



世纪经济管理专业应用型精品教材

21SHIJI JINGJI GUANLI ZHUANYE YINGYONGXING JINGPIN JIAOCAI

线性代数

主编 尤正书 冉兆平

XIANDINGDAISHU

X_3

$$\begin{cases} x_1 = c_2 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & 2 & 1 \\ 0 & b-1 & 1 & 0 \\ a & b & 1-b & 3-2b \end{pmatrix}$$



上海财经大学出版社

21 世纪经济管理专业应用型精品教材

线性代数

尤正书 冉兆平 主 编
湛少锋 副主编

 上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/尤正书、冉兆平主编,湛少锋副主编. —上海:上海财经大学出版社,2007.8

(21世纪经济管理专业应用型精品教材)

ISBN 978-7-81049-055-9/O · 21

I. 线… II. ①尤… ②冉… ③湛… III. 线性代数-高等学校-教材
IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 125469 号

☐ 责任编辑 刘光本

☐ 封面设计 周卫民

XIANXING DAISHU

线 性 代 数

尤正书 冉兆平 主 编

湛少锋 副主编

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙 邮编 200434)

网 址: <http://www.sufep.com>

电子邮箱: webmaster@sufep.com

全国新华书店经销

上海第二教育学院印刷厂印刷

上海望新印刷厂装订

2007 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月第 1 次印刷

787mm×960mm 1/16 14.25 印张 279 千字

印数: 0 001—8 000 定价: 19.00 元

21 世纪经济管理专业应用型精品教材

编审委员会

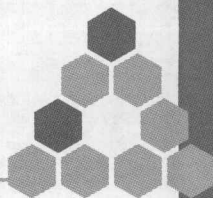
主 任 曹均伟

副主任 宋 谨 徐 超

委 员 (按姓氏笔画为序)

王德发	冉兆平	吕占峰	安 烨
李文新	李会青	吴国萍	吴秋生
辛茂荀	宋 谨	宋文彪	宋莉萍
张一贞	林 新	罗昌宏	姚晓明
袁蒲佳	夏兆敢	黄金火	曹 刚
盛洪昌	彭 彬	韩冬芳	程道华

前言



线性代数是理工类和经管类高等院校学生的一门重要基础课。由于这门课程比较抽象,学生学习有一定难度,而以前可供学生选用的线性代数教材又偏难。要使教材既符合学生的实际情况,又能满足教学的要求,我们集中了多个学院的骨干教师,精心编写了这本教材。本教材的主要特点是:语言通俗易懂,内容循序渐进;为便于学生解题,选择的例题也较多;重视应用而对难证明的定理只给出结论而不作详细证明,使学生将学习的主要方向放在会计计算、应用等实际操作能力的训练上;每章末专门配置了典型例题解析,使学生在掌握重点内容的基础上有所提高;在第一章中,我们增加了空间直角坐标系的内容,主要是为没学过此知识的学生所设置。

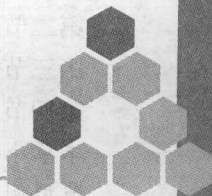
参加本书编写的有:冉兆平、湛少锋、赵燕芬、梁军、胡珊、陕勇、尤正书。

尤正书、冉兆平负责审稿,尤正书统稿。

尽管各位编者尽其所能,由于我们的水平有限,编写时间仓促,本书可能有不少缺点和错误,欢迎广大师生、读者批评指正。

编委会
2007年8月

目 录



前言	1
第一章 行列式及空间直角坐标系	1
第一节 行列式	1
第二节 行列式的性质	8
第三节 行列式的展开定理	14
第四节 克莱姆法则	17
第五节 空间直角坐标系	19
本章小结	32
典型例题解析	33
习题一	36
综合练习一	39
第二章 矩阵	43
第一节 矩阵的概念	43
第二节 矩阵的运算	45
第三节 逆矩阵	51
第四节 分块矩阵	56
第五节 矩阵的初等变换	61
第六节 矩阵的秩	69
第七节 消元法解线性方程组	72
本章小结	77
典型例题解析	78
习题二	81
综合练习二	84

第三章 向量空间	87
第一节 n 维向量	87
第二节 向量间的线性关系	88
第三节 向量组的秩	95
第四节 向量空间	98
本章小结	100
典型例题解析	101
习题三	104
综合练习三	105
第四章 线性方程组	108
第一节 齐次线性方程组	108
第二节 非齐次线性方程组	116
本章小结	121
典型例题解析	122
习题四	125
综合练习四	127
第五章 矩阵的特征值与特征向量	131
第一节 矩阵的特征值与特征向量的概念	131
第二节 相似矩阵与矩阵的对角化	135
第三节 向量的内积与正交矩阵	139
第四节 实对称矩阵的对角化	142
本章小结	144
典型例题解析	145
习题五	148
综合练习五	150
第六章 二次型	152
第一节 二次型及其标准型	152
第二节 正定二次型	161
本章小结	164
典型例题解析	164
习题六	168
综合练习六	169

第七章 线性空间与线性变换	171
第一节 线性空间的概念	171
第二节 线性空间的基、维数与坐标	174
第三节 线性空间的基变换与坐标变换	176
第四节 线性变换	178
本章小结	183
典型例题解析	183
习题七	186
综合练习七	187
习题及综合练习参考答案	189
附录 Matlab 在线性代数中的应用	204
参考文献	216

第一章

行列式及空间直角坐标系

行列式是从解线性方程组的过程中产生和建立起来的,它是一个重要的数学工具,有时起到简化运算的作用.本章先介绍二、三阶行列式,再引出 n 阶行列式的概念,并给出行列式的性质和计算方法,最后介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则.为对空间有直观感受并了解线性方程组的直观意义,引入空间直角坐标系及平面和直线等方程的概念.如果学过此内容,也可略过此节.

第一节 行列式

一、二阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1-1)$$

其中, x_1, x_2 为未知量; $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 为未知量的系数; b_1, b_2 为常数项.

我们解此方程,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,有

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (1-2)$$

为了便于记忆,引入符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 来表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ 来表示

$b_1a_{22} - a_{12}b_2$, $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ 来表示 $a_{11}b_2 - b_1a_{21}$. 二阶行列式的定义如下:

定义 1.1

将 2×2 个数排成两行两列,并在左、右两侧各加一竖线,得到算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1-3)$$

我们把(1-3)式的左端称为二阶行列式,记为 D ;右端称为二阶行列式的展开式.展开式共有 $2!$ 项,每一项为取自不同行不同列的两个元素之积.

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为二阶行列式的元素,这四个元素排成一个正方形,横排称为行,竖排称为列.二阶行列式共有两行两列,每个元素 a_{ij} ($i, j = 1, 2$) 的第一个下标 i 表示元素所在的行,称为行标;第二个下标 j 表示元素所在的列,称为列标;如 a_{21} 表示该元素是行列式中第二行第一列的元素.

上述二阶行列式,可用对角线法则来记忆,如图 1-1 所示.

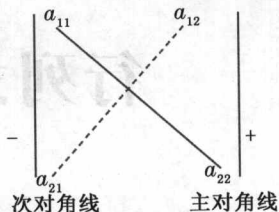


图 1-1

从二阶行列式的左上角到右下角的对角线称为主对角线(实线);右上角到左下角的对角线称为次对角线(虚线).主对角线上的元素之积前取正号,次对角线上的元素之积前取负号.二阶行列式的值就是这两项的代数和.

如二元线性方程有(1-1)式中系数行列式用 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示,(1-2)式中的分子也可用二阶行列式来表示:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

其中, D_i ($i=1, 2$) 表示把 D 中第 i 列元素换成(1-1)式右边相对应的常数列元素所得到的行列式.

于是,当 $D \neq 0$ 时,二元线性方程组(1-1)的解就可表示为:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D} \quad (1-4)$$

例 1 解二次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$.

解 计算二阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 2 \times 3 = -5$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 2 \times 0 = 1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 1 \times 3 = -3$$

$$\text{因此, } x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{1}{5}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}.$$

二、三阶行列式

定义 1.2 将 3×3 个数排成三行三列, a_{ij} 表示第 i 行、第 j 列的元素 ($i, j = 1, 2, 3$), 并在左、右两侧各加一竖线, 得到算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (1-5)$$

(1-5) 式的左端称为三阶行列式, 记为 D ; 右端称为三阶行列式的展开式. 展开式共有 $3! = 6$ 项, 每一项均取自不同行不同列的三个元素的乘积, 并按一定的规则取正或负号. 三阶行列式可用下面的对角线法则记忆.

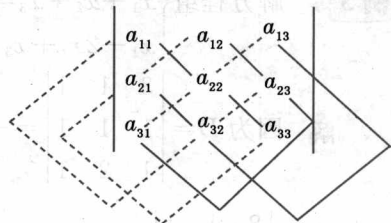


图 1-2

从左上角到右下角的对角线称为主对角线, 从右上角到左下角的对角线称为副对角线. 实线看作是平行于主对角线的连线, 虚线看作是平行于副对角线的连线, 实线上三个元素之积前取正号, 虚线上三个元素之积前取负号, 求其代数和就是这个三阶行列式的值.

设三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1-6)$$

利用加减消元法可求出三元线性方程组的解 x_1, x_2, x_3 .

同样类似于二阶行列式定义方式, 式(1-5)中的 D 称为三元线性方程组(1-6)的系数行列式. 根据三阶行列式的定义, 有

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

其中, $D_i (i=1, 2, 3)$ 是把系数行列式 D 中的第 i 列元素换成线性方程组(1-6)右边相对应的常数列元素所得到的行列式.

当 $D \neq 0$ 时,三元线性方程组(1-6)也可解出惟一的一组解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}$$

例 2 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ 的值.

解 利用对角线法则,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (2 \times 3 \times 4) + [1 \times 4 \times (-2)] + [(-1) \times 0 \times 5]$$

$$- [(-1) \times 3 \times (-2)] - (1 \times 0 \times 4) - (2 \times 4 \times 5) = -30$$

例 3 解方程组 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$.

解 因为 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$,

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -4, D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -6$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, x_3 = \frac{D_3}{D} = 3$$

三、全排列及其逆序数

用对角线法则计算行列式,虽然直观,但对于四阶及更高阶行列式,该方法就不适用了.为了求解四元及四元以上的线性方程组,需要把二、三阶行列式的要领进一步推广.下面先介绍全排列及其逆序数的概念及性质.

自然数 $1, 2, 3, \dots, n$ 按一定次序排成一行,称为一个 n 元排列,记为 $p_1 p_2 \dots p_n$,排列 $1 2 \dots n$ 称为自然排列.这样, n 元排列总共有 $n!$ 个.例如,自然数 $1, 2, 3$ 共有 $3! = 6$ 个排列,它们是

$$123, 231, 312, 132, 213, 321$$

我们将自然排列规定为标准次序.下面定义排列的逆序数:

定义 1.3 在一个 n 元排列 $p_1 p_2 \dots p_n$ 中,若一个大的数排在一个小的数的前面

(即与标准次序不同时),则称这两个数有一个逆序.一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数,记为 $t(p_1 p_2 \cdots p_n)$.

例如,在四元排列 4132 中出现的所有逆序为 41,43,42,32,所以

$$t(4132)=4$$

在自然排列(标准次序)中没有逆序,其逆序数为 0.

下面给出逆序数的计算方法:

设 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为 n 个自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列,考虑元素 $p_i (i=1, 2, \cdots, n)$, 如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的数有 t_i 个,就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i ,全体元素的逆序数的总和就是这个排列的逆序数,即

$$t(p_1 p_2 \cdots p_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^n t_i \quad (1-7)$$

例 4 求下列排列的逆序数:

(1) 31524;

(2) $n(n-1) \cdots 21$.

解 (1) 在排列 31524 中:

3 排在首位,逆序数为 0;

1 的前面比 1 大的数有一个,它是 3,故逆序数为 1;

5 是最大数,逆序数为 0;

2 的前面比 2 大的数有两个,它们是 3,5,故逆序数为 2;

4 的前面比 4 大的数有一个,它是 5,故逆序数为 1.

因此,这个排列的逆序数为

$$t(31524)=0+1+0+2+1=4$$

(2) 同理可得:

$$t[n(n-1) \cdots 21] = 0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

定义 1.4 逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例如,自然数 1,2,3 构成的 6 个排列中,经计算可知偶排列为 123,231,312;奇排列为 321,132,213.

定义 1.5 将一个排列中的任意两个元素的位置互换,而其余的元素不动,就得到了一个新的排列,称这样的变换为一次对换;将相邻两个元素对换,称为相邻对换.再看逆序数的性质.

定理 1.1 对排列进行一次对换则改变其奇偶性.

证明 首先证明相邻的对换情形.

设排列为 $a_1 \cdots a_i a b b_1 \cdots b_m$, 对换 a 与 b 得到新的排列 $a_1 \cdots a_i b a b_1 \cdots b_m$. 显然, 元素 $a_1, \cdots, a_i; b_1, \cdots, b_m$ 的逆序数没有改变, 只有元素 a 和 b 的逆序数改变了.

当 $a < b$ 时, 对换后, a 的逆序数增加 1, 而 b 的逆序数不变;

当 $a > b$ 时, 对换后, a 的逆序数不变, 而 b 的逆序数减少 1.

因此, 对换后新的排列与原排列的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1 \cdots a_i a b_1 \cdots b_k b c_1 \cdots c_s$, a 和 b 之间相隔 k 个数, 要实现 a 与 b 的对换, 可先将 a 与 b_1 作相邻对换, 再将 a 与 b_2 作相邻对换, 照此继续下去, 经 $k+1$ 次相邻对换, 调成

$$a_1 \cdots a_i b_1 \cdots b_k b a c_1 \cdots c_s$$

然后再把 b 依次与 $b_k, \cdots, b_1$ 作 k 次相邻对换, 调成

$$a_1 \cdots a_i b b_1 \cdots b_k a c_1 \cdots c_s.$$

这样, 对换 a 和 b , 可经过 $2k+1$ 次相邻对换而得到, 所以这两个排列的奇偶性正好相反.

由定理 1.1 可得到下面的推论.

推论 1 奇排列调成自然排列的对换次数为奇数, 偶排列调成自然排列的对换次数为偶数.

证明 因为自然排列 $12 \cdots n$ 是偶排列 (自然排列的逆序数为 0), 由定理 1.1 知, 一次对换改变的排列的奇偶性, 当排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是奇 (偶) 排列时, 必须作奇 (偶) 次对换才能变成自然排列 $12 \cdots n$, 故所作的对换次数与排列具有相同的奇偶性.

推论 2 全体 n 元排列 ($n > 1$) 的集合中, 奇排列与偶排列各一半.

四、 n 阶行列式

定义 1.6 将 $n \times n$ 个数 a_{ij} 排成 n 行 n 列, a_{ij} 是位于第 i 行、第 j 列上的元素, 并在左、右侧各加一竖线, 得到算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1 p_2 \cdots p_n)} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (1-8)$$

左端记为 D , 右端为行列式 D 的展开式; 其中 $(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 为自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列; t 为这个排列的逆序数; 求和符号 $\sum_{(p_1 p_2 \cdots p_n)}$ 是所有 n 元排列 $(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 求和. n 阶行列式是一个数, 它表示 $n!$ 项的代数和.

式 (1-8) 右边的每一项 $(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 中的每一个元素取自 D 中的不同行

和不同的列,行标排成自然排列,相应的列标是 $1, 2, \dots, n$ 的一个 n 元排列 $p_1 p_2 \dots p_n$. 若 $p_1 p_2 \dots p_n$ 是偶排列,则该排列对应的项取正号;若是奇排列,则取负号.

当然定义 1.6 也适用于二、三阶行列式. 对于一阶行列式, $|a_{11}| = a_{11}$, 注意这里的 $|a_{11}|$ 并不表示 a_{11} 的绝对值.

下面介绍几个特殊的行列式:

(1) 上三角形行列式(主对角线以下的元素都为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \quad (1-9)$$

(2) 下三角形行列式(主对角线以上的元素都为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \quad (1-10)$$

(3) 对角形行列式(主对角线以外的元素都为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \quad (1-11)$$

(4) 范德蒙德行列式(Vandermonde)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \quad (1-12)$$

其中, $n \geq 2$, $\prod$ 为连乘号, 这里表示所有 $(a_i - a_j) (1 \leq j < i \leq n)$ 的乘积.

这里仅证明上三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

证明 当 $j < i$ 时, $a_{ij} = 0$, 故 D 中可能不为零的元素是 a_{ip_i} , 其下标应满足

即

$$p_1 \geq 1, p_2 \geq 2, \dots, p_n \geq n$$

在所有排列 $p_1 p_2 \dots p_n$ 中, 能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12 \dots n$, 所以 D 中可能不为零的项只有一项 $(-1)^{\tau(12 \dots n)} a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$. 由于 $12 \dots n$ 是偶排列, 此项的符号为正号, 所以

$$D = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

同样, 对于下三角形行列式, 有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

特别地, 对于对角形行列式, 有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

范德蒙德行列式展开式的结果在典型例题解析例 4 中可由行列式的性质推出.

第二节 行列式的性质

二阶和三阶行列式可直接利用对角线法则或定义计算, 但当行列式的阶数较高时, 根据行列式的定义, 其计算量是非常大的. 为此, 下面将介绍行列式的性质, 利用这些性质可简化行列式的计算.

设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 把 D 的行和列互换, 得到新的行列式, 称为 D 的转

置行列式, 记为

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式的行和列互换,其值不变.

即行列式 D 与它的转置行列式相等, $D=D^T$.

证明 记 D 的一般项为

$$(-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$$

它的元素在 D 中位于不同的行、不同的列,因而在 D^T 中位于不同的列、不同的行. 所以这 n 个元素的乘积在 D^T 中应为

$$a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

符号也是 $(-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)}$. 因此 D 与 D^T 是具有相同项的行列式.

性质 1 说明行列式的行和列具有同等地位,即位于行成立的性质,对于列也同样成立,反之亦然.

性质 2 互换行列式中任意两行(列)的位置,行列式的正负号改变.

$$\text{证明 设 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} (i \text{ 行}) \\ (s \text{ 行}) \end{matrix}$$

交换 D 的第 i 行与第 s 行,得到行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} (i \text{ 行}) \\ (s \text{ 行}) \end{matrix}$$

记 D 的一般项中 n 个元素的乘积为

$$a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$$

它的元素在 D 中位于不同的行、不同的列,因而在 D_1 中也位于不同的行、不同的列,所以也是 D_1 的一般项的 n 个元素的乘积. 由于 D_1 是交换 D 的第 i 行与第 s 行,而各元素所在的列并没有改变,所以它在 D 中的符号为

$$(-1)^{t(1 \cdots i \cdots s \cdots n) + t(p_1 \cdots p_i \cdots p_s \cdots p_n)}$$

在 D_1 中的符号为