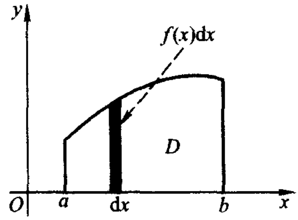

图 2.1

莱布尼茨和他的学生们对于积分的理解是，dx 与 $f(x)dx$ 都是无穷小量，积分 $\int_a^b f(x)dx$ 就是无穷多个无穷小量的和(见[1]).

与牛顿的“最终值”和“无穷小量”一样，莱布尼茨所说的“无穷小的区间”和“无穷多个无穷小求和”都是模糊不清的概念. 所谓的“无穷小量”是一个在逻辑上和代数上没有意义的概念，它既不能作为逻辑推理的出发点和落脚点，也不能进行代数运算. 于是，具有重大意义的导数和积分概念却被一些神秘而含糊不清的术语所笼罩，在相当长的一个历史时期造成了混乱.

由于早期的微积分缺乏严密性，争吵声和批判声连绵不断. 与牛顿同时代的数学家 M. 罗尔说：“微积分是精巧机智的谬误汇编.”后来的拉格朗日和欧拉也认为微积分的基础不稳固，之所以能够得出正确的结论，仅仅是因为其中的谬误互相抵消了(见[2]).

在牛顿之后的一个历史时期，数学家不断地试图用各种努力对于微积分的基本概念赋予合理的解释. 但是在一个相当长的时间中未获得成功. 直到法国数学家柯西以及其后的魏尔斯特拉斯等人，才以正确的方式建立了极限的严格概念，用极限的方法表述导数和积分概念，并且在微积分中引进了严格的演绎推理方法，证