认真解读真题 无须漫游题海

高考数学真题分类解读

第四册

不等式

圆锥曲线方程

高考真题研究组 编

丛书在手 高考无忧
分类解读 同步教学
前思设计 与众不同
解读细致 数形结合

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高考数学真题分类解读

第四册

不等式

圆锥曲线方程

丛书策划　张兰知

本册主编　王小波　董　亮

哈尔滨工业大学出版社

内容简介

本书是《高考数学真题分类解读》丛书的第四册，主要内容由不等式，圆锥曲线方程两部分组成。本书全部选自全国和各省的高考真题，以前思、解析的形式解题，图文并茂，便于自学。

本书既适合高考生备考选用，又适合高中一二年级学生学习时参考，同时也可作为高中数学教师的参考书。

责任编辑　张秀华

封面设计　卞秉利

出版发行　哈尔滨工业大学出版社

社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006

传　　真　0451-86414749

网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn

印　　刷　黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂

开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 13.625　字数 290 千字

版　　次　2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5603-2646-7

印　　数　1～5 000 册

定　　价　21.00 元

前　言

高考考查的是考生的思维素质。高考数学真题的区分度也是考生思维素质的区分度。高考数学真题蕴涵着考查考生思维素质的知识载体，这些知识载体就是培养学生思维素质的知识载体。因此，认真解读高考数学真题，是培养学生思维素质的重要途径。这也是作者编写此书的初衷。

高考数学真题是大量高中数学习题的浓缩，是题之经典、题之精华，它反映了高考对不同数学知识点的考核方式与考核要求。如能精通这本《高考数学真题分类解读》，你无须漫游题海就能达到掌握全面的高考题型及解题方法，升华高中数学知识，从容面对高考，省时高效。

本书在结构上采用了“高考真题”后面紧跟“前思”、“解析”的编排方式，节省了前后翻阅之时间。而且在解析之前设计了“前思”，可以呈现解题前的思维过程，给出解题中将要用到的知识点，旨在通过“前思”的过程学会思考，复习知识、整合知识，使数学思维素质在潜移默化中得以提升。这也是本书与众不同的思考。

本书对高考数学真题进行了分类解读，与教学同步，分解考生高考总复习的压力；解读细致，排疑解惑；数形结合，用图形解说，形象直观，一目了然；版面设计别具一格，以减轻视觉疲劳。

全书共六册，分为 15 章。第一册为集合与简易逻辑，函数，三角函数，平面向量；第二册为直线和圆的方程，直线、平面、简单几何体；第三册为排列、组合和概率，概率与统计，数列；第四册为不等式，圆锥曲线方程；第五册为极限，导数与微分，复数，算法初步与选讲选做题；第六册为高考数学真题分类集，将高考数学真题分类编排为一册，以便于考生自测。

本书既适用于高三备考的考生，也适用于高一、高二的学生，同时也可作为高中数学教师的参考书。

本册不等式由王小波编写，圆锥曲线方程由董亮编写。

一本好书，能让你从中受益！
一本好书，能让你高考无忧！
《高考数学真题分类解读》——高中生必备的学习帮手！

编　者
2007 年 12 月

目　录

第十章　不等式

一、选择题

10.1　07 全国

$\dfrac{x-2}{x+3}>0$ 的解集是______.

A. $(-3,2)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

【前思】

将分式不等式转化为等价的整式不等式求解.

【解析】

原不等式等价于 $(x-2)(x+3)>0$.

由数轴标根法，如图 1，知原不等式的解集为 $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$.

故选 C.

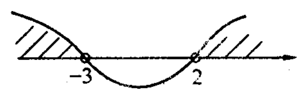

图 1

10.2　07 全国

不等式 $\dfrac{x-1}{x^2-4}>0$ 的解集是

A. $(-2,1)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(-2,1)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

【前思】

将分式不等式转化为等价的整式不等式求解.

【解析】

原不等式等价于 $(x-1)(x^2-4)>0$，即

$$(x-1)(x-2)(x+2)>0$$

由数轴标根法，如图 2，知原不等式的解集为 $(-2,1)\cup(2,+\infty)$.

故选 C.

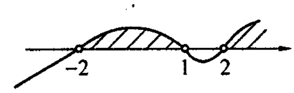

图 2

10.3　07 湖南

不等式 $\dfrac{x-2}{x+1}\leqslant 0$ 的解集是______.

A. $(-\infty,-1)\cup(-1,2]$　　B. $[-1,2]$

C. $(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$　　D. $(-1,2]$

【前思】

将分式不等式转化为等价的整式不等式求解，注意分式不等式含有等号的等价变形，

型如$\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$(或 $\leqslant 0$) 的式子等价于$\begin{cases} f(x)g(x) \geqslant 0(\text{或} \leqslant 0) \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$

【解析】

原不等式等价于 $\begin{cases} (x-2)(x+1) \leqslant 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$

故解集为$(-1,2]$.

故选 D.

10.4　07 湖南______.

不等式 $x^2 > x$ 的解集是______.

A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$

【前思】

先将原不等式整理到基本型 $f(x)g(x) > 0$(或 < 0),再求解.

【解析】

原不等式可化为 $x^2 - x > 0$,即 $x(x-1) > 0$.

故解集为$(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$.

故选 D.

10.5　07 安徽

若对任意 $x \in \mathbf{R}$,不等式 $|x| \geqslant ax$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是______.

A. $a < -1$　　B. $|a| \leqslant 1$　　C. $|a| < 1$　　D. $a \geqslant 1$

【前思】

若直接解此不等式,较复杂,涉及讨论.

不妨把不等式的两边看成是两条曲线 $y = |x|$ 和 $y = ax$,则只需要找到满足使曲线 $y = |x|$ 恒在曲线 $y = ax$ 上方的a即可,由图象可以作出判断.

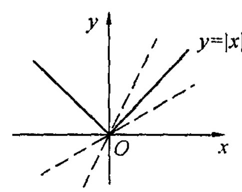

图 3

【解析】

$y = |x|$ 的图象如图 3 所示,而 $y = ax$ 是恒过$(0,0)$,斜率为 a 的直线,如图中虚线所示.

若要 $|x| \geqslant ax$ 恒成立,即曲线 $y = |x|$ 恒在 $y = ax$ 的立方,则由图可知 $-1 \leqslant a \leqslant 1$,即 $|a| \leqslant 1$.

故选 B.

10.6　07 北京

如果正数 a,b,c,d 满足$a + b = cd = 4$,那么______.

A. $ab \leqslant c + d$,且等号成立时 a,b,c,d 的取值唯一

B. $ab \geqslant c + d$,且等号成立时 a,b,c,d 的取值唯一

C. $ab \leqslant c + d$,且等号成立时 a,b,c,d 的取值不唯一

D. $ab \geqslant c + d$,且等号成立时 a,b,c,d 的取值不唯一

【前思】

均值不等式$\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$($a,b \in \mathbf{R}^+$,当且仅当 $a = b$ 时取"="号).

【解析】

由已知 $4 = a + b \geqslant 2\sqrt{ab}(a,b \in \mathbf{R}^+)$ 得

$$ab \leqslant 4 \qquad ①$$

由已知 $4 = cd \leqslant (\frac{c+d}{2})^2(c,d \in \mathbf{R}^+)$ 得

$$c + d \geqslant 4 \qquad ②$$

由①②知 $ab \leqslant c + d$，当且仅当①②都取等号时等号成立，此时 $a = b = c = d = 2$，取值唯一.

故选 A.

10.7　07 辽宁

设 p、q 两个命题，$p:\log_{\frac{1}{2}}(|x|-3) > 0$，$q:x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} > 0$，则 p 是 q 的______.

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【前思】

这类题一般先解 p、q 成立的充要条件，即解不等式，然后看两个解集之间的包含关系.

【解析】

解 $p:\log_{\frac{1}{2}}(|x|-3) > 0$ 成立的充要条件为

$$\begin{cases} |x|-3 > 0 \\ |x|-3 < 1 \end{cases}$$

解得

$$-4 < x < -3 \text{ 或 } 3 < x < 4$$

不妨设解集为 $A = \{x \mid -4 < x < -3 \text{ 或 } 3 < x < 4\}$

解 $q:x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} > 0$ 成立的充要条件为

$$(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2}) > 0$$

解得

$$x > \frac{1}{2} \text{ 或 } x < \frac{1}{3}$$

不妨设解集为 $B = \{x \mid x > \frac{1}{2} \text{ 或 } x < \frac{1}{3}\}$，则

$$A \subsetneqq B$$

故 p 是 q 的充分不必要条件.

故选 A.

10.8　06 安徽

不等式 $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ 的解集是______.

A. $(-\infty,2)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $(0,2)$　　D. $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

【前思】

本题是一道解分式不等式的问题，先整理到分式不等式的基本型 $\frac{f(x)}{g(x)} < 0\ (g(x) \neq$

0),再转化为等价的整式不等式求解.

【解析】

由$\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$得$\frac{1}{x}-\frac{1}{2}<0$,即$\frac{x-2}{2x}>0$,等价于$2x(x-2)>0$

解得 $$x<0\text{ 或 }x>2$$

原不等式的解集为$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

故选 D.

10.9 06 江西

若$a>0,b>0$,则不等式$-b<\frac{1}{x}<a$等价于______.

A. $-\frac{1}{b}<x<0$或$0<x<\frac{1}{a}$　　B. $-\frac{1}{a}<x<\frac{1}{b}$

C. $x<-\frac{1}{a}$或$x>\frac{1}{b}$　　D. $x<-\frac{1}{b}$或$x>\frac{1}{a}$

【前思】

本题的实质是解分式不等式组,首先将原不等式化简到分式不等式的基本型$\frac{f(x)}{g(x)}>0(<0)(g(x)\neq 0)$. 然后,$\frac{f(x)}{g(x)}<0$等价于$f(x)g(x)<0$;$\frac{f(x)}{g(x)}>0$等价于$f(x)\cdot g(x)>0$.

【解析】

由$-b<\frac{1}{x}<a$得

$$\begin{cases}\frac{1}{x}<a\\ \frac{1}{x}>-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}-a<0\\ \frac{1}{x}+b>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1-ax}{x}<0\\ \frac{1+bx}{x}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(ax-1)>0\\ x(bx+1)>0\end{cases}$$

因为$a>0,b>0$,解得$x<-\frac{1}{b}$或$x>\frac{1}{a}$.

故选 D.

10.10 06 山东

设$p:x^2-x-2<0$,$q:\frac{1+x}{|x|-2}<0$,则p是q的______.

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【前思】

本题是一道借助不等式来完成的逻辑问题.

若$A\Rightarrow B$,则A是B的充分条件,同时,B是A的必要条件;从集合的角度看,若A是B的充分条件,则A是B的子集;若A是B的必要条件,则A包含B.

故本题中,正确的求解不等式是解决问题的关键.

【解析】

对于$p:x^2-x-2<0$,可因式分解为:$(x-2)(x+1)<0$,解得

$$-1<x<2$$

故 $$p:x\in(-1,2)$$

对于 $q:\dfrac{1+x}{|x|-2}<0$,可转化为 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ \dfrac{1+x}{x-2}<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0\\ \dfrac{1+x}{-x-2}<0\end{cases}$

解得 $$0\leqslant x<2\text{ 或 }-1<x<0\text{ 或 }x<-2$$

故 $$q:x\in(-\infty,-2)\cup(-1,2)$$

显然,p 是 q 的真子集,p 是 q 的充分不必要条件.

故选 A.

10.11　06 安徽

设 $a,b\in\mathbf{R}$,已知命题 $p:a=b$;命题 $q:(\dfrac{a+b}{2})^2\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$,则 p 是q 成立的______.

A. 必要条件不充分　　B. 充分不必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【前思】

本题是一道逻辑问题,问题的解决依赖于对均值不等式的理解.

对于$(\dfrac{a+b}{2})^2\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$,应该清楚它是由 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 得到的.

【解析】

由 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,得 $2(a^2+b^2)\geqslant a^2+2ab+b^2$,即

$$2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$$

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant(\frac{a+b}{2})^2$$

当且仅当 $a=b$ 时取"="号

可见,命题 $p:a=b$ 是命题 $q:(\dfrac{a+b}{2})^2\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$ 成立的充分不必要条件.

故选 B.

10.12　06 陕西

设 x,y 为正数,则$(x+y)(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y})$ 的最小值为______.

A. 15　　B. 12　　C. 9　　D. 6

【前思】

本题属均值不等式的应用,用均值不等式$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 来求最值,适用条件:①$a>0,b>0$;② 等号成立的条件 $a=b$;③ 求最值时必有定值.

【解析】

$$(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})=5+\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=9$$

当且仅当$\dfrac{4x}{y}=\dfrac{y}{x}$,即 $y^2=4x^2$ 时取"="号.

故选 C.

10.13　06 陕西

已知不等式$(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{a}{y})\geqslant 9$,对任意的正实数 x,y 恒成立,则正实数 a 的最小值为______.

A.8　　B.6　　C.4　　D.2

【前思】

对于 $f(x)\geqslant A$ 恒成立问题,只需满足 $f(x)_{\min}\geqslant A$ 即可.

【解析】

$$(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{a}{y})=1+a+\frac{y}{x}+\frac{ax}{y}\geqslant 1+a+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{ax}{y}}=1+a+2\sqrt{a}$$

其中,x,y,a 均大于 0,当且仅当 $y^2=ax^2$ 时取"="号.

可见上式的最小值为 $1+a+2\sqrt{a}$.

故只需 $1+a+2\sqrt{a}\geqslant 9$ 即可,解得$\sqrt{a}\geqslant 2$,所以 $a\geqslant 4$,a 的最小值为 4.

故选 C.

10.14　06 重庆

若 $a,b,c>0$,且 $a(a+b+c)+bc=4-2\sqrt{3}$,则 $2a+b+c$ 的最小值为______.

A.$\sqrt{3}-1$　　B.$\sqrt{3}+1$　　C.$2\sqrt{3}+2$　　D.$2\sqrt{3}-2$

【前思】

出现定值,求最值,且 a,b,c 均大于 0,想到利用 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 当且仅当$a=b$ 时取"="号.

找到所求量与已知定值间的关系是关键.

【解析】

$2a+b+c=a+b+a+c\geqslant 2(\sqrt{ab}+\sqrt{ac})$

当且仅当 $a=b=c$ 时取"="号.

对于 $a(a+b+c)+bc=4-2\sqrt{3}$,当 $a=b=c$ 时,有 $4a^2=4-2\sqrt{3}$.

由 $a>0$ 知:$a=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$,所以 $2a+b+c\geqslant 4a=2(\sqrt{3}-1)$.

故选 D.

10.15　06 江西

若不等式 $x^2+ax+1\geqslant 0$ 对一切 $x\in(0,\frac{1}{2}]$ 成立,则 a 的最小值为______.

A.0　　B.-2　　C.$-\frac{5}{2}$　　D.-3

【前思】

这是一道二次不等式在某个区间上恒成立的问题,常和二次函数联系起来解决问题.本题是区间定、轴动问题,需讨论完成.

令 $f(x)=x^2+ax+1$,其对称轴为 $x=-\frac{a}{2}$,需对下面三种情况进行讨论:

① $-\frac{a}{2}\leqslant 0$ 时;② $0<-\frac{a}{2}<\frac{1}{2}$ 时;③ $\frac{1}{2}\leqslant-\frac{a}{2}$ 时.

【解析】

同上，$f(x)=x^2+ax+1$，对称轴 $x=-\frac{a}{2}$.

① $-\frac{a}{2}\leqslant 0$ 即 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在$(0,\frac{1}{2}]$上递增

$$f(x)_{\min}=f(0)=1>0$$

满足题设条件.

② $0<-\frac{a}{2}<\frac{1}{2}$ 时，即 $-1<a<0$ 时

$$f(x)_{\min}=f(-\frac{a}{2})=1-\frac{a^2}{4}$$

故只需 $1-\frac{a^2}{4}\geqslant 0$ 即可，解得 $-1<a<0$.

③ $\frac{1}{2}\leqslant-\frac{a}{2}$，即 $a\leqslant-1$ 时，$f(x)$ 在$(0,\frac{1}{2}]$上递减

$$f(x)_{\min}=f(\frac{1}{2})=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}a$$

故只需$\frac{5}{4}+\frac{1}{2}a\geqslant 0$ 即可，解得 $-\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant-1$.

综上可知，满足题设的 a 的取值范围是$[-\frac{5}{2},+\infty)$，a 的最小值是$-\frac{5}{2}$.

故选 C.

10.16　06 江苏

设 a,b,c 是互不相等的正数，则下列不等式中不恒成立的是______.

A. $|a-b|\leqslant|a-c|+|b-c|$

B. $a^2+\frac{1}{a^2}\geqslant a+\frac{1}{a}$

C. $|a-b|+\frac{1}{a-b}\geqslant 2$

D. $\sqrt{a+3}-\sqrt{a+1}\leqslant\sqrt{a+2}-\sqrt{a}$

【前思】

本题考查了 $|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$

$$a^2+b^2\geqslant 2ab$$

对于“不恒成立”的问题，只需找到一个反例即可.

【解析】

对于 A，事实上，由 $|a-b|=|(a-c)-(b-c)|\leqslant|a-c|+|b-c|$ 即可排除.

对于 B、D 很难一步证明，也举不出反例.

对于 C，似乎是利用 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，$(a,b\in\mathbf{R}^+)$，但是本题中，$a,b\in\mathbf{R}^+$，并不能保证 $a-b\in\mathbf{R}^+$，可见错误的是 C.

易举反例：令 $a=1,b=2$，那么 $|a-b|+\frac{1}{a-b}=0<2$，C 是错误的.

故选 C.

下面为 B、D 的证明提供一种思路：

对于 B：$(a^2+\frac{1}{a^2})-(a+\frac{1}{a})=(a+\frac{1}{a})^2-(a+\frac{1}{a})-2$

因为 a 是正数，$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$，易知 $(a+\frac{1}{a})^2-(a+\frac{1}{a})-2\geqslant 0$

对于 D：$\sqrt{a+3}-\sqrt{a+1}=\dfrac{2}{\sqrt{a+3}+\sqrt{a+1}}$

$$\sqrt{a+2}-\sqrt{a}=\frac{2}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a}}$$

分子相同，比较分母即可

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{a+3}>\sqrt{a+2}>0\\ \sqrt{a+1}>\sqrt{a}>0\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt{a+3}+\sqrt{a+1}>\sqrt{a+2}+\sqrt{a}>0$$

所以
$$\frac{1}{\sqrt{a+3}+\sqrt{a+1}}<\frac{1}{\sqrt{a+3}+\sqrt{a}}$$

故 $\sqrt{a+3}-\sqrt{a+1}\leqslant\sqrt{a+2}-\sqrt{a}$ 恒成立.

10.17　05 福建

不等式 $\dfrac{2x-1}{3x+1}>0$ 的解集是______.

A. $\{x \mid x<-\frac{1}{3}$ 或 $x>\frac{1}{2}\}$　　B. $\{x \mid -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\}$

C. $\{x \mid x>\frac{1}{2}\}$　　D. $\{x \mid x>-\frac{1}{3}\}$

【前思】

解分式不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0$.

【解析】

原不等式等价于 $(2x-1)(3x+1)>0$，解得 $x<-\frac{1}{3}$ 或 $x>\frac{1}{2}$.

原不等式的解集为 $(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$.

故选 A.

10.18　04 湖北

若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则下列不等式①$a+b<ab$；②$|a|>|b|$；③$a<b$；④$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$ 中，正确的不等式有______.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

【前思】

考查不等式的基本性质.

【解析】

由 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$ 得 $b<a<0$，所以

$$\left.\begin{array}{l}a+b<0\\ ab>0\end{array}\right\}\Rightarrow ①\text{ 正确}$$

$$|b|>|a| \Rightarrow ②\text{错误}$$
$$a > b \Rightarrow ③\text{错误}$$

因为 a,b 同号且 $a \neq b$,根据$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ 有$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2 \Rightarrow$④ 正确.

因此正确的不等式有两个 ① 和 ④.

故选 B.

10.19　04 北京

已知 a,b,c 满足$c < b < a$,且 $ac < 0$,那么下列选项中一定成立的是______.

A. $ab > ac$　　　　B. $c(b-a) < 0$

C. $cb^2 < ab^2$　　　　D. $ac(a-c) > 0$

【前思】

不等式的基本性质.

【解析】

因为 $c < b < a$ 且$ac < 0$,所以 $a > 0, c < 0$,所以 $ab > ac$.

故选 A.

对于 B:因为 $b < a$,所以 $b - a < 0$.

又 $c < 0$,所以 $c(b-a) > 0$.

对于 C:若 $b = 0$,则不成立.

对于 D:因为 $a > b > c$,所以 $a - c > 0$,且 $ac < 0$.

故 $ac(a-c) < 0$.

10.20　04 湖南

设 $a > 0, b > 0$,则以下不等式中不恒成立的是______.

A. $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geqslant 4$　　　　B. $a^2 + b^2 \geqslant 2ab^2$

C. $a^2 + b^2 + 2 \geqslant 2a + 2b$　　　　D. $\sqrt{|a-b|} \geqslant \sqrt{a} - \sqrt{b}$

【前思】

重要不等式 $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.

【解析】

由 $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ 可判断 B 不恒成立.

故选 B.

10.21　04 全国

不等式$\frac{x(x+2)}{x-3} < 0$ 的解集为______.

A. $\{x \mid x < -2 \text{或} 0 < x < 3\}$　　　　B. $\{x \mid -2 < x < 0 \text{或} x > 3\}$

C. $\{x \mid x < -2 \text{或} x > 0\}$　　　　D. $\{x \mid x < 0 \text{或} x > 3\}$

【前思】

将分式不等式转化为整式不等式求解,再结合高次不等式的数轴标根法解决.

【解析】

原不等式等价于 $x(x-3)(x+2)<0$.

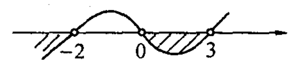

图 4

利用数轴标根法，如图 4，原不等式的解集为 $(-\infty,-2)\cup(0,3)$.

故选 A.

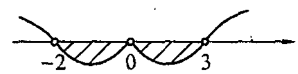

图 5

注　数轴标根法适用于高次不等式，且注意以下几点：

① 将最高次项的系数化为正.

② 从右向左，从上到下，奇过偶不过.

如 $x^2(x+2)(x-3)<0$ 的解集为 $(-2,0)\cup(0,3)$.

10.22　04 重庆

不等式 $x+\dfrac{2}{x+1}>2$ 的解集是______.

A. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

C. $(-1,0)\cup(0,1)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

【前思】

解分式不等式，先化基本型 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0(<0)$，再转化为等价的整式不等式.

【解析】

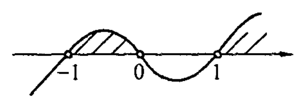

图 6

由 $x+\dfrac{2}{x+1}>2$ 得 $\dfrac{x(x-1)}{x+1}>0$，等价于 $(x+1)x(x-1)>0$.

由数轴标根法，如图 6，原不等式的解集为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

故选 A.

10.23　04 天津

不等式 $\dfrac{x-1}{x}\geqslant 2$ 的解集为______.

A. $[-1,0)$　　B. $[-1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1]$　　D. $(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$

【前思】

解分式不等式.

【解析】

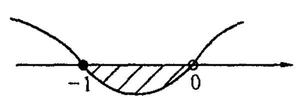

图 7

原不等式变形为 $\dfrac{x-1}{x}-2\geqslant 0$，所以

$$-\frac{x+1}{x}\geqslant 0$$

$$\frac{x+1}{x}\leqslant 0$$

等价于 $$\begin{cases} x(x+1) \leqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

由数轴标根法,如图 7 知 $-1 \leqslant x < 0$,所以原不等式的解集为$[-1,0)$.

故选 A.

二、填空题

10.24　07 浙江

不等式 $|2x-1|-x<1$ 的解集是________.

【前思】

解含有一个绝对值的不等式常用方法:

方法 1:讨论绝对值里面的符号,去掉绝对值符号解不等式;

方法 2:在两边非负的情况下,两边平方.

本题用方法 2 简单.

【解析】

原不等式整理为 $|2x-1|<1+x$.

因为 $|2x-1| \geqslant 0$,所以两边平方得

$$(2x-1)^2<(1+x)^2$$

整理得 $$x^2-2x<0$$

$$x(x-2)<0$$

解集为 $$\{x \mid 0<x<2\}$$

故填$\{x \mid 0<x<2\}$.

10.25　07 山东

当 $x \in (1,2)$ 时,不等式 $x^2+mx+4<0$ 恒成立,则 m 的取值范围是________.

【前思】

解决恒成立问题的一种常见方法是分离变量法,即求哪个参数的取值范围,就把哪个参数分离出来,然后看成函数求最值的问题.

【解析】

$x \in (1,2)$ 时,$x^2+mx+4<0$ 恒成立,即 $m<-(x+\frac{4}{x})$ 在 $x \in (1,2)$ 上恒成立(*)(分离变量).

令 $$y=-(x+\frac{4}{x}) \quad x \in (1,2)$$

若(*)式恒成立,只需 $m<y_{\min}$ 即可,故下面求 $y_{\min}$.

由于 $y=-(x+\frac{4}{x})$ 在 $x \in (1,2)$ 上单调递增,所以

$$y>-5$$

$$m \leqslant -5$$

故填 $m \leqslant -5$.

10.26　06 浙江

不等式$\dfrac{x+1}{x-2}>0$的解集是________.

【前思】

本题解分式不等式问题.

【解析】

由$\dfrac{x+1}{x-2}>0$,得

$$(x-2)(x+1)>0$$

解得
$$x<-1 \text{ 或 } x>2$$

所以原不等式的解集为$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

故填$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

10.27　06 浙江

对$a,b\in\mathbf{R}$,记$\max\{a,b\}=\begin{cases}a,a\geqslant b\\ b,a<b\end{cases}$,函数$f(x)=\max\{|x+1|,|x-2|\}(x\in\mathbf{R})$的最小值是________.

【前思】

本题属于信息题,理解好$\max\{a,b\}$是关键,把信息应用到$f(x)$上,写出$f(x)$的表达式,进而求得最值.

对$|x+a|\geqslant|x-b|$型的绝对值不等式,解题时注意应用它的几何意义.关于分段函数求最值,可以利用图象,考查数形结合的方法.

【解析】

$$f(x)=\max\{|x+1|,|x-2|\}=\begin{cases}|x+1|,|x+1|\geqslant|x-2|\\ |x-2|,|x+1|<|x-2|\end{cases}$$

对于$|x+1|\geqslant|x-2|$的几何意义:数轴上,到-1的距离大于等于到2的距离的点的集合,如图8所示,其中

$$\frac{1}{2}=\frac{-1+2}{2}$$

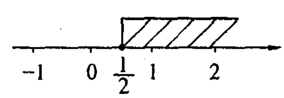

图 8

所以$|x+1|\geqslant|x-2|$的解集为$x\geqslant\dfrac{1}{2}$.

同理可得$|x+1|<|x-2|$的解集为$x<\dfrac{1}{2}$.故

$$f(x)=\begin{cases}|x+1|,x\geqslant\dfrac{1}{2}\\ |x-2|,x<\dfrac{1}{2}\end{cases}=\begin{cases}x+1,x\geqslant\dfrac{1}{2}\\ 2-x,x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

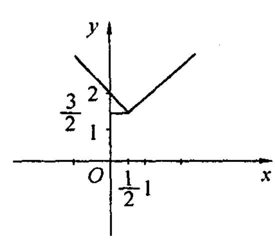

图 9

$f(x)$的图象如图9所示.